Zadání písemné zkouąky
z Aplikované matematiky IV
LS 2017-18, var. C

Příklad 1 : Buď f funkce, která nabývá hodnot x^2 na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, navíc je lichá a periodická s periodou 2.

- Rozviňte tuto funkci do Fourierovy řady v bázi sloľené z (přísluąně naąkálovaných) funkcí sin a cos.
- K jaké funci konverguje tato Fourierova řada v kaľdém bodě $x \in \mathbb{R}$? Popiąte a odůvodněte.
- Napiąte Parsevalovu rovnost a pomocí ní sečtěte číselnou řadu, která takto vznikne.

(25 bodů)

Příklad 2 : Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = \frac{9}{(x^2+9)^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(20 bodů)

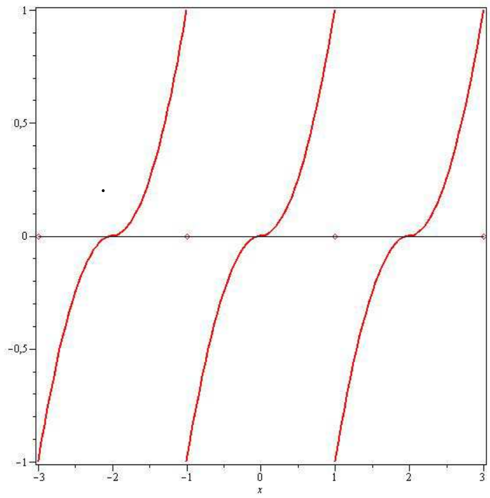
Příklad 3 : Spočtěte pomocí reziduové věty:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)^2}\,.$$

Odůvodněte stručně postup výpočtu.

(25 bodů)

(1)



[4] Lichost $\Rightarrow$ $a_0 = a_n = 0$

[8] $$b_n = 2\cdot\frac{2}{2}\int_0^1 x^2 \sin\frac{2\pi n}{2}x = 2\int_0^1 x^2 \sin \pi n x =$$

$$= 2\left[-\frac{1}{\pi n}x^2\cos\pi n x\right]_0^1 + 2\frac{1}{\pi n}2\int_0^1 x\cos\pi n x$$

$$= \frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n}\left(\underbrace{\left[\frac{1}{\pi n}x\sin\pi n x\right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{\pi n}\underbrace{\int_0^1 \sin\pi n x}_{\left[-\frac{1}{\pi n}\cos\pi n x\right]_0^1}\right) =$$

$$-\frac{1}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{4\left((-1)^n-1\right)}{(\pi n)^3}$$

n = sudé $= 2k \Rightarrow \frac{-2}{\pi\cdot 2k}$

$n = 2k+1 \Rightarrow \frac{2}{\pi(2k+1)} - \frac{8}{\pi(2k+1)^3}$

[5] $$\boxed{F_f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left[-1 + \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)\right]\sin\pi n x}$$

[3] Konvergence je ve všech bodech k hodnotě $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, protože funkce f je po částech hladká s vlastními jednostrannými limitami hodnot f a f', ve všech $x \in \mathbb{R}$.

Parsevalova rovnost:

$$\frac{2}{p}\int_0^p |f|^2 = \frac{2}{2}\cdot 2\int_0^1 x^4 = \frac{2}{5} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{4((-1)^n-1)}{(\pi n)^3}\right)^2$$

[5] $$\underbrace{\frac{2}{5} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^6 n^6}\left((-1)^{n+1}\pi^2 n^2 + 2(-1)^n - 2\right)^2}$$ hledaný výsledek

Bonus: (snaha upravit Parsevala)

$$\frac{\pi^6}{10} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}\left(\begin{cases} n=2k: & (-\pi^2 n^2)^2 \\ n=2k+1: & (\pi^2 n^2 - 4)^2 \end{cases}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^6}\cdot\frac{\pi^4(2k)^4}{1}}_{\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^4}{4\cdot k^2}}_{\frac{\pi^4}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pi^2(2k+1)^2-4)^2}{(2k+1)^6}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pi^2(2k+1)^2-4)^2}{(2k+1)^6} = \pi^6\left(\frac{12-5}{120}\right) = \frac{7\pi^6}{120}}$$

(například)

(2) $f(x) = \frac{9}{(x^2+9)^2}$, f sudá, $f \in L^1$ $\Rightarrow$ $\hat{f}$ sudá a spojitá v $\mathbb{R}$

[5] $\Rightarrow$ stačí počítat pro $\xi < 0$:

[10] $\xi < 0$: $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{9 e^{-2\pi i x \xi}}{(x^2+9)^2} = [-2\pi\xi > 0] = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{3i} \frac{9 e^{-2\pi i x \xi}}{(x^2+9)^2} =$

$$= 18\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i x \xi}}{(x+3i)^2} \right)' \Big|_{x=3i} = 18\pi i \left. \frac{-2\pi i \xi e^{-2\pi i x \xi}(x+3i)^2 - e^{-2\pi i x \xi} \cdot 2(x+3i)}{(x+3i)^4} \right|_{x=3i} =$$

$$= 18\pi i \frac{-2\pi i \xi e^{6\pi\xi}(6i)^2 - e^{6\pi\xi} \cdot 12i}{(6i)^4} = \frac{18\pi e^{6\pi\xi}}{(36)^2}\left(-2 \cdot 36\pi\xi + 12\right) =$$

$$= \pi e^{6\pi\xi}\left(-\pi\xi + \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi e^{6\pi\xi}}{6}(1 - 6\pi\xi) \qquad (\text{pro } \xi < 0)$$

[5]

Sudost $\Rightarrow$ $\boxed{\hat{f}(\xi) = \frac{\pi e^{-6\pi|\xi|}}{6}(1 + 6\pi|\xi|) \qquad \xi \in \mathbb{R}.}$

[5] ③
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Res}_z \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)^2}$$

Kde

[5]
$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)^2} = \frac{1}{z\left(\frac{1}{2iz}\left(4iz + z^2 - 1\right)\right)^2} = \frac{-4z}{(z^2+4iz-1)^2}$$

[4] Kořeny jmenovatele: $-\frac{4i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-16+4} = -2i \pm i\sqrt{3} = i(-2\pm\sqrt{3})$

[2] Reziduum se počítá ve dvojnásobném kořenu $i(\sqrt{3}-2)$

$$\operatorname{Res}_{i(\sqrt{3}-2)} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)^2} = \left(\frac{-4z}{\left(z-i(-2-\sqrt{3})\right)^2} \right)' \Bigg|_{z=i(\sqrt{3}-2)} =$$

[8]

$$= \frac{(-4)(z+2i+\sqrt{3}i)^{\cancel{2}} + 4z \cdot 2 \cdot \cancel{(\dots)}}{(\dots)^{\cancel{4}\,3}} \Bigg|_{i(\sqrt{3}-2)} =$$

$$= \frac{(-4)(2i\sqrt{3}) + 8i(\sqrt{3}-2)}{(2i\sqrt{3})^3} = \frac{-16}{-8 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Celkem

[1]
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = 2\pi \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi .$$