a) Organisační úvod

b) Motivace

c) Úvod

---

a) Přednáška ✓ Cvičení ✓ Proseminář X

Přednáška ✓	Cvičení ✓	Proseminář X
ZK	Z	Z
písemná + ústní	individuální cvičení	
minitesty !		

vis homepage → • seznam vět
• skripta
• požadavky ke zkoušce • příklady

STUDUJTE PRŮBĚŽNĚ ! KONZULTACE !

Literatura: skripta - vis homepage
příklady: KOPÁČEK & spol - Příklady z matematické analýzy pro fyziky 1, 2, 3,
• vis homepage lidí na katedře O. Bouchala
K. Kuncová

DOTAZY - nebát se napsat email.

Motivace matematické analýzy

PLANETY Proč obíhají planety po elipsách?
ÚROKY Lze předpovědět změny úroků v ekonomice a na burze?
POČASÍ Jak ovlivňují teplé mořské proudy počasí v Evropě?
LÉK Jak dlouho bude koncentrace léku v krvi na účinné úrovni.
EPIDEMIE Proč se epidemie šíří nejprve rychle a potom pomalu?
MOSTY Jak se zjistit, že most nespadne v bouři?
LETADLA Jak zkonstruovat nové křídlo letadlo?
MP3, JPEG Jak uchovat informaci o dané funkci v co nejmenším počtu čísel?

Sofistikované modely ve fysice, chemii, biologii a ekonomice
Analysovat a popsat pohyb vzhledem k času.

<u>Proč se analýzu učíte my?</u>

a) uměli určit extrémy funkce, uměli integrovat
Dát solidní matematické základy.

b) Proč jsou matfyzáci ceněni na trhu práce.
umět myslet, analysovat, nedělat chyby
ZPŮSOB MYŠLENÍ

1. úvod

1.1. Výroky a metody důkazů

Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říct, že je pravdivé, či ne.

„Obloha je modrá".

„Vídeň je hlavní město ČR."

Vytváření nových výroků   1 .. pravda   0 .. nepravda

A	B	konjunkce $A \& B$	disjunkce $A \vee B$	implikace $A \Rightarrow B$	ekvivalence	negace $\neg A$
0	0	0	0	1!	1	1
0	1	0	1	1!	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0
		„a"	„nebo"			

Příklady:

$1=2 \Rightarrow 2=3$ ✓ 1

$1=2 \Rightarrow 3=3$ ✓ 1

$A \Rightarrow B$ A je postačující podmínka pro B

B je nutná podmínka pro A

Několik "domácích úkolů":

- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg(A \mathbin{\&} \neg B))$
- $\neg(A \mathbin{\&} B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \mathbin{\&} \neg B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \mathbin{\&} (B \Rightarrow A))$

Kvantifikátory

$\forall$ .. obecný kvantifikátor

$\exists$ .. existenční kvantifikátor

Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$ ... $\forall x \in M : A(x)$

Existuje $x \in M$, že platí $A(x)$ .. $\exists x \in M : A(x)$

Úmluva: $\forall x \in \mathbb{N}, x > 10 : A(x)$ .. značí $\forall x \in \mathbb{N} : (x > 10 \Rightarrow A(x))$

Příklad: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n + m$

Negace výroků

negace: $\neg(\forall x \in M : A(x)) \iff \exists x \in M : \neg A(x)$

$\neg(\exists x \in M : A(x)) \iff \forall x \in M : \neg A(x)$

Příklady: $\neg$(Nikdo mě nemá rád)

Existuje alespoň jeden člověk, který mě má rád.

$\neg(\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n+m)$

$\exists n \in \mathbb{N}\ \neg(\forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : k > n+m)$

$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \neg(\exists k \in \mathbb{N} : k > n+m)$

$\exists n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n+m$

UPOZORNĚNÍ – na pořadí kvantifikátorů záleží

M .. muži

$Ž$ .. ženy

$L(m, ž)$ muži m se líbí žena $ž$

$\forall m \in M\ \exists ž \in Ž : L(m, ž)$

$\exists ž \in Ž\ \forall m \in M : L(m, ž)$

Metody dokazování tvrzení:

A) Důkaz sporem: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \,\&\, \neg B)$

Příklad: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\qquad \underbrace{x=\sqrt{2}}_{A} \Rightarrow \underbrace{x \notin \mathbb{Q}}_{B}$

Důkaz sporem. Nechť $x=\sqrt{2}$ a $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{p}{q}$ $\quad p, q \in \mathbb{N}$ nesoudělná

$x^2 = 2$, $\quad 2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p = 2k \Rightarrow$

$2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q = 2l$

$p = 2k \,\&\, q = 2l \Rightarrow$

p a q nejsou nesoudělná

↯ $\square$

B) Přímý důkaz $A \Rightarrow B$ $\qquad A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow C_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$

Př: $n \in \mathbb{N}$, n^2 liché $\Rightarrow n$ liché

Dk: $n = p_1 \cdots p_k \Rightarrow n^2 = p_1^2 \cdots p_k^2$ je liché $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ nikde není 2 $\quad 2 \nmid p_1, 2 \nmid p_2 \dots 2 \nmid p_k \Rightarrow n = p_1 \cdots p_k$ je liché

$\square$

C) nepřímý důkaz

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

~~Př.~~ n^2 liché (A) $\Rightarrow$ n liché (B)

Dk: n sudé $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2$ je sudé
$\neg A$

$\square$

D) matematická indukce

$\forall n \in \mathbb{N} : V(n)$

- $V(1)$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad V(n) \Rightarrow V(n+1)$

1 ✓ 2 ✓ 3 ✓ 4 ✓ 5

Příklad: $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dk: matematickou indukcí

1. $n = 1 \qquad 1 = \frac{1}{2} 1 \cdot (1+1) = 1$ ✓
2. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n (n+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n+1)(n+2)$

~~$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = 1$~~

$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{1}{2} n \cdot (n+1) + (n+1) = (n+1)\left(\frac{1}{2} n + 1\right) =$

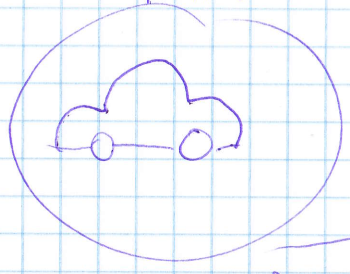
$= \frac{1}{2} (n+1) \cdot (n+2)$

$\square$

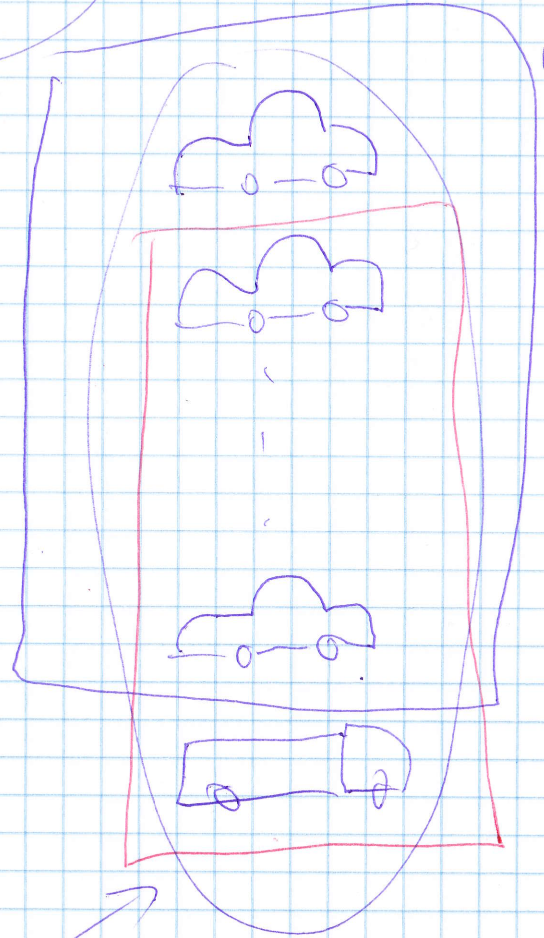
Tvrzení! Všechna auta mají stejnou barvu.

Dk: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall$ množina n-aut – mají stejnou barvu

1. $n = 1$ ✓

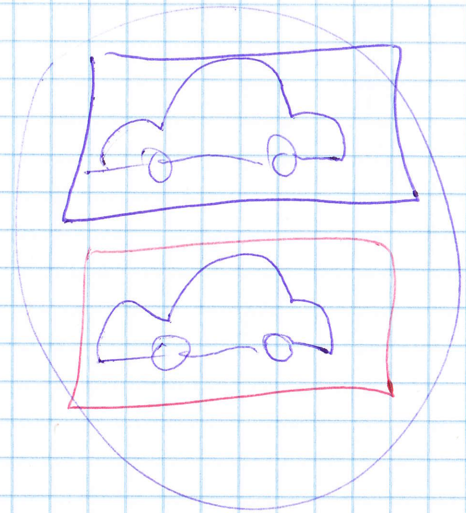


2. $n \rightsquigarrow n+1$ ✓



$n+1$ aut

2. $n = 2$



$\square$