FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

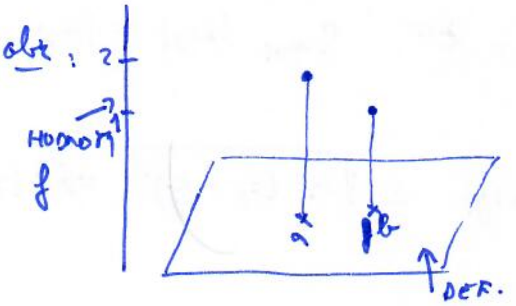
MOTIVACE A O CO VLASTNĚ JDE

- SPOUSTA JEVŮ ZÁVISÍ NA VÍCE PARAMETRECH NEŽ JEN NA JEDNOM ... PROTO JE ÚČELNÉ A DŮLEŽITÉ ROZUMĚT FUNKCÍM ZÁVISEJÍCÍM NA VÍCE PARAMETRECH.

PŘ.: $f(x,y,z) = x + y + z$ ATD...

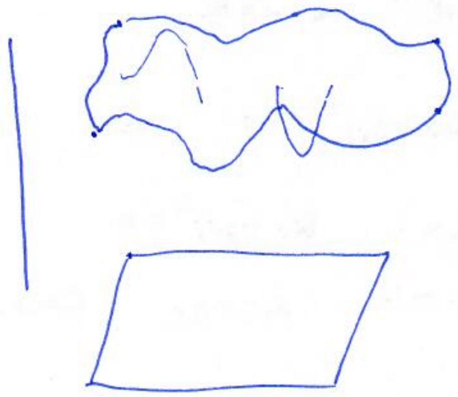
- GRAF TAKOVÉ FUNKCE ZÁVISLÉ NA 2 PROMĚNNÝCH SI MŮŽEME PŘEDSTAVIT JAKO „3D - MODEL KRKONOŠ"

obr.:



graf funkce kde def. obor jsou body a, b a $f(a)=2$, $f(b)=1$

obr.:



TROCHU NEPOVEDENÝ OBRÁZEK FUNKCE 2 PROMĚNNÝCH

(PRO LEPŠÍ ~~PŘEDS~~ PŘEDSTAVU SI NAPŘÍKLAD ZADEJTE VYKRESLENÍ FUNKCE $x^2 - y^2$ DO WOLFRAMU, TJ.

NA INTERNET ZADEJTE

HTTPS://WWW.WOLFRAMALPHA.COM/INPUT/?i=PLOT+x%5E2-y%5E2

... UVIDÍTE GRAF FUNKCE x^2-y^2)

- SAMOZŘEJMĚ, PRO FUNKCI VÍCE NEŽ 2 PROMĚNNÝCH BYCHOM POTŘEBOVALI 4D - SVĚT ... TAKŽE NAŠE PŘEDSTAVA BUDE ČÍM DÁL TÍM VÍCE JEN ORIENTAČNÍ ...

NEJPRVE JE TŘEBA VYJASNIT POJMY „BLÍZKO A DALEKO"
V m-DIMENZIONÁLNÍM PROSTORU.

ZAČNĚTE TÍM, ŽE SI PŘEČTETE DEFINICI EUKLIDOVSKÉ VZDÁLENOSTI A LEMMATA 5.1 A 5.2. ASI JE ZNÁTE JIŽ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY – PRO POŘÁDEK UVÁDÍM DŮKAZY (KTERÉ JE TŘEBA UMĚT)

DŮKAZ LEMMATU 5.1:

AŤ $x, y \in \mathbb{R}^m$ A $j \in \mathbb{N}$ JE TAKOVÉ, ŽE $\varrho_{max}(x,y) = |x_j - y_j|$.

Pak

$$|x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2} \leq \varrho(x,y) \leq \sqrt{m\,(x_j - y_j)^2} = \sqrt{m}\,|x_j - y_j|$$

$\boxtimes$

DŮKAZ LEMMATU 5.2: AŤ $x, y, z \in \mathbb{R}^m$ a $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) MÁME

$$\varrho(x,y) = 0 \iff \sum (x_i - y_i)^2 = 0 \iff$$

$$\iff \forall i = 1,\dots,m: \quad (x_i - y_i)^2 = 0$$

$$\iff \forall i = 1,\dots,m: \quad x_i = y_i \iff x = y$$

(b) MÁME

$$\varrho(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2 \lambda^2} = |\lambda| \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} = |\lambda|\,\varrho(x,y)$$

(c) PŘIPOMEŇME SI CAUCHYOVU NEROVNOST (ASI BYLA NA LINEÁRNÍ ALGEBŘE, DŮKAZ SE DÁ UDĚLAT TŘEBA INDUKCÍ)

$$\left(\sum_{i=1} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m b_i^2\right) \qquad (C)$$

OZNAČME $a_i := x_i - z_i$, $b_i := z_i - y_i$, PAK

PLATÍ (VIZ. DALŠÍ STRANA)

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m} a_i b_i + \sum_{i=1}^{m} b_i^2}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{CAUCHYOVA} \\ \text{NEROVNOST}}}{\leq} \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2} + \sum_{i=1}^{m} b_i^2}_{=\left(\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2} = \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

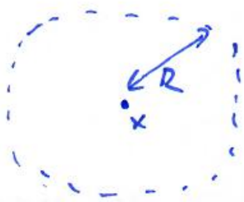
(d) ~~ZŘEJMĚ~~ ZŘEJMĚ MÁME

$$\rho(x+z, y+z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i + z_i - y_i - z_i)^2} = \rho(x,y)$$

$\boxed{\times}$

OTEVŘENÉ MNOŽINY

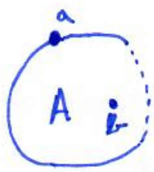
- PŘEČTĚTE SI DEFINICI OT. KOULE. PŘÍSLUŠNÝ OBRÁZEK JE TENTO:



(KOULE VE 2D)

- PŘEČTĚTE SI DEFINICI VNITŘNÍHO BODU A OT. MNOŽINY

PŘ.:



- BOD a NENÍ VNITŘNÍM BODEM A PROTOŽE LIBOVOLNÁ KOULE SE STŘEDEM V „a" BUDE VYČNÍVAT VEN Z MNOŽINY A

- BOD b JE VNITŘNÍM BODEM MNOŽINY A

DŮ.:

KOULE KTERÁ JE CELÁ V „A" A MÁ ZA STŘED „b" => „b" JE VNITŘNÍ BOD

=> INTUITIVNĚ ŘEČENO, OTEVŘENÁ MNOŽINA JE TAKOVÁ, KTERÁ

NEOBSAHUJE ŽÁDNÝ BOD ZE SVÉHO OKRAJE.

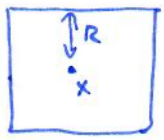
• VYSVĚTLENÍ POZNÁMEK POD DEFINICÍ OTEVŘENÉHO INTERVALU

(a) POKUD POLOŽÍME $B_{MAX}(x,R) := \{ y \in \mathbb{R}^n ;\ \rho_{MAX}(x,y) < R \}$,

PAK Z LEMMATU 5.1 SNADNO DOSTANEME, ŽE

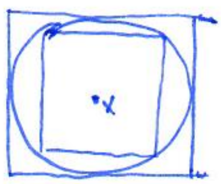
$$B_{MAX}\left(x, \frac{1}{\sqrt{n}}R\right) \subseteq B(x,R) \subseteq B_{MAX}(x,R)$$

MNOŽINA $B_{MAX}(x,R)$ SE VE 2D DÁ GEOMETRICKY NAKRESLIT JAKO



... TJ. JE TO OTEVŘENÝ INTERVAL

TAKŽE VE 2D LEMMA 5.1 SE DÁ NAKRESLIT JAKO



... JE CELKEM JEDNO JESTLI SE DO MNOŽINY VEJDE ČTVEREČEK NEBO KOLEČKO (DO ČTVERCE MOHU VEPSAT KOLEČKO A NAOPAK - VIZ.)

$\Rightarrow$ (PROTO JE MNOŽINA OT. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A\ \exists I$ ot. interval tž. $x \in I \subseteq A$)

(b)

<u>DŮKAZ, ŽE OT. KOULE JE OT. MNOŽINA:</u>

AŤ $y \in B(x,R)$. ZVOL $r := R - \rho(x,y) > 0$.

TVRDÍM: $B(y,r) \subseteq B(x,R)$

[KDYŽ $z \in B(y,r)$, PAK $\rho(x,z) \overset{\text{LEMMA 5.2}}{\le} \rho(x,y) + \rho(y,z) < \rho(x,y) + r = R$

TEDY $z \in B(x,R)$] ⊠

DŮKAZ ŽE ~~[illegible]~~ OTEVŘENÝ INTERVAL JE OTEVŘENÁ MNOŽINA:

AŤ $x \in I = I_1 \times \dots \times I_n = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$

PAK EXISTUJE $\varepsilon > 0$, ŽE PRO KAŽDÉ $i = 1, \dots, n$ MÁME

$$x_i \in (a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon)$$

⌈STAČÍ ZVOLIT TŘEBA

$$\varepsilon := \min \left\{ \frac{x_i - a_i}{2}, \frac{b_i - x_i}{2} ; i = 1, \dots, n \right\}$$ ⌋

ZVOL $r := \varepsilon$.

PAK

$$B(x, r) \subseteq I$$

⌈ POKUD $z \in B(x, r)$, PAK $\varrho_{MAX}(x, z) \leq \varrho(x, z) < r$ A TEDY

$\forall i = 1, \dots, n: \quad |x_i - z_i| < r$

TEDY

$\forall i = 1, \dots, n: \quad z_i \in (x_i - r, x_i + r) \subseteq (a_i, b_i)$

$\Rightarrow z \in I$ ⌋ $\boxtimes$

NYNÍ SI SHRNEME TA NEJDŮLEŽITĚJŠÍ TVRZENÍ O OT. MNOŽINÁCH

PŘEČTĚTE SI VĚTU 5.3

DŮKAZ VĚTY 5.3:

(a) $\emptyset$ JE OTEVŘENÁ

⌈ TRIVIÁLNÍ NEBOŤ NEOBSAHUJE ŽÁDNÝ PRVEK ⌋

$\mathbb{R}^m$ JE OTEVŘENÁ

⌈ TRIVIÁLNÍ PROTOŽE VŠECHNY KOULE JSOU PODMNOŽINOU $\mathbb{R}^m$

TJ. $\forall x \in \mathbb{R}^m : \quad B(x, 1) \subseteq \mathbb{R}^d$

$\Rightarrow \mathbb{R}^m$ OTEVŘENÁ ⌋

(b) AŤ A_i, $i \in I$ JSOU OTEVŘENÉ A $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

(CHCI: $R > 0$ ŽE $B(x,R) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$)
PAK EXISTUJE $i_0 \in I$ ŽE $x \in A_{i_0}$ A PROTOŽE

A_{i_0} JE OTEVŘENÁ, EXISTUJE $R > 0$ ŽE $B(x,R) \subseteq A_{i_0}$.

PAK

$$B(x,R) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

(c) AŤ $A_1, \dots, A_n$ JSOU OTEVŘENÉ A $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

(CHCI: $R > 0$ ŽE $B(x,R) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$)

PROTOŽE KAŽDÁ A_i JE OT., PRO $i = 1, \dots, n$

EXISTUJÍ $R_i > 0$ ŽE $B(x, R_i) \subseteq A_i$

POLOŽ $R := \min\{R_i;\ i = 1, .., n\} > 0$. PAK

$\forall i = 1, .., n$: $B(x,R) \subseteq B(x,R_i) \subseteq A_i$

TEDY $B(x,R) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

$\boxtimes$

POZNÁMKA:

PRO VÍCE NEŽ KONEČNĚ MNOHO MNOŽIN (C) VÝŠE

NEPLATÍ

(PŘ.: $A_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, PAK $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$

A TO NENÍ OTEVŘENÁ MNOŽINA)

DALŠÍM DŮLEŽITÝM POJMEM JE KONVERGENCE A LIMITA
- PŘEČTĚTE SI PŘÍSLUŠNOU DEFINICI A LEMMA 5.4

DŮKAZ LEMMATU 5.4:

(a) AŤ $x_k \to x$ & $x_k \to y$.

PAK

$$0 \le \varrho(x,y) \overset{\text{LEMMA 5.2 (PRO KAŽDÉ } k \in \mathbb{N})}{\le} \varrho(x, x_k) + \varrho(x_k, y) \to 0$$

TEDY, (PODLE VĚTY O POLICAJTECH TŘEBA) $\varrho(x,y) = 0$

PAK DLE LEMMATU 5.2 MÁME $x = y$

(b) ~~„⇒" AŤ $x_k \to x$, PAK~~

DLE LEMMATU 5.1, $x_k \to x \iff \varrho_{max}(x_k, x) \to 0$

ZÁROVEŇ ALE

$$\varrho_{max}(x_k, x) \to 0 \iff \forall i = 1, \dots, n: \ |x_k(i) - x(i)| \to 0$$

„⇒" PRO KAŽDÉ $i = 1, \dots, n$ MÁME

$$0 \le |x_k(i) - x(i)| \le \varrho_{max}(x_k, x) \to 0$$

TEDY DLE VĚTY O POLICAJTECH $|x_k(i) - x(i)| \to 0$

„⇐" AŤ $\varepsilon > 0$ DÁNO. PAK PRO $i = 1, \dots, n$ EXISTUJE

$k_0(i) \in \mathbb{N}$ ŽE PRO $k \ge k_0(i)$: $|x_k(i) - x(i)| < \varepsilon$

POLOŽ $k_0 := \max\{k_0(1), \dots, k_0(n)\}$, PAK PRO

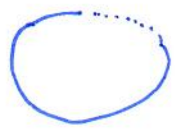
$$k > k_0: \ \underbrace{\max\{|x_k(i) - x(i)|;\ i = 1, \dots, n\}}_{= \varrho(x_k, x)} < \varepsilon$$

TEDY $\varrho(x_k, x) \to 0$

$\boxtimes$

PŘEČTĚTE SI DEFINICI UZAVŘENÉ MNOŽINY.

INTUITIVNĚ: JE TO TAKOVÁ, Z JAKÉ SE NEDÁ VYKONVERGOVAT (TJ. „OBSAHUJE SVŮJ OKRAJ")

PŘ.:  NENÍ UZAVŘENÁ (OBR.:  KŘÍŽKY KONVERGUJÍ K OKRAJI, KTERÝ NENÍ SOUČÁSTÍ MNOŽINY)

PŘ.: $\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\}$ NENÍ UZAVŘENÁ

⌈PROTOŽE $\frac{1}{n}\to 0\notin\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\}$⌋

ALE $\{0\}\cup\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\}$ JE UZAVŘENÁ

⌈PROTOŽE $\frac{1}{n_k}\to x \Rightarrow x=0$ NEBO JE n_k OD URČITÉHO INDEXU KONSTANTNÍ⌋

SOUVISLOST S OTEVŘENÝMI MNOŽINAMI JE VE VĚTĚ 5.5

DŮKAZ VĚTY 5.5:

„⇒" AŤ A JE UZAVŘENÁ, ZVOL $x\in\mathbb{R}^n\setminus A$.

(CHCI: $\exists R>0:\ B(x,R)\subseteq\mathbb{R}^n\setminus A$)

↳ SPOREM: KDYBY PRO KAŽDÉ $n\in\mathbb{N}$ EXISTOVALO

$\cancel{x_n\in B(x,\tfrac{1}{n})\cap A}$ $x_n\in B(x,\frac{1}{n})\cap A$

PAK $0\le\rho(x_n,x)<\frac{1}{n}\to 0$ A PROTO $x_n\to x$

Z DEFINICE UZAVŘENOSTI PAK ALE $x \in A$ ↯ SPOR

„$\Leftarrow$" AŤ $\mathbb{R}^n \setminus A$ JE OTEVŘENÁ!

AŤ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ JE POSLOUPNOST Z A, $x_n \to x$

(CHCI: $x \in A$)

SPOREM: KDYBY $x \notin A$, PAK (Z DEFINICE OTEVŘENOSTI $\mathbb{R}^n \setminus A$)

EXISTUJE $R > 0$: $B(x,R) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$

PROTOŽE $x_n \to x$, EXISTUJE $n_0 \in \mathbb{N}$ ŽE PRO

$\forall n \geq n_0$: $\varrho(x_n, x) < R$

PAK ALE $x_n \in B(x,R) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$

↯ SPOR

(S TÍM ŽE $\{x_n\}$ JE POSL. PRVKŮ Z A)

$\boxtimes$

POMOCÍ DE MORGANOVÝCH PRAVIDEL TEĎ SNADNO DOSTANEME

DŮKAZ VĚTY 5.6:

(a) ~~$\emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ ... JE TO DOPLNĚK $\mathbb{R}^n$~~
~~$\Rightarrow$ DLE VĚTY 5.5 (APLIKOVANÉ NA A)~~

- $\mathbb{R}^n \setminus \emptyset = \mathbb{R}^n$ JE OTEVŘENÁ (DLE 5.3), TEDY DLE 5.5 JE $\emptyset$ UZAVŘENÁ

- $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n = \emptyset$ JE OTEVŘENÁ (DLE 5.3), TEDY DLE 5.5 JE $\mathbb{R}^n$ UZAVŘENÁ

(b) AŤ $F_1, \dots, F_n$ JSOU UZAVŘENÉ.

PAK

$$\cancel{\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=}}$$

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus F_i)}_{\text{OTEVŘENÉ DLE 5.5}}$$

JE OTEVŘENÁ DLE VĚTY 5.3 (c), TEDY DLE VĚTY 5.5 JE $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ UZAVŘENÁ

(c) AŤ $F_i,\ i \in I$ JSOU UZAVŘENÉ

PAK

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus F_i)}_{\text{OTEVŘENÉ DLE 5.5}}$$

JE OTEVŘENÁ DLE 5.3 (b), TEDY DLE 5.5 JE $\bigcap_{i \in I} F_i$ UZAVŘENÁ

⊠

⇝ POKRAČOVÁNÍ PŘÍŠTĚ ...

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH
2. ČÁST

PŘIPOMEŇ:

- OTEVŘENÁ MNOŽINA ≡ KAŽDÝ JEJÍ BOD SE DO NÍ VEJDE ~~NI~~ I S MALÝM OKOLÍČKEM
- UZAVŘENÁ MNOŽINA ≡ NEDÁ SE Z NÍ VYKONVERGOVAT
- A OT. $\iff \mathbb{R}^n \setminus A$ UZ.

POZNÁMKA:

- EXISTUJÍ MNOŽINY, KTERÉ NEJSOU ANI OTEVŘENÉ ANI UZAVŘENÉ (TŘEBA INTERVAL $(0,1]$)
- EXISTUJÍ MNOŽINY, KTERÉ JSOU OTEVŘENÉ A ZÁROVEŇ UZAVŘENÉ (TŘEBA $\mathbb{R}^n$)

TÉMATEM DNEŠNÍ PŘEDNÁŠKY BUDE HLAVNĚ SPOJITOST FUNKCÍ.

PŘEČTĚTE SI DEFINICI SPOJITOSTI A LEMMA 5.7

DŮKAZ LEMMATU 5.7:

ZVOL $\varepsilon > 0$, POLOŽ $\delta := \varepsilon$

PAK KDYKOLIV $y \in B(x,\delta)$, MÁME

$$|x_i - y_i| \leq \rho_{max}(x,y) \leq \rho(x,y) < \delta = \varepsilon$$

$\boxtimes$

VĚTY 5.8 A 5.9 DOKAZOVAT NEBUDEME.

UKAŽME SI ALE, JAK SE DAJÍ APLIKOVAT

(PŘ) UKAŽTE, ŽE FUNKCE

$$f(x,y) = \exp\left(\operatorname{arctg}(x+y)\right)$$

JE SPOJITÁ V $\mathbb{R}^2$.

Řešení:

$f_1(x,y) = x$ je spojitá dle L 5.7

$f_2(x,y) = y$ — // —

$\Rightarrow f_3(x,y) = x+y$ je tedy spojitá dle Věty 5.8

$\Rightarrow f_4(x,y) = \operatorname{arctg}(x+y)$ je spojitá dle Věty 5.9

(PROTOŽE arctg je spojitá funkce)

$\Rightarrow f_5(x,y) = \exp(\operatorname{arctg}(x+y))$ je spojitá dle Věty 5.9

$\;\; \overset{\shortparallel}{f(x,y)}$ (PROTOŽE exp je spojitá funkce)

INTUITIVNĚ: DÍKY L 5.7 A V 5.8 A V 5.9 MŮŽEME UKÁZAT, ŽE VEŠKERÉ FUNKCE, SE KTERÝMI BUDEME PRACOVAT, JSOU SPOJ. NA SVÉM DEF. OBORU

ZÁKLADNÍ NÁSTROJ PRO TO, ABYCHOM POZNALI ZDA JISTÁ MNOŽINA JE OTEVŘENÁ / UZAVŘENÁ JE VĚTA 5.10.

PŘEČTĚTE SI JI

DŮKAZ VĚTY 5.10:

(a) AŤ $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) > c\}$.

(CHCI: $\exists r > 0: B(x_0, r) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) > c\}$)

POLOŽME $\varepsilon = f(x_0) - c$. PAK $\varepsilon > 0$ A Z DEFINICE SPOJITOSTI f V BODĚ x_0 NAJDEME $\delta > 0$ SPLŇUJÍCÍ

$$y \in B(x_0, \delta) \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$$

POLOŽME $R := \delta$. PAK $B(x_0, R) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n ;\ f(x) > c\}$

⌈

Dk. AŤ $y \in B(x_0, R) = B(x_0, \delta)$. PAK $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$

A TEDY

$$f(y) \geq f(x_0) - |f(y) - f(x_0)| > f(x_0) - \varepsilon = c$$

⊠ ⌋

(b) DOKÁŽE SE ANALOGICKY JAKO (a), NEBO SE DÁ Z (a) ODVODIT PŘECHODEM K FUNKCI $-f$

(c) MÁME

$$\{x \in \mathbb{R}^n ;\ f(x) \leq c\} = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n ;\ f(x) > c\}}_{\text{OTEVŘENÁ DLE (a)}}$$

$\Rightarrow$ PODLE VĚTY 5.5 JE TEDY

$\{x \in \mathbb{R}^n ;\ f(x) \leq c\}$ UZAVŘENÁ

(d) ANALOGICKÉ JAKO (c) (PLYNE Z VĚTY 5.5 A Z (b))

(e) MÁME

$$\{x \in \mathbb{R}^n ;\ f(x) = c\} = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ f(x) \leq c\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n ;\ f(x) \geq c\}$$

TEDY SE (DLE (c) A (d)) JEDNÁ O PRŮNIK DVOU UZAVŘENÝCH MNOŽIN, TEDY JE TO DLE VĚTY 5.6 UZAVŘENÁ MNOŽINA

⊠

PŘ (i) URČETE DEFINIČNÍ OBOR FUNKCE $f(x,y) = \sqrt{\log(x-y)}$,

~~(ii) ZJISTĚTE ZDA DEFINIČNÍ OBOR JE UZAVŘENÁ NEBO OTEVŘENÁ MNOŽINA~~

(ii) ZKOUMEJTE JEJÍ SPOJITOST

(iii) ZJISTĚTE, ZDA DEF. OBOR JE UZAVŘENÁ NEBO OTEVŘENÁ MNOŽINA

(iv) NAKRESLETE NĚKOLIK VRSTEVNIC FUNKCE f

(TJ. $f^{-1}(\{c\})$, $c \in \mathbb{R}$)

Řešení:

(i) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \log(x-y) \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x-y \geq 1\}$

(ii) $f_1(x,y) = x$ a $f_2(x,y) = y$ JSOU SPOJ. DLE L 5.7

$\underset{V5.8}{\Rightarrow}$ $f_3(x,y) = (x-y)$ JE SPOJ. V $\mathbb{R}^n$ DLE V5.8,

TEDY JE TAKÉ SPOJ. V D_f

$\underset{V5.9}{\Rightarrow}$ $f_4(x,y) = \log(x-y)$ JE SPOJ V D_f

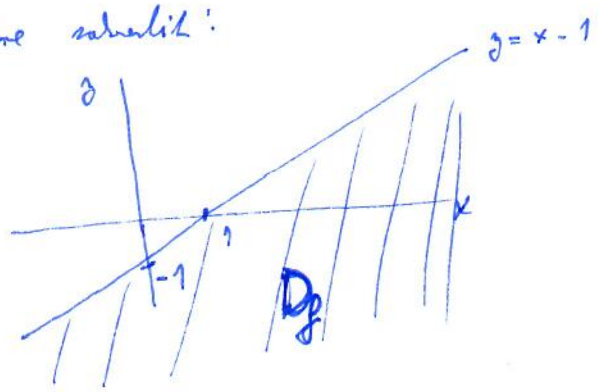
$\underset{V5.9}{\Rightarrow}$ $f(x,y) = \sqrt{f_4(x,y)}$ JE SPOJ V D_f

(iii) FUNKCE $g(x,y) = x-y$ JE SPOJITÁ (ANALOGICKY JAKO V (ii) UKÁŽEME ŽE $f_3(x,y)$ JE SPOJ.)

$\overset{V5.10}{\Rightarrow}$ D_f JE UZAVŘENÁ MNOŽINA

obr.: $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x-y \geq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq x-1\}$ ... tedy

D_f můžeme zakreslit:



(ii) ~~...~~ PROTOŽE FUNKCE f JE ≥ 0, PRO KAŽDÉ $c<0$ MÁME $f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$

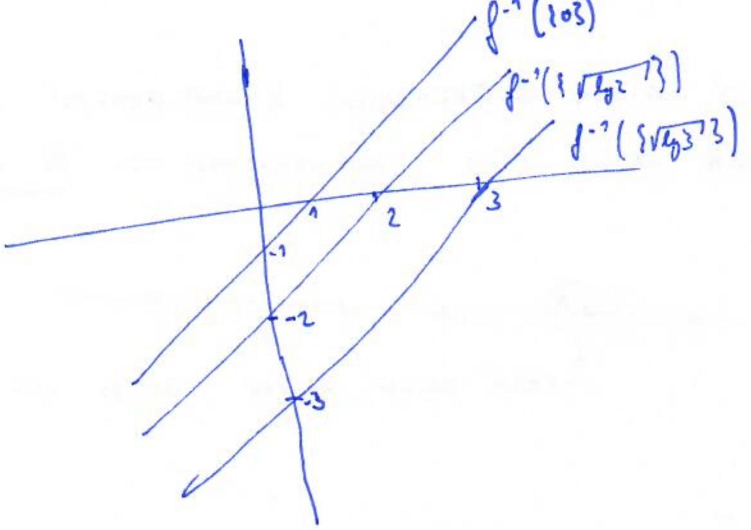
ZKUSME DOSADIT ZA $c = 0$, $c = \sqrt{\lg 2}$ A $c = \sqrt{\lg 3}$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x-y = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x-1\}$$

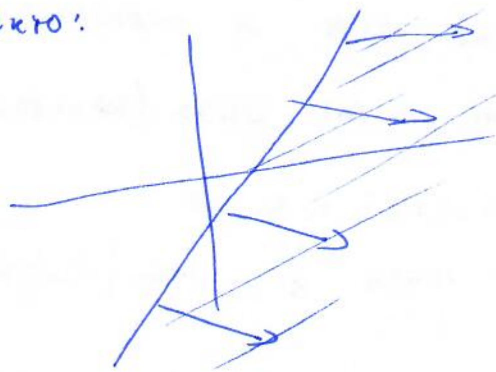
$$f^{-1}(\{\sqrt{\lg 2}\}) = \{ \text{—} \ \text{''} \ \text{—} \ 2\} = \{ \text{—''—}\ y = x-2\}$$

$$f^{-1}(\{\sqrt{\lg 3}\}) = \{ \text{—} \ \text{''} \ \text{—} \ 3\} = \{ \text{—''—};\ y = x-3\}$$

obr:



TEDY GRAF FCE MŮŽEME ZHRUBA NAČRTNOUT TAKTO:



(PLOCHA, KTERÁ STOUPÁ VE SMĚRU ŠIPEK)

$\lrcorner$

(Př) ROZHODNĚTE, ZDA JSOU NÁSLEDUJÍCÍ MNOŽINY OTEVŘENÉ / UZAVŘENÉ, A URČETE JEJICH VNITŘEK:

(i) $\mathbb{N}$

(ii) $\{-\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$

(iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \leq 0\}$

(iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 < 4\}$

(i) PŘIROZENÁ ČÍSLA NEOBSAHUJÍ KONVERGENTNÍ POSL.
$\Rightarrow$ NEDÁ SE Z NICH VYKONVERGOVAT $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ JE UZAVŘENÁ

obr.:

KAŽDÁ KOULE PROTNE $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ NENÍ OTEVŘENÁ
(A MÁ PRÁZDNÝ VNITŘEK)

POŘÁDNĚ:

- $\mathbb{N}$ je uzavřená

DOKÁŽEME, ŽE $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ JE OTEVŘENÁ:

ZVOL $x \notin \mathbb{N}$ ... PAK $\exists \varepsilon > 0$ ~~KONKRÉTNĚ ...~~

ŽE $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{N} = \emptyset$

[LZE ZVOLIT TŘEBA $\varepsilon = \min\left\{\frac{x - \lfloor x \rfloor}{2}, \frac{\lfloor x \rfloor + 1 - x}{2}\right\}$]

TEDY $B(x,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ A x JE VNITŘNÍ BOD $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

PROTOŽE $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ BYLO LIBOVOLNÉ, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ JE OTEVŘENÁ

- $\mathbb{N}$ NENÍ OTEVŘENÁ

DOKÁŽEME, ŽE 1 NENÍ VNITŘNÍM BODEM:

ZVOL LIBOVOLNÉ $R>0$ (CHCI: $B(1,R) \not\subseteq \mathbb{N}$)

PAK $1+\min\left(\frac{R}{2},\frac{1}{2}\right) \in B(1,R)$, ALE NENÍ TO CELÉ ČÍSLO,

TEDY $B(1,R) \not\subseteq \mathbb{N}$ $\rfloor$

ANALOGICKY: ŽÁDNÝ BOD $\mathbb{N}$ NENÍ VNITŘNÍM BODEM

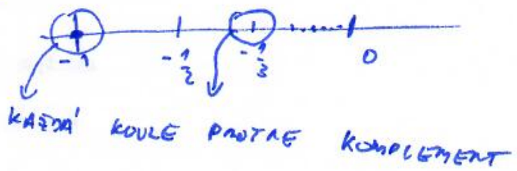
(ii)

• MÁME $-\frac{1}{n} \to 0 \notin \left\{-\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$, TEDY $\left\{-\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$

NENÍ UZAVŘENÁ

• NENÍ ALE ~~TAKÉ~~ ANI OTEVŘENÁ

obr.:



POZNÁMKA:

-1 NENÍ VNITŘNÍ BOD $\left\{-\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$, NEBOŤ PRO $R>0$

JE BOD $x = -1+\min\left\{\frac{R}{2}, \frac{1}{10}\right\}$ ELEMENTEM $B(-1,R)$

ALE NENÍ ELEMENTEM $\left\{-\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$

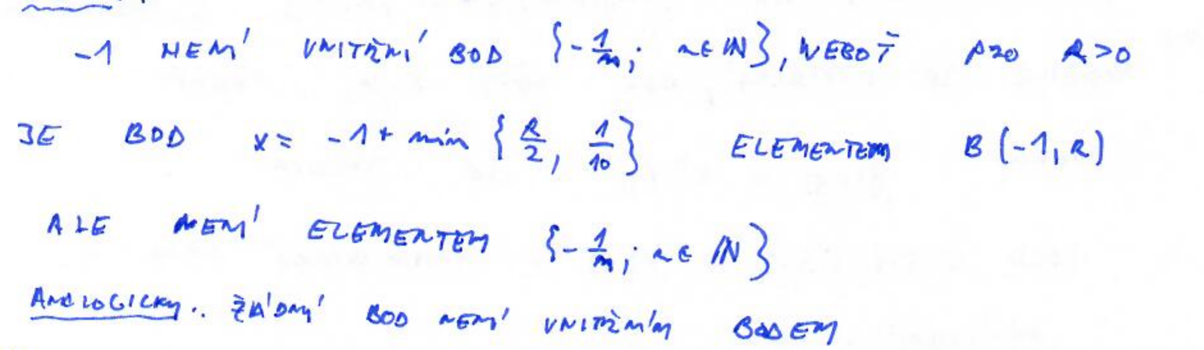
ANALOGICKY: ŽÁDNÝ BOD NENÍ VNITŘNÍM BODEM

(iii) MÁME

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0,\ y\le 0\} = \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0\}}_{\text{OT. DLE 5.10}} \cap \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y\le 0\}}_{\text{UZ. DLE 5.10}}$$

$\Rightarrow$ JE TO PRŮNIK OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY

obr.:



MNOŽINA NENÍ ANI OT. ANI UZ. (VIZ. OBRÁZEK VÝŠE)

~~(ii)~~ POŽADOVANÉ:

- NENÍ UZAVŘENÁ, NEBOŤ

$$\left(\tfrac{1}{n}, 0\right) \longrightarrow (0,0)$$ [PROTOŽE KONVERGENCE V $\mathbb{R}^2$ JE KONVERGENCE PO SLOŽKÁCH - VIZ. L 5.4]

ALE $(0,0) \notin \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x>0,\ y \leq 0\}$

- NENÍ OTEVŘENÁ, NEBOŤ BOD $(1,0)$ NENÍ VNITŘNÍM BODEM

[PRO KAŽDÉ $R>0$ JE BOD $\left(1, \frac{R}{100}\right) \in$ ~~KOULE~~ $B((1,0), R)$

ALE NENÍ BODEM ZKOUMANÉ MNOŽINY, TEDY

~~KOULE~~

$$B((1,0),R) \not\subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x>0,\ y \leq 0\}$$]

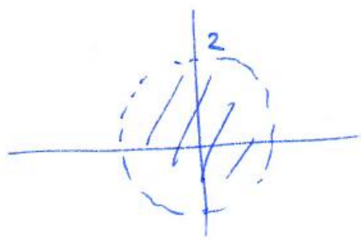
VNITŘEK MNOŽINY JE $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y<0,\ x>0\}$ ["SEBERU OKRAJ"]

(iii) MNOŽINA JE OTEVŘENÁ, DLE VĚTY 5.10, NEBOŤ

FUNKCE $f(x,y) = x^2 + y^2$ JE SPOJITÁ

(DLE L 5.7, V 5.8 A V 5.9 ... ANALOGICKÉ JAKO U PŘÍKLADŮ VÝŠE)

obr.:



[MNOŽINA POPISUJE OT. KRUH O POLOMĚRU 2, JE ROVNA

$$B((0,0), 2)$$]

POZN.: U PŘÍKLADŮ TOHOTO TYPU MI STAČÍ "DŮKAZ OBRÁZKEM" (NETŘEBA DĚLAT FORMÁLNĚ)

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH
3. ČÁST

LIMITA FUNKCE

• PŘEČTĚTE SI DEFINICI LIMITY FUNKCE A POZNÁMKY POD TOUTO DEFINICÍ (VIZ. STR 21 DOLE)

NĚJAKÉ DŮKAZY POZNÁMEK:

(a) JEDNOZNAČNOST LIMITY:

⌈ AŤ A, B JSOU LIMITAMI f V BODĚ a.

ZVOL $\varepsilon > 0$ ... Z DEFINICE LIMITY EXISTUJÍ $\delta_1, \delta_2 > 0$:

$$\forall x \in B(a, \delta_1) \setminus \{a\} : \quad \rho(f(x), A) < \varepsilon \quad (\text{TJ. } |f(x) - A| < \varepsilon)$$
$$\forall x \in B(a, \delta_1) \setminus \{a\} : \quad \rho(f(x), B) < \varepsilon \quad (\text{TJ. } |f(x) - B| < \varepsilon)$$

ZVOL $x_0 \in B(a, \min(\delta_1, \delta_2)) \setminus \{a\}$. PAK DOSTÁVÁME

$$|A - B| \leq |A - f(x_0)| + |f(x_0) - B| < 2\varepsilon$$

CELKEM: $\forall \varepsilon > 0: \ |A - B| < 2\varepsilon$

TEDY $A = B$. ⌋

(b) CHARAKTERIZACE SPOJITOSTI POMOCÍ LIMITY: PLYNE PŘÍMO Z DEFINIC

(c) DŮKAZY A PŘESNÉ FORMULACE VYNECHÁME

POČÍTAT LIMITU FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH JE MNOHEM SLOŽITĚJŠÍ NEŽ POČÍTAT LIMITY FUNKCÍ 1 PROMĚNNÉ

(PŘ) ZJISTĚTE, ZDA LIMITY EXISTUJÍ A POKUD ANO, SPOČTĚTE JE:

a) $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

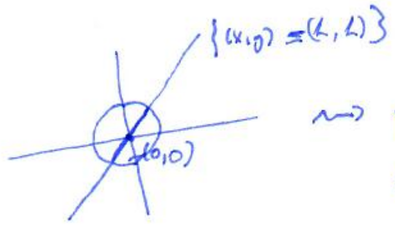
⌈ ŘEŠENÍ: 1. ÚVAHA: TIP KOLIK LIMITA BUDE:

PROTOŽE $(t, t) \xrightarrow{t \to 0} (0, 0)$, POKUD LIMITA EXISTUJE ROVNÁ SE

./.

$$\lim_{t\to0} \frac{\sqrt{t^2t^2+1}-1}{t^2+t^2} = \lim_{t\to0} \frac{\cancel{\sqrt{t^2t^2}}\ t^2}{2t^2\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \overset{AL}{=} \frac{1}{4}\lim_{t\to0}\frac{\cancel{\sqrt{t^4}}\ t^2}{t^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

obr.:



$\rightsquigarrow$ TEDY TESTUJEME HODNOTY FUNKCE V BODECH KŘIVKY $\{(t,t);\ t\in\mathbb{R}\}$

PRO VÝPOČET LIMITY TO ALE NESTAČÍ (TO BYCHOM MUSELI UVAŽOVAT KŘIVKY VYPLŇUJÍCÍ CELÝ KRUH), V LIMITĚ NÁS ZAJÍMAJÍ VŠECHNY BODY V KRUHU (NEJEN TY NA JEJÍ PŘÍMCE)

~~ZKUSME~~ 2. KROK: ZKUSME UVAŽOVAT JEŠTĚ JINOU KŘIVKU:

PROTOŽE $(t,t^2)\xrightarrow{t\to0}(0,0)$, POKUD LIMITA EXISTUJE, MUSÍ BÝT ROVNA

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t^2t^4+1}-1}{t^2+t^4} \overset{AL}{=} \lim_{t\to0}\frac{1}{\sqrt{t^3+1}+1}\cdot\lim_{t\to0}\frac{(t^3)}{t^2(1+t^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to0}\frac{(t)}{1+t^2} = \underline{\underline{0}}.$$

TO JE VE SPORU S 1. KROKEM (LIMITA MÁ BÝT 1/2)

$\Rightarrow$ LIMITA NEEXISTUJE

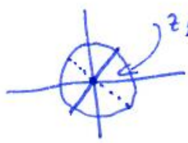
b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ŘEŠENÍ:

1. KROK: ZKUSME NEJPRVE OTESTOVAT BODY NA KŘIVCE $(t,t)=(x,y)$:

$$\lim_{t\to0}\frac{|t\cdot t|}{\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to0}\frac{|t|^2}{\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to0}\frac{t^2}{\sqrt{2}\,|t|} = \lim_{t\to0}\frac{|t|}{\sqrt{2}} = 0$$

$\Rightarrow$ POKUD LIMITA EXISTUJE, MUSÍ SE ROVNAT NULE

obr.: 
ZAJÍMAJÍ NÁS HODNOTY V KRUHU, OTESTOVALI JSME ZATÍM JEN HODNOTY NA PŘÍMCE (t,t).

2. KROK: POKUD BYCHOM VYZKOUŠELI KŘIVKY (t, t^n) $n \in \mathbb{N}$, VŽDY BY VYŠLA NULA. ZDÁ SE TEDY, ŽE LIMITA BY OPRAVDU MOHLA BÝT NULA. ZKUSME TO DOKÁZAT.

MÁME

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{PRO KAŽDÉ } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

ZVOLME $\varepsilon > 0$, POLOŽME $\delta := \varepsilon/2$. PAK PRO $(x,y) \in B((0,0), \delta)$ PLATÍ:

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2} = \rho\big((x,y),(0,0)\big) < \delta = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

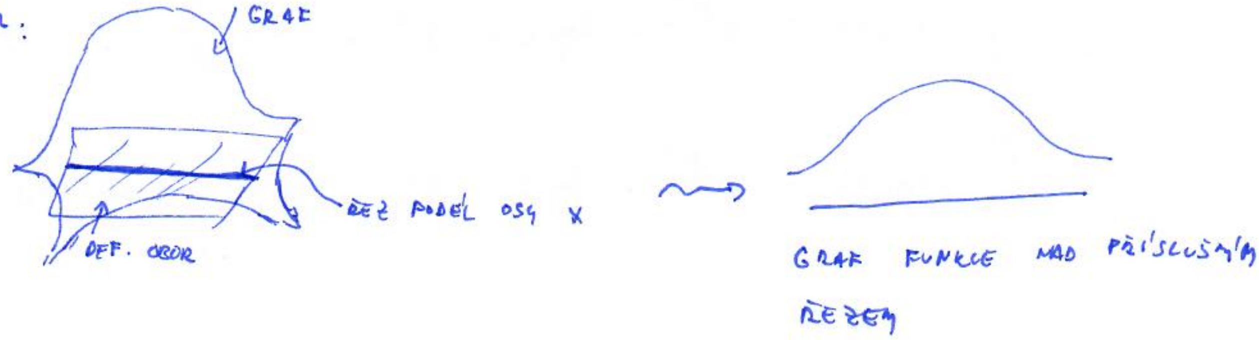
$\Rightarrow$ OVĚŘILI JSME TEDY Z DEFINICE, ŽE LIMITA JE ROVNA NULE.

$\lrcorner$

PARCIÁLNÍ DERIVACE

- PŘEČTĚTE SI DEFINICI PARCIÁLNÍ DERIVACE. O CO JDE:

- CHCEME URČIT NAPŘÍKLAD EXTRÉMY FCE 2 PROMĚNNÝCH („VRCHOLY V MODELU KRKONOŠ"), NAŘEŽEME TEDY MODEL KRKONOŠ NA TENKÉ PLÁTKY A DÍVÁME SE NA PŘÍSLUŠNÉ FUNKCE 1 PROMĚNNÉ, KTERÉ JIŽ VYŠETŘOVAT UMÍME.

obr.: 

– TEDY $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ JE DERIVACE FUNKCE (Z $\mathbb{R}$ DO $\mathbb{R}$)

$$x \longmapsto f(x,b)$$

V BODĚ a

(TJ. „b" JE PARAMETR A ZACHÁZÍME S NÍM JAKO S KONSTANTOU)

(PŘ) SPOČTĚTE PARCIÁLNÍ DERIVACE VŠUDE, KDE EXISTUJÍ

a) $x^2 y^3 = f(x,y)$

Řešení:

„y" JE KONSTANTA, DERIVUJ PODLE „x"

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underline{\underline{2xy^3}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \underline{\underline{3x^2y^2}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

„x" JE KONSTANTA, DERIVUJ PODLE „y"

b) $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$

Řešení: Aby se lépe derivovalo, přepíšeme funkci podle definice:

$$f(x,y,z) = \exp\left(y^z \cdot \log x\right) = \exp\left(\exp(z \log y) \log x\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = x^{(y^z)} \cdot y^z \cdot \frac{1}{x}, \quad (x,y,z) \in D_f = \{(x,y,z);\ x>0, y>0\}$$

„y, z" JSOU KONSTANTY, DERIVUJ PODLE „x"

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^{(y^z)} \cdot \log x \cdot y^z \cdot z \cdot \frac{1}{y}, \quad (x,y,z) \in D_f$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^{(y^z)} \cdot \log x \cdot y^z \cdot \log y, \quad (x,y,z) \in D_f$$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y \quad , \quad \text{— \; " \; —}$$

Jak je to v bodě $(x,y) = (0,0)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left(x \longmapsto f(x,0)\right)'(0) = \left(\sqrt{x^2}\right)'(0)$$

$$\left(\overset{\text{VOLD}}{\cancel{=}} \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{x^2}\right)' = \right) \quad \lim_{x\to 0+} (|x|)' = \lim_{x\to 0+} 1 = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x\to 0-} (|x|)' = \lim_{x\to 0-} -1 = \underline{\underline{-1}}$$

NELZE APLIKOVAT, ALE LZE APLIKOVAT NA VÝPOČET DERIVACE ZPRAVA A ZLEVA

Tedy, dle VOLD derivace zprava je $+1$, derivace zleva je -1

$\Rightarrow$ derivace neexistuje

ANALOGICKY PRO $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Závěr: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistují!

d) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}} \cdot 3x^2 \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

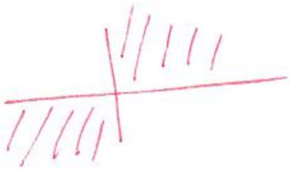
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}} \cdot 3y^2 \quad , \quad \text{— \; " \; —}$$

Jak to je v bodě $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left(\sqrt[3]{x^3}\right)'(0) = (x)'(0) = \underline{\underline{1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left(\sqrt[3]{y^3}\right)'(0) = (y)'(0) = \underline{\underline{1}}$$

e) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

→ OBR: 

Řešení: $D_f = \{(x,y);\ xy \geq 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\, y \quad , \quad (x,y) \in D_f \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$$

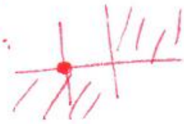
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\, x \quad , \quad \text{— " —}$$

Zbývá případ, kdy $x = 0$ nebo $y = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \Big(x \longmapsto \underbrace{f(x,0)}_{=0}\Big)'(0) = (0)'(0) = \underline{\underline{0}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \underline{\underline{0}}$, $y \in \mathbb{R}$

~~Zbývá případ, kdy~~

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) =$
- POKUD $y = 0$, PAK JE TO NULA (VIZ. VÝŠE)
- POKUD $y \neq 0$: → NEMÁ SMYSL PARC. DERIVACI POČÍTAT (FCE NENÍ DEF. NA ÚSEČCE) → OBR: 

$$= \big(x \longmapsto f(x,y)\big)'(0) = \left(\sqrt{xy}\right)'(0)$$

JE SPRÁVNĚ, ALE ZBYTEČNĚ SLOŽITÉ

- POKUD $y > 0$: $\overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \text{"}\, \frac{y}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{0^+} \,\text{"} = \underline{\underline{+\infty}}$
- POKUD $y < 0$: $\overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x \to 0-} \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \text{"}\, \frac{y}{2\sqrt{|y|}} \cdot \frac{1}{0^+} \,\text{"} = \underline{\underline{-\infty}}$

⇒ PROTOŽE Z DEFINICE MUSÍ BÝT PARCIÁLNÍ DERIVACE VLASTNÍ,

DOSTÁVÁME, ŽE $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ PRO $y \neq 0$ NEEXISTUJE

ANALOGICKY: NEEXISTUJE ANI $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ PRO $x \neq 0$

f) $f(x,y) = |y - x^2|$

Řešení:

- POKUD $y - x^2 > 0$, PAK

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$$

- POKUD $y - x^2 < 0$, PAK

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$$

- POKUD $y = x^2$, PAK $(x,y) = (a,a^2)$ A MÁME:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,a^2) = \left(x \mapsto f(x,a^2)\right)'(a) = \left(|a^2 - x^2|\right)'(a)$

EXISTUJE-LI DERIVACE VPRAVO A JE VLASTNÍ

- POKUD JE $a > 0$, PAK

$$\left(|a^2 - x^2|\right)'_+(a) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x \to a^+} (x^2 - a^2)' = \lim_{x \to a^+} 2x = \underline{\underline{2a}}$$

$$\left(|a^2 - x^2|\right)'_-(a) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x \to a^-} (a^2 - x^2)' = \lim_{x \to a^-} (-2x) = \underline{\underline{-2a}}$$

$\Rightarrow \left(|a^2 - x^2|\right)'(a)$ neexistuje

ANALOGICKY $\left(|a^2 - x^2|\right)'(a)$ neexistuje pro $a < 0$

- POKUD JE $a = 0$, PAK

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left(|0^2 - x^2|\right)'(0) = (x^2)'(0) = \underline{0}$$

Tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(a,a^2)$ pro $a \neq 0$ neexistuje, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial y}(a,a^2) = \left(y \mapsto f(a,y)\right)'(a^2)$

$= \left(|y-a^2|\right)'(a^2)$, EXISTUJE-LI VLASTNÍ DERIVACE VPRAVO

MÁME

$\left(|y-a^2|\right)'_+(a^2) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{y\to(a^2)+} (y-a^2)' = \lim_{y\to(a^2)+} 1 = \underline{1}$

$\left(|y-a^2|\right)'_-(a^2) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{y\to(a^2)-} (a^2-y)' = \lim_{y\to(a^2)-} -1 = \underline{\underline{-1}}$

$\Rightarrow \left(|y-a^2|\right)'(a^2)$ NEEXISTUJE A TEDY ANI

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,a^2)$ NEEXISTUJE (PRO ŽÁDNÉ $a \in \mathbb{R}$)

g) $f(x,y) = x\cdot[y]$, kde $[\cdot]$ značí celou část

Řešení: PRO $y \in [k,k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ MÁME $f(x,y) = k\cdot x$

TEDY $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = [y]$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, POKUD $y \notin \mathbb{Z}$ (PROTOŽE PAK JE PŘEDPIS $f(x,y) = k\cdot x$ A KONSTANTA „k" SE NA OKOLÍ „y" NEMĚNÍ!)

Zbývá vyšetřit $\frac{\partial f}{\partial y}(x,k)$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,k) = \left(y \mapsto [y]x\right)'(k)$

- POKUD $x \neq 0$ PAK $\frac{\partial f}{\partial y}(x,k)$ NEEXISTUJE (PROTOŽE FUNKCE $y \mapsto [y]x$ MÁ V BODĚ „k" ZPRAVA LIMITU kx A ZLEVA LIMITU $(k-1)x$, TEDY NENÍ SPOJITÁ A NEMŮŽE MÍT PROTO

VLASTNÍ DERIVACI)

- POKUD $x=0$, PAK

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,k) = \left(y \longmapsto [y]\cdot 0\right)'(k) = (0)'(k) = \underline{\underline{0}}.$$

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH
4. ČÁST

VZOROVÉ PŘÍKLADY KE ZKOUŠCE:

Zadání: URČETE A NAKRESLETE DEFINIČNÍ OBOR FUNKCE f A VYŠETŘETE JEJÍ PARCIÁLNÍ DERIVACE:

PŘ 1 $\quad f(x,y) = \arcsin \dfrac{y^2+7}{x+5}$

Řešení:

DEFINIČNÍ OBOR: $\quad x \neq -5 \;\;\&\;\; -1 \leq \dfrac{y^2+7}{x+5} \leq 1$

ŘEŠME NEROVNICE:

$$\frac{y^2+7}{x+5} \leq 1$$

$$\frac{y^2+2-x}{x+5} = \frac{y^2+7-x-5}{x+5} \leq 0$$

TJ. BUĎ $\underbrace{x>-5 \;\&\; x \geq y^2+2}_{\iff x \geq y^2+2}$

NEBO $\underbrace{x<-5 \;\&\; x \leq y^2+2}_{\iff x<-5}$

$$-1 \leq \frac{y^2+7}{x+5}$$

$$0 \leq \frac{y^2+7+x+5}{x+5} = \frac{y^2+x+12}{x+5}$$

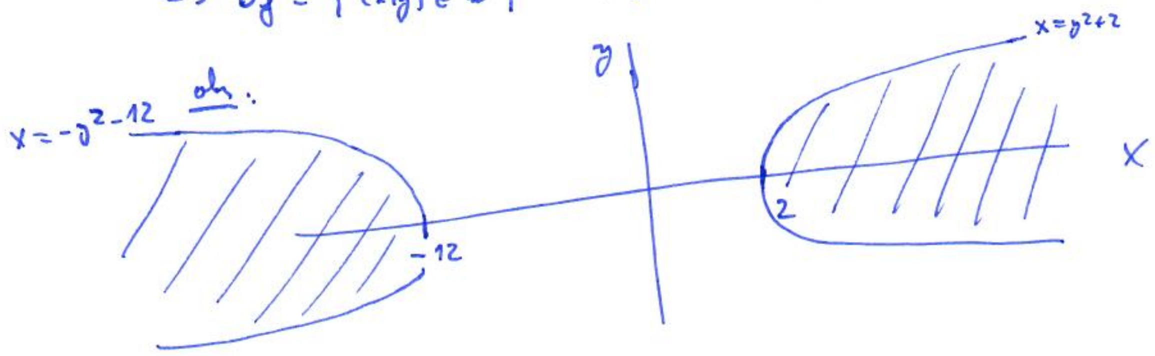
TJ. BUĎ $\underbrace{x>5 \;\&\; x \geq -y^2-12,}_{\iff x>5}$

NEBO $\underbrace{x<-5 \;\&\; x \leq -y^2-12,}_{\iff x \leq -y^2-12}$

Celkem: $\quad -1 \leq \dfrac{y^2+7}{x+5} \leq 1 \iff x \geq y^2+2$ NEBO $x \leq -y^2-12$

$\Rightarrow D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\; x \geq y^2+2$ NEBO $x \leq -y^2-12\}$

obr.:



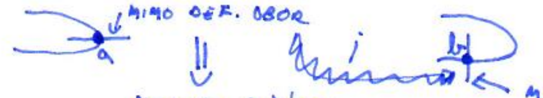
PARCIÁLNÍ DERIVACE:

PARCIÁLNÍ DERIVACE:

Př.: DEF. OBOR JE

$\Rightarrow$ NA HRANICI DEF. OBORU FUNKCE NENÍ DEFINOVÁNA

NA ÚSEČCE ROVNOBĚŽNÉ S OSOU x ANI S OSOU y

(Př.: 

$\Downarrow$

NELZE POČÍTAT V „a" DERIVACI PODLE „x"

MIMO DEF. OBOR $\Rightarrow$ NELZE POČÍTAT V „b" DERIVACI PODLE „y")

$\Rightarrow$ TEDY POKUD $x = y^2+2$ NEBO $x = -y^2-12$,

PAK NEMÁ SMYSL $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ A $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ POČÍTAT

V BODECH, KDE $x > y^2+2$ NEBO $x < -y^2-12$ MÁME:

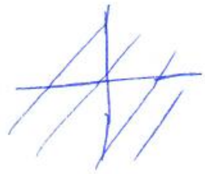
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y^2+7}{x+5}\right)^2}} \cdot -\frac{(y^2+7)}{(x+5)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y^2+7}{x+5}\right)^2}} \cdot \frac{2y}{x+5}$$

PŘ 2 $\quad f(x,y) = \left(1+|x|\right)^{|y|}$

Řešení: $\quad f(x,y) = \exp\left(|y| \log\left(1+|x|\right)\right)$

DEFINIČNÍ OBOR: $\quad D_f = \mathbb{R}^2 \quad$ ok..



PARCIÁLNÍ DERIVACE:

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(1+|x|\right)^{|y|} \cdot |y| \cdot \frac{1}{1+|x|} \cdot \left(|x|\right)'$$

$$= \text{——}\,''\,\text{——} \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

POKUD $x \neq 0$

- ANALOGICKY, POKUD $y \neq 0$, PAK

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(1+|x|\right)^{|y|} \cdot \log\left(1+|x|\right) \cdot \operatorname{sgn}(y)$$

- POKUD $x=0$, PAK SPOČÍTÁME PODLE VZOR PARC. DERIVACI $\frac{\partial f}{\partial x}$ ZPRAVA A ZLEVA:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{+}(0,y) \overset{\text{VZOR}}{=} \lim_{x\to 0^+} \left(1+|x|\right)^{|y|} \cdot |y| \cdot \frac{1}{1+|x|} = |y|$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-}(0,y) \overset{\text{VZOR}}{=} \lim_{x\to 0^-} \text{——}\,''\,\text{——} \cdot (-1) = -|y|$$

TEDY PRO $y \neq 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ NEEXISTUJE

A $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$

- POKUD $y=0$, PAK SPOČÍTÁME PODLE VZOR PARCIÁLNÍ DERIVACI $\frac{\partial f}{\partial y}$ ZPRAVA A ZLEVA:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{+}(x,0) \overset{\text{VZOR}}{=} \lim_{y\to 0^+} (1+|x|)^{|y|} \cdot \log(1+|x|) \cdot 1 = \log(1+|x|)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-}(x,0) \overset{\text{VZOR}}{=} \lim_{y\to 0^-} \text{— " —} \cdot (-1) = -\log(1+|x|)$$

TEDY PRO $x \neq 0$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ NEEXISTUJE

A $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$ ┘

(PŘ 3) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^4}$

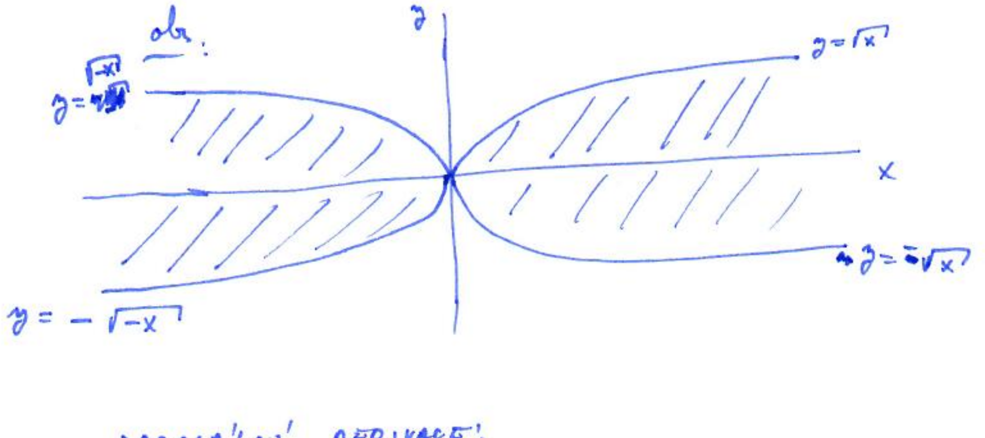
┌ Řešení:

DEF. OBOR: $x^2 - y^4 \geq 0$, TJ. $x^2 \geq y^4$, TJ. $|x| \geq y^2$,

TJ. $\sqrt{|x|} \geq |y|$

$\Rightarrow D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |y| \leq \sqrt{|x|} \}$

obr.:

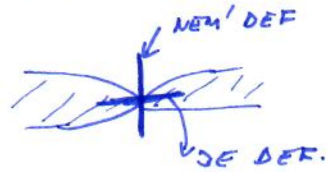


PARCIÁLNÍ DERIVACE:

PODOBNĚ JAKO V PŘÍKLADU (PŘ 1) NEMÁ SMYSL POČÍTAT PARCIÁLNÍ DERIVACE V BODECH, KDE $|y| = \sqrt{|x|}$ & $(x,y) \neq (0,0)$

A V BODĚ $(0,0)$ NEMÁ SMYSL POČÍTAT PARCIÁLNÍ DERIVACI PODLE „y“

(PROTOŽE FUNKCE NENÍ DEFINOVANÁ NA ~~ŽÁDNÉ~~ ŽÁDNÉ ÚSEČCE PŘÍSLUŠNÉHO SMĚRU) ↳ dr:



⇒ NEMÁ SMYSL POČÍTAT $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

ALE MÁ SMYSL POČÍTAT $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

V BODECH (x,y), KDE $|y| < \sqrt{|x|}$ MÁME

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^4}} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^4}} \cdot (-4y^3)$$

ZBÝVÁ: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

MÁME

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left(x \longmapsto f(x,0)\right)'(0) = \left(\sqrt{x^2}\right)'(0)$$

$$= \left(|x|\right)'(0)$$

⇒ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ NEEXISTUJE ~~ZLEVA -1, ZPRAVA +1~~

(PROTOŽE $|x|$ NEMÁ DERIVACI V NULE, NEBOŤ Z VLEVO S PRAVO DOSTÁVÁME $(|x|)'_+(0) = 1$, $(|x|)'_-(0) = -1$)