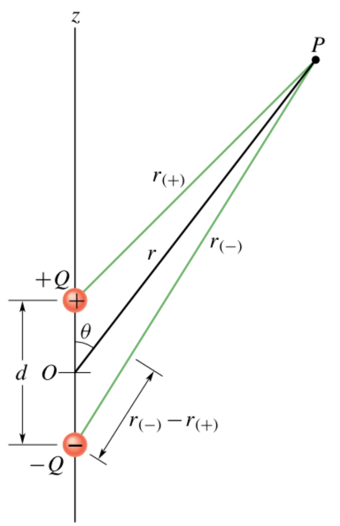
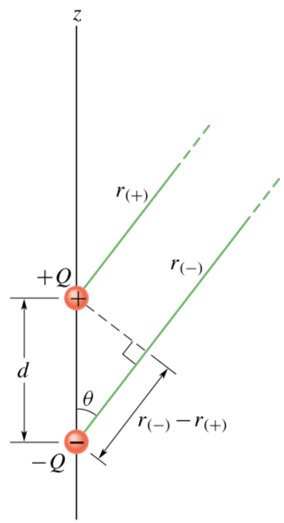
Elektrický dipól



Přiblížení pro P velmi vzdálené od nábojů



Potenciál pole dipólu

$$\varphi = \sum_{i=1}^{2} \varphi_{\mathrm{i}} = \varphi_{(+)} + \varphi_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_{(+)}} + \frac{-Q}{r_{(-)}}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}.$$

Často zanedbáváme délku *d* vzhledem ke vzdálenosti „pozorovatele“ *r*: *d* << *r*

Tzv. bodový elektrický dipól.

Potom: $r_{(-)} - r_{(+)} \doteq d\cos\theta$ a $r_{(-)}r_{(+)} \doteq r^2$

Potenciál pole bodového elektrického dipólu: $$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2}$$

Elektrický dipól 2

Elektrický dipólový moment

$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d}$ $\qquad$ $\boldsymbol{p}$ orientován od záporného ke kladnému pólu

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qd\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{r^3}}$$

pp. dipól v počátku souřadnic

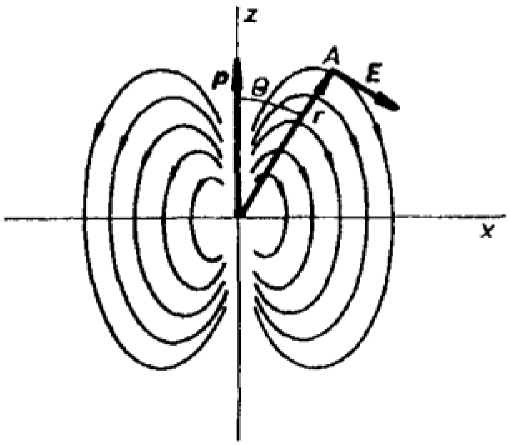
$$[p] = C.m$$

Intenzita elektrického pole dipólu:

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r} + \frac{1}{r^3}\nabla(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r})\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}) + \frac{1}{r^3}(\boldsymbol{p}\nabla)\boldsymbol{r}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right].\end{aligned}}$$

Srovnej s polem bodového náboje: $\quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + C$

Elektrický dipól 3



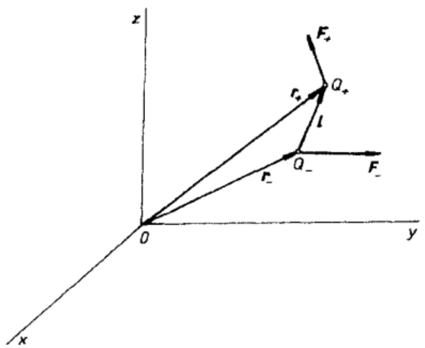
$$E_x = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\sin\theta\cos\theta}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xz}{r^5},$$

$$E_z = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right).$$

na ose *z*: $E_x = 0\,,$ $E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$

na ose *x*: $E_x = 0\,,$ $E_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$

Síly působící na elektrický dipól v el. poli



Síla:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{F}_- = Q\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_+) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_-)\right] \approx Q\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} l_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} l_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} l_z \,, \ldots\right)$$

$$\boldsymbol{F} \approx Q\,(\boldsymbol{l}\nabla)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_-) = (\boldsymbol{p}\nabla)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_-)$$

Moment dvojice sil stejné velikosti (= v homogenním poli) :

$$\mathscr{M} = (\boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-) \times \boldsymbol{F}_+ = Q\left[\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_+)\right] = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_+)$$

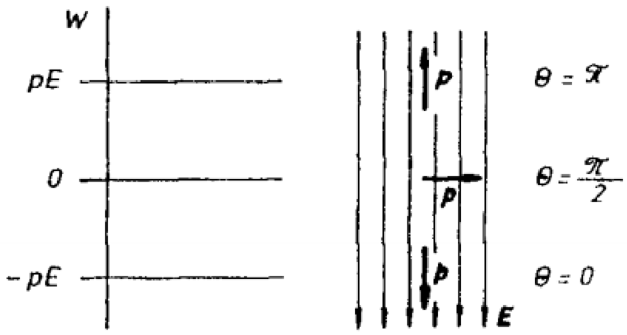
Potenciální energie dipólu v el.-stat poli:

$$W = Q\left[\varphi(\boldsymbol{r}_+) - \varphi(\boldsymbol{r}_-)\right] \approx Q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z\right) = \boldsymbol{p}.\mathrm{grad}\,\varphi = -\boldsymbol{p}.\boldsymbol{E}$$

Potenciální energie dipólu v el.-stat. poli, shrnutí

$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\nabla)\boldsymbol{E}$ $\qquad$ $\mathscr{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$ $\qquad$ $\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{p}.\boldsymbol{E}$

Energie dipólu v elektrostatickém poli



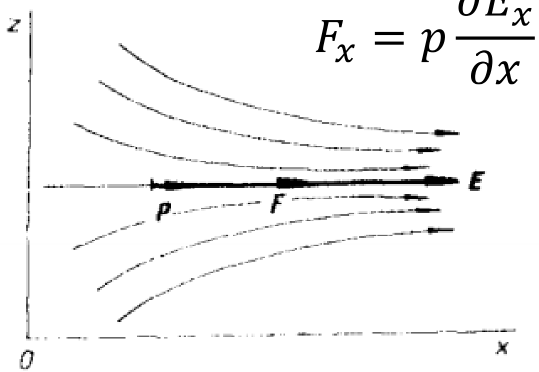
V homogenním poli závisí energie jen na orientaci dipólu.

$$\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{p}.\boldsymbol{E} = -pE\cos\theta$$

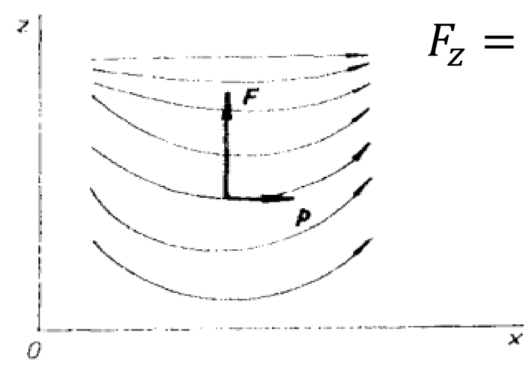
Nejnižší energii má dipól orientovaný **souhlasně** s el.-stat. polem

V nehomogenním poli působí na dipól síla v závislosti na gradientu složek pole

$$F_x = p\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

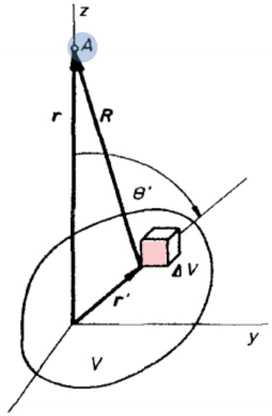


$$F_z = p\frac{\partial E_z}{\partial x}$$



- **Souhlasně** orientovaný dipól je vtahován do oblasti se silnějším polem.
- **Nesouhlasně** orientovaný dipól je vytlačován do oblasti se slabším polem.
- **Volný dipól** se nejprve natočí souhlasně s polem a poté bude vtahován do oblasti s větší intenzitou.

Multipólový rozvoj elektrostatického pole



Úloha: určit potenciál $\varphi(\boldsymbol{r})$ v bodě A buzený nabitým tělesem o objemu V.

Z kosínové věty: $R = \left(r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\cos\theta\right)^{1/2}$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}(1+\alpha)^{-1/2}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta}$$

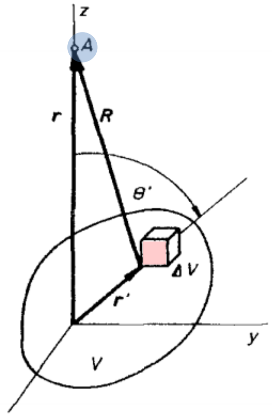
Potenciál lze získat přímou integrací, ale může to být obtížné.
Pokud stačí potenciál velmi daleko od V ($r'/r \ll 1$; $\alpha \ll 1$), ze zobecněné binomické věty:

$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}\,dV}$$

$$(1+\alpha)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 - \frac{15}{48}\alpha^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \ldots\right]$$

Multipólový rozvoj elektrostatického pole 2



Potenciál $\varphi(\mathbf{r})$ vyjádříme jako nekonečnou řadu:

$$\varphi_A = \varphi_A^{(0)} + \varphi_A^{(1)} + \varphi_A^{(2)} + \ldots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \ldots\right)$$

- K_i - závisí pouze na rozložení náboje v objemu V
- = ***elektrické multipólové momenty***
- Jejich příspěvek klesá s příslušnou mocninou r

$$K_0 = \int_V \rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V$$

- celkový elektrický náboj soustavy - „el. monopól“

$$K_1 = \int_V r' \cos\theta \;\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V = \int_V z' \,\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V$$

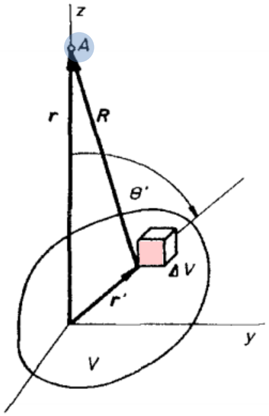
- z-složka zobecněného el. dipólu

$$\boxed{\boldsymbol{p} = \int_V \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V, \quad \boldsymbol{p} = \sum_i \mathbf{r}_i' Q_i}$$

- zobecněný el. dipól - prostorově rozložený anebo diskrétní

- ***p*** je invariantní vůči změně počátku souřadnic, pokud je celkový náboj soustavy 0.

Multipólový rozvoj elektrostatického pole 3



$$K_1 = \int_V r' \cos\theta \; \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V = \int_V z' \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V$$

- *z*-složka zobecněného el. dipólu

$$\boxed{\boldsymbol{p} = \int_V \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V, \quad \boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{r}_i' Q_i}$$

- zobecněný el. dipól - prostorově rozložený anebo diskrétní

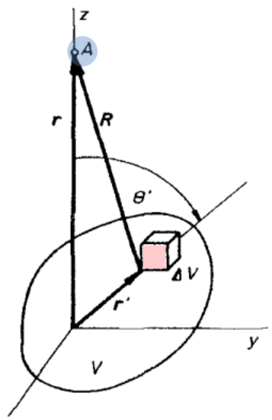
- ***p*** je invariantní vůči změně počátku souřadnic jen, pokud je celkový náboj soustavy 0 (**soustava je elektricky neutrální**).
- Potom platí:

$$\boxed{\varphi_A \approx \varphi_A^{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}_0}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{r^3}}$$

($\boldsymbol{r_0}$ je jednotkový vektor ve směru ***r***)

- vztah pro potenciál je stejný jako potenciál pole bodového dipólu

Multipólový rozvoj elektrostatického pole 4



$$K_2 = \frac{1}{2}\int_V r'^2 \left(3\cos^2\theta - 1\right)\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}V$$

- *K_2 je ½ komponenty Q_{zz} tenzoru elektrického kvadrupólového momentu*

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V (3x'^2 - r'^2)\rho\,\mathrm{d}V & \int_V 3x'y'\rho\,\mathrm{d}V & \int_V 3x'z'\rho\,\mathrm{d}V \\ \int_V 3y'x'\rho\,\mathrm{d}V & \int_V (3y'^2 - r'^2)\rho\,\mathrm{d}V & \int_V 3y'z'\rho\,\mathrm{d}V \\ \int_V 3z'x'\rho\,\mathrm{d}V & \int_V 3z'y'\rho\,\mathrm{d}V & \int_V (3z'^2 - r'^2)\rho\,\mathrm{d}V \end{pmatrix}$$

$$\varphi_A \approx \varphi_A^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{Q_{zz}}{r^3}.$$

- ***Q*** má nulovou stopu (součet diag. prvků).
- ***Q*** je invariantní vůči změně počátku souřadnic jen, pokud jsou celkový náboj a dipólový moment soustavy 0.
- V soustavě hlavních os (tj. soustava, ve které jsou nediag. složky = 0):
- Kvadrupolární moment je charakterizován jediným číslem Q_{zz}.

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Q_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}Q_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

Multipólový rozvoj elektrostatického pole 4

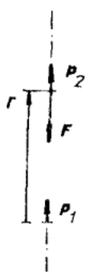
- Rozklad náboje na příspěvky multipólů odráží symetrii rozložení náboje.
- Čím vyšší symetrie, tím nižší počet členů rozvoje.
- Nejvyšší symetrie - kulová: el. pole totožné s polem bodového náboje (monopól).

Síla působící mezi dvěma dipóly

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}_2 \nabla)\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\boldsymbol{p}_2 \nabla)\left[\frac{3(\boldsymbol{p}_1 . \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{r^3}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3\left[(\boldsymbol{p}_2 . \boldsymbol{r})\boldsymbol{p}_1 + (\boldsymbol{p}_1 . \boldsymbol{r})\boldsymbol{p}_2 + (\boldsymbol{p}_1 . \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{r}\right]}{r^5} - \frac{15(\boldsymbol{p}_1 . \boldsymbol{r})(\boldsymbol{p}_2 . \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^7}\right\}$$

Speciální případy:



$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6\, p_1\, p_2}{r^4}$$

Přitažlivá síla

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\, p_1\, p_2}{r^4}$$

Odpudivá síla

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\, p_1\, p_2}{r^4}$$

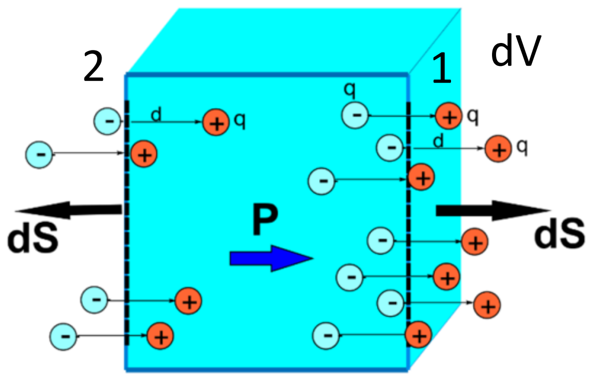
Síla není centrální - je kolmá ke spojnici

Práce při přibližování p_2 z nekonečna = 0

Objemové rozložení elektrických dipólů

- Objem V, v němž jsou spojitě rozloženy elektrické dipóly.
- ***P(r)*** - vektor polarizace - objemová hustota el. dipólu v objemu ΔV: $\boldsymbol{p}_{\Delta \boldsymbol{V}} = \boldsymbol{P}\Delta V$
- Dipólové momenty v různých místech mohou být orientovány různě a mohou mít různou velikost.
- Pokud budou orientovány zcela náhodně, vzájemně se kompenzují.

Zavedení vektoru polarizace



El. dipóly v malém objemu ΔV

Tok vektoru polarizace ***P*** plochou ΔS odpovídá množství kladného náboje, který plochou ΔS prostoupil.

$$\oint_S \boldsymbol{P}.\boldsymbol{dS} = -(Q_1 - Q_2) = -Q_v = -\int_V \rho_v(\boldsymbol{r}')dV$$

Q_V je **vázaný** náboj, ρ_v je hustota **vázaného** náboje.

Pokud $Q_1 = Q_2$, náboj v ΔV se kompenzuje, $Q_v = 0$.

Z Gaussovy věty vektorové analýzy:

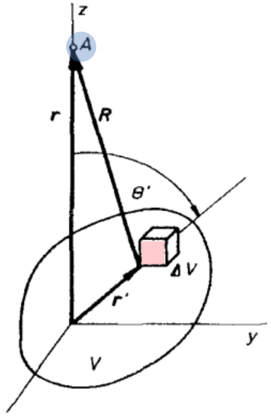
$$\oint_S \boldsymbol{P}.\boldsymbol{dS} = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{P}\, dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}') = -\rho_v(\boldsymbol{r}')}$$

Plošná hustota vázaného náboje: $\boxed{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}').\boldsymbol{n} = \sigma_v(\boldsymbol{r}')}$

obrázek: V. Pankrác : Pomocné texty k přednáškám z teorie elektromagnetického pole, FEL ČVUT, 2015

Objemové rozložení elektrických dipólů 2

- Potenciál:



$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}').\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}V$$

Úpravy (derivace podle složek r')

$$\operatorname{grad}'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \qquad \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}').\boldsymbol{R}}{R^3} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\operatorname{grad}'\left(\frac{1}{R}\right) = \operatorname{div}'\left[\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}\right] - \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_V \operatorname{div}'\left[\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}\right]\mathrm{d}V - \int_V \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V\right\}$$

- Konečný výraz pro potenciál:

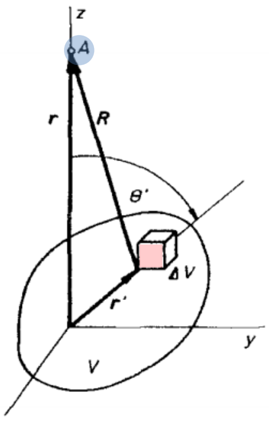
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\oint_S \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}').\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{R} - \int_V \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V}{R}\right\}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}') = -\rho_v(\boldsymbol{r}')}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}').\boldsymbol{n} = \sigma_v(\boldsymbol{r}')}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\oint_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S}{R} + \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V}{R}\right\}$$

Objemové rozložení elektrických dipólů 3

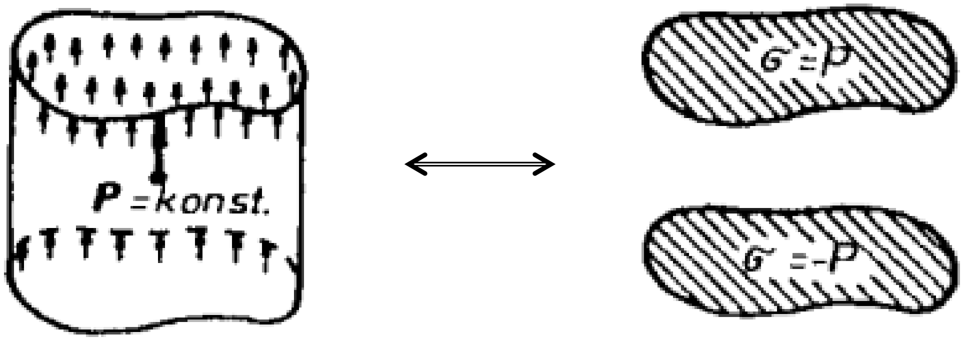


$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\oint_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S}{R} + \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V}{R}\right\}$$

- Pole objemově rozložených el. dipólů lze popsat jako superpozici vázaných nábojů **objemově rozložených** v tomto objemu *V* a pole nábojů **plošně rozložených** na povrchu *S* objemu *V*.
- V případě homogenního rozložení dipólů (***P***=konst): div***P*** = 0. Pole vytvářené polarizovaným objemem je ekvivalentní poli plošného náboje.

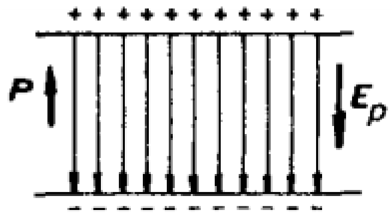
Polarizovaný válec a rovina

- Obecný válec s rovnoměrným rozložením dipólů



- ***P*** - vektor polarizace

- Rovinná vrstva

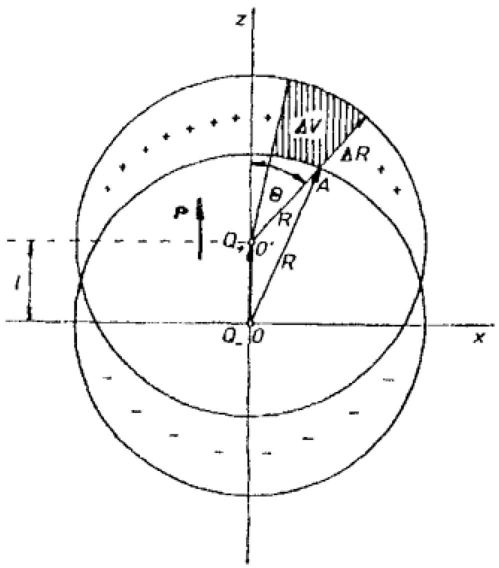


$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}} = -\frac{\boldsymbol{P}}{\varepsilon_0}$$

- Kladné a záporné náboje se v objemu válce anebo vrstvy vykompenzují.
- Pokud by div ***P*** $\neq 0 \Rightarrow$ vznik objemového náboje s hustotou.

Polarizovaná koule

- Koule spojitě zaplněná bodovými elektrickými dipóly s konstantní polarizací



- Elektrostatické pole koule je totožné s polem nabité kulové slupky s hustotou náboje:

$$\sigma = \boldsymbol{P}.\boldsymbol{n} = P cos\theta$$

- Jiný způsob odvození: 2 objemově nabité koule opačnými náboji: $Q_+ > 0$, $Q_- < 0$ ($\rho_+ > 0$, $\rho_- < 0$). Jejich středy jsou nepatrně posunuty o *l* << *R*.

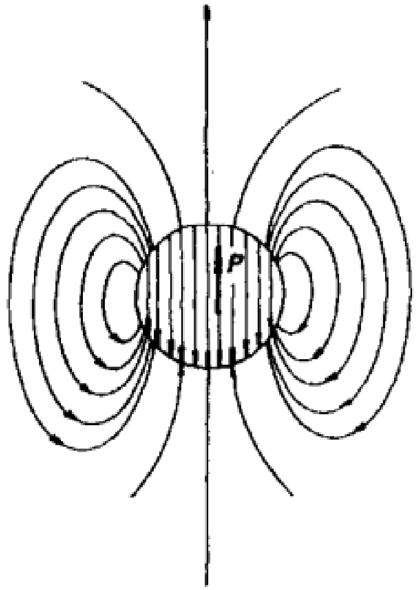
$$\sigma = \rho\Delta R$$

Trojúhelník OAO' se stranami *l*, *R*, *R-ΔR*,
aplikace kosinové věty a zanedbáním malých členů:
$\Delta R = l cos\theta$.
Tedy: Velikost polarizace $P = \rho\boldsymbol{l}$

- Koule se chová navenek, jako by byl její dipól byl umístěn ve středu.

$$\boldsymbol{p}_k = Q\boldsymbol{l} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \boldsymbol{l} = V\boldsymbol{P}$$

Polarizovaná koule 2



- Potenciál vně koule:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p_k}.\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{3}(\boldsymbol{p_k}.\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p_k}}{r^3}\right]$$

- Na povrchu koule:

$$\varphi_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_k\cos\theta}{R^2} = \frac{1}{3\varepsilon_0}P\,R\cos\theta = \frac{1}{3\varepsilon_0}P\,z$$

  Při přechodu přes povrch musí být spojitý.
- Potenciál φ uvnitř koule:
  Laplaceova rce (uvnitř koule je *Q*=0), hraniční podmínka $\varphi_k = \varphi$
- Také uvnitř: $\varphi = \frac{1}{3\varepsilon_0}Pz \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$

- Vně koule: pole identické s polem el. dipólu umístěného v jejím středu
- Uvnitř koule: homogenní pole, ***P*** má opačný směr než ***E***. 3x slabší než pole polarizované vrstvy.
- Tečná složka spojitá: $E_t = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\sin\theta$
- Normálová se mění skokem: $E_{ni} = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\cos\theta$; $E_{ne} = \frac{2P}{3\varepsilon_0}\cos\theta$
- Homogenní elektrické pole vzniká i uvnitř polarizovaného elipsoidu.