1.2. ~~mn~~ množina reálných čísel

N $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

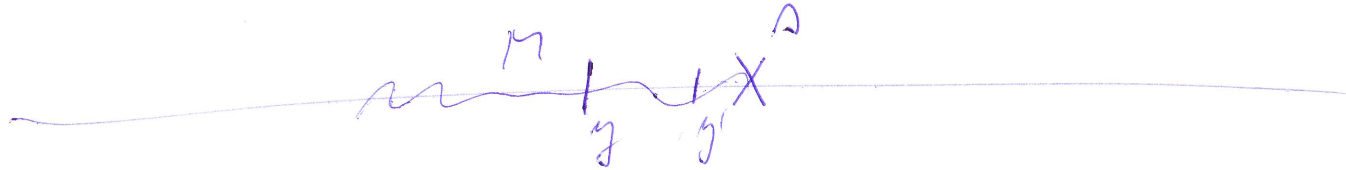
$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q},\ q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}\}$

Definice Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že M je omezená shora (omezená zdola) jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in M$ platí $x \le a$ ($x \ge a$).

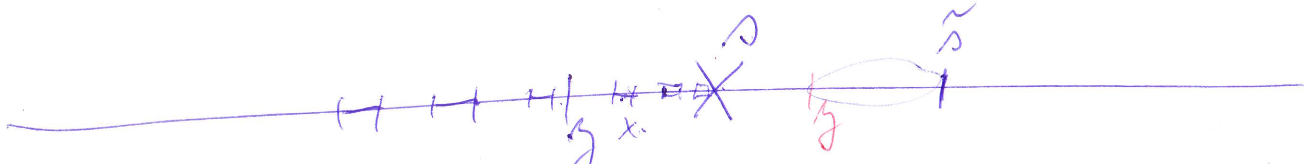
Definice Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je shora omezená. Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazýváme supremem M, pokud

(i) $\forall x \in M : x \le s$

(ii) $\forall y \in \mathbb{R}, y < s\ \exists x \in M : y < x$.



a) $M = [0, 1]$



b) $M = (0, 1)$

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je zdola omezená. Číslo $i \in \mathbb{R}$ nazýváme infimem M, pokud

(i) $\forall x \in M : i \le x$

(ii) $\forall y \in \mathbb{R}, i < y\ \exists x \in M : x < y$

$\cancel{\langle 0,1\rangle}$

$(0,1)$

$s = \sup M$

(i) $\forall x \in M : x \leq s$

(ii) $\forall y \in \mathbb{R}, y < s, \exists x \in M \; y < x.$

Příklad: a) $\sup [0,1] = 1$

$M = [0,1]$ (i) $\forall x \in [0,1] : x \leq 1$ ✓

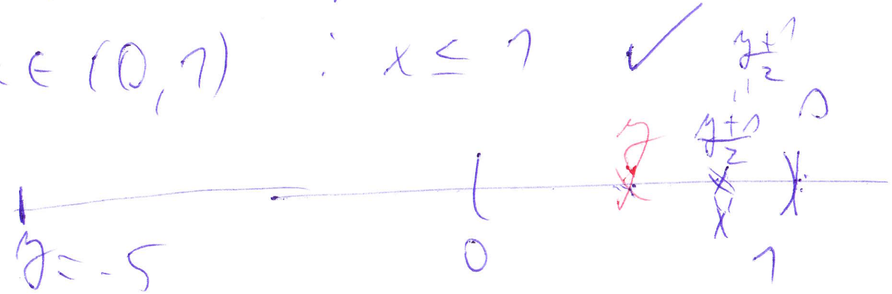
$s = 1$ (ii) $\forall y \in \mathbb{R}, y < 1, \exists x \in [0,1], \; y < x = 1$ ✓

volme $x = 1$

Má-li M maximum, pak $\sup M = \max M$.

b) $\sup (0,1) = 1$ (i) $\forall x \in (0,1) : x \leq 1$ ✓

$M = (0,1)$, $s = 1$ (ii)



$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1 \begin{cases} \text{pokud } y \leq 0 \text{ volme } x = \frac{1}{2} \\ \text{pokud } y \in (0,1) \text{ volme } x = \frac{y+1}{2} \end{cases} \text{pak } x \in (0,1) \text{ a } y < x$$

$y \leq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} > y$ ✓

$y \in (0,1) \Rightarrow \left[\frac{y+1}{2} > y \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{y}{2} \Leftrightarrow 1 > y \right]$ ✓

2-3

Def Na množině $\mathbb{R}$ je dána relace $\leq$ ($\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$), operace sčítání $+$, operace násobení $\cdot$ a množina $\mathbb{R}$ obsahuje prvky 0 a 1 tak, že platí

I

(i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x+(y+z)=(x+y)+z$ — asociativita +

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x+y = y+x$ — komutativita +

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x+0 = x$ — ~~exiten~~ existence 0

(iv) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$ — asociativita $\cdot$

(v) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x\cdot y = y\cdot x$ — komutativita $\cdot$

(vi) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x\cdot 1 = x$ — existence 1

(vii) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists x^{-1}\in\mathbb{R}: \quad x\cdot x^{-1} = 1$ — existence opačného prvku $\cdot$

(vii$\frac{1}{2}$) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists -x \in \mathbb{R}: \quad x+(-x) = 0$ — existence opačného prvku +

(viii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$ — distributivita

II

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad (x \leq y \ \&\ y \leq \cancel{x}) \Rightarrow \cancel{y} = x$ — slabá antisymetrie

(ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (x \leq y \ \&\ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ — transitivita

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad (x \leq y) \vee (y \leq x)$ — dichotomie

(iv) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$ — sčítání a $\leq$

(v) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad (0 \leq x \ \&\ 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x\cdot y)$ — násobení a $\leq$

III Je-li $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná shora omezená množina, pak existuje supremum M.

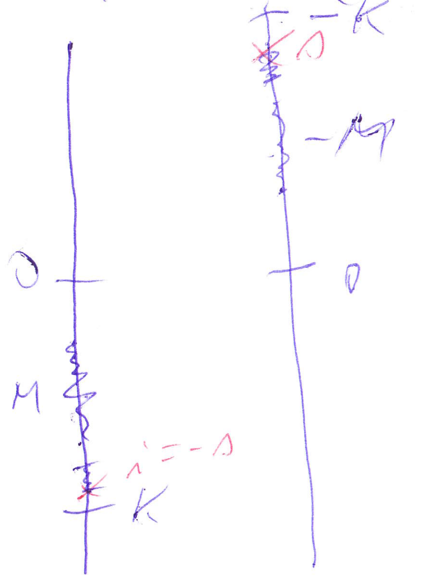
Dokažte, že $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je iracionální ~~$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$~~

$\doteq 1{,}41 + 1{,}73 = 3{,}14 = \pi$

$\underline{\sqrt{2}}$

2-4

Věta L.1.1 (o existenci infima) Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje $\inf M$.



Dk: Označme $-M = \{x \in \mathbb{R} : -x \in M\}$. Zřejmě $M \neq \emptyset$

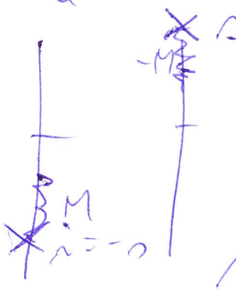
M je zdola omezená: $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\ \ x \geq K$

$\Rightarrow -M$ je shora omezená: $\forall x \in -M\ \ x \leq -K$

Z axiomů $\mathbb{R}$ tedy existuje $s = \sup -M$.

Položme $i = -s$. Tvrdím $i = \inf M$.

(i)



Z definice suprema víme, že $\forall x \in -M : x \leq s = -i$

Tedy $\forall \tilde{x} \in M\ \ -x = \tilde{x} \geq -s = i$

$\exists x \in -M$

$\tilde{x} = -x$

(ii) Víme $\forall y \in \mathbb{R},\ y < s,\ \exists x \in -M : y < x$.

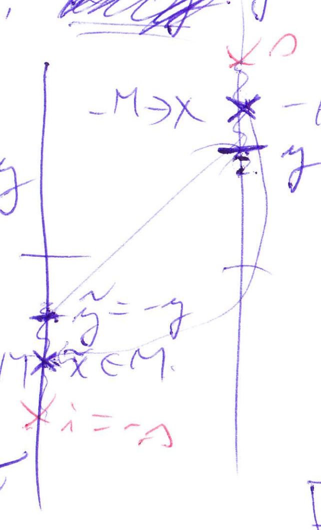
Tedy $\forall \tilde{y} \in \mathbb{R}$ $i < \tilde{y}$ položme $y = -\tilde{y}$.

Pak z $i < \tilde{y}$ dostaneme $s > -\tilde{y} = y$

Tedy z $\exists x \in -M : y < x$

Položme $\tilde{x} = -x$, pak $\tilde{x} \in M$ a

$\tilde{y} = -y > -x = \tilde{x}$



∎

$s = \sup M$

(i) $\forall x \in M : x \leq s$

(ii) $\forall y \in \mathbb{R},\ y < s$

$\exists x \in M : y < x$

$i = \inf M$

(i) $\forall x \in M : i \leq x$

(ii) $\forall \tilde{y} \in \mathbb{R},\ i < \tilde{y}$

$\exists \tilde{x} \in M,\ \tilde{x} < \tilde{y}$

Věta L1.2 (Archimedova vlastnost) Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x < n$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < n$

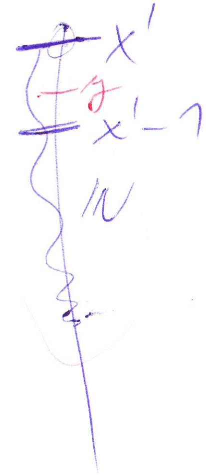
$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : x \geq n$

Dk: Sporem.

Nechť $\exists x' \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N} : x' \geq n$.

Tak také $\forall n \in \mathbb{N} : x' \geq n+1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \boxed{x' - 1 \geq n}$



Toto je spor s tím, že x' je nejmenší horní závora. zvolme $y = x' - \frac{1}{2}$, pak $y < x'$, tedy musí $\exists n \in \mathbb{N} : \boxed{x' - \frac{1}{2} < n}$

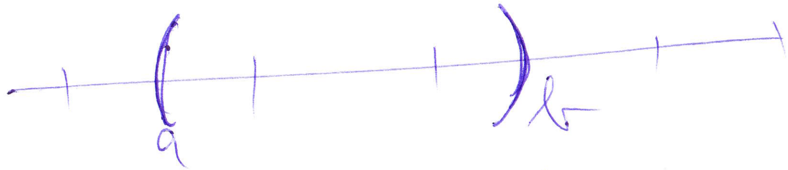
$\lightning$

$\square$

$\forall y \in \mathbb{R}, y < s.$
$\exists x \in M : y < x$

Věta L 1.3 (~~hus~~ hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existují $q \in \mathbb{Q}$ a $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tak, že $q \in (a,b)$ a $r \in (a,b)$.

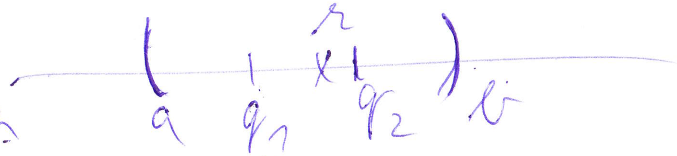
Dk: Podle V 1.2. $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{b-a} < n$, tedy $\frac{1}{n} < b-a$.



$\frac{m}{n}$ $m \in \mathbb{Z}$

Z $\frac{1}{n} < b-a$ plyne, že $\exists m \in \mathbb{Z}$ tak, že $\frac{m}{n} \in (a,b)$.

Tedy $q = \frac{m}{n} \in (a,b)$.



Toto pozorování použijeme na interval (q_1, b) a dostaneme $q_2 \in (q_1, b)$ $q_2 \in \mathbb{Q}$.

($q_1 = q$)

Zvolme $r = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}$. Pak $r > q_1$ a

$$r < q_2 \iff q_1 + \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} < q_2 \iff \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} < q_2 - q_1 \quad ✓$$

Tedy $r \in (a,b)$ a $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. sporem nechť

$$r = q_1 + \underbrace{\frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}}}_{=r} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} = r - q_1 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{2}}_{\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{q_2-q_1}{r-q_1}}_{\in \mathbb{Q}} \lightning$$

$\square$

2-7

$\boxed{\text{Věta}}$ $\boxed{\text{BD 1.4}}$ (o n-té odmocnině) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,\infty)$. Pak existuje právě jedno $y \in [0,\infty)$ takové, že $y^n = x$.

Idea Dk: Položme $M = \{ z \in \mathbb{R} : z^n \leq x \}$.

Ukážeme $M \neq \emptyset$, shora omezená $\Rightarrow$ $\exists\, s = \sup M$.

Nyní ukážeme $s^n = x$ $\square$

$\sqrt{2}$

$\{ z : z^2 \leq 2 \}$