Elektrická potenciální energie

Elektrická síla je konzervativní $\Rightarrow$ **systému složenému z alespoň 2 nabitých částic lze přiřadit potenciální energii E_p.**
Pp. počáteční konfigurace K_i, koncová konfigurace K_f

$$\Delta E_p = E_{p,f} - E_{p,i} = W_V = -W_E$$

- Změna potenciální energie ΔE_p odpovídá práci W_V vykonané vnější silou na přenesení nábojů z počáteční do koncové konfigurace (práce W_E vykonaná elektrickými silami má opačné znaménko).
- Referenční konfigurace s nulovou pot. energií se často volí částice s nekonečnou vzájemnou vzdáleností.

$$E_p = W_V = - W_E$$

Pozn.
Abychom mohli elektrické síly považovat za **elektrostatické**, musí se částice pohybovat dostatečně pomalu, aby se neuplatnily jevy spjaté s pohybem náboje, např. elektrický proud.

Elektrický potenciál

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{E_\mathrm{p}}{Q}$$

Potenciální energie vztažená na jednotkový náboj.

Elektrické napětí = rozdíl potenciálů v různých místech prostoru

$$U = -\Delta\varphi = -\varphi_f + \varphi_i = \frac{W_E}{Q}$$

Pokud $\varphi_i = \varphi_\infty = 0$ $\Longrightarrow$ $\varphi_f = -\frac{W_{E\infty}}{Q}$

Jednotky: $[U] = [\varphi] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V}$

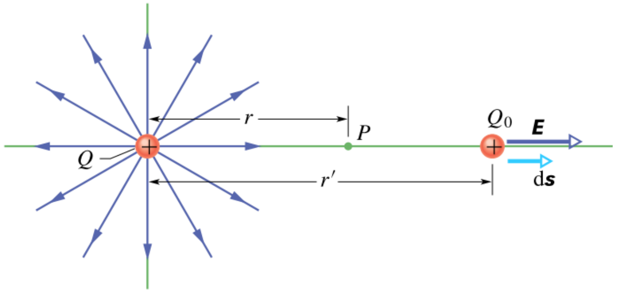
Elektrický potenciál a elektrická intenzita

$$\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = -\frac{W_E}{Q} = -\int_i^f \boldsymbol{E}.\boldsymbol{ds}$$

Elektrická intenzita pole bodového náboje

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Potenciál el. pole bodového náboje



Pp. bod P ve vzdálenosti *r* od pevného kladného bodového náboje *Q* .
Kladně nabitá testovací částice Q_0 se pohybuje z bodu P do nekonečna.

použijeme trajektorii ***ds*** = ***dr’***

$$\varphi = \varphi_\infty - \varphi_r = -\int_r^\infty \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dr'} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{r'^3}\boldsymbol{r'}.\boldsymbol{dr'} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{r'^2}dr'$$

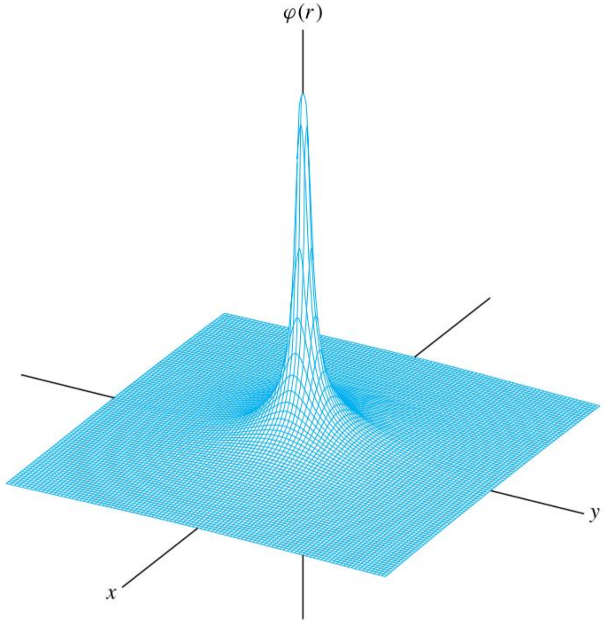
Elektrický potenciál a elektrická intenzita

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{r'^2}dr' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r'}\right]_r^\infty = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

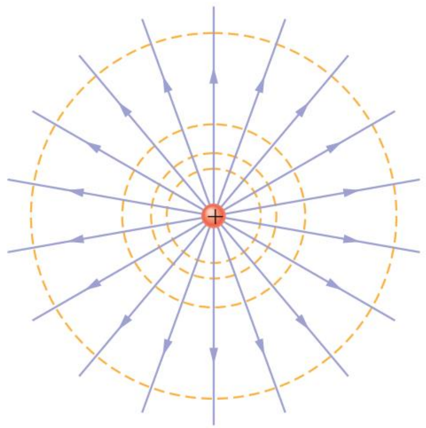
Potenciál pole bodového náboje

Zvolíme: $\varphi(\infty) = \mathbf{0}$

Tvar potenciálu bodového náboje



El. siločáry a ekvipotenciální plochy



- El. potenciál je skalární pole.

Elektrický potenciál a elektrická intenzita

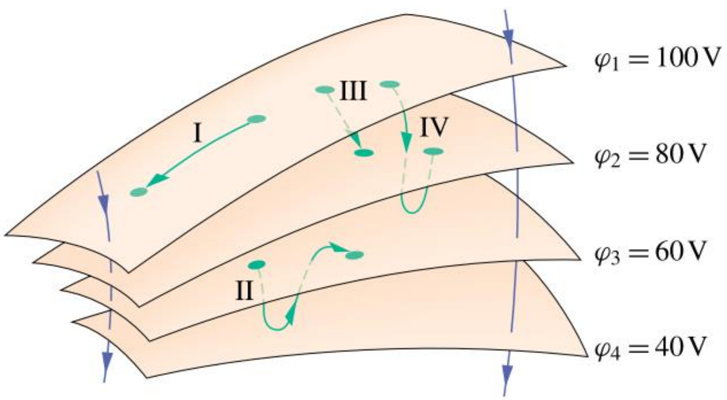
$$\varphi = \varphi_f - \varphi_i = -\int_i^f \boldsymbol{E}.\boldsymbol{ds}$$

Potenciál se udává vzhledem k referenční hodnotě.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\, \varphi(\boldsymbol{r})$$

$$\mathbf{grad}\ \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

Elektrostatické pole je charakterizováno vektorovým polem $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ anebo skalárním polem $\varphi(\boldsymbol{r})$

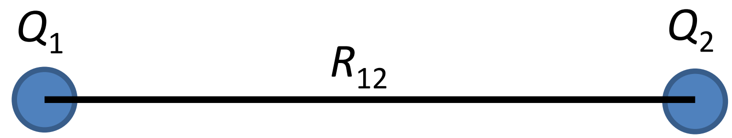


Při posunutí nabité částice po ekvipotenciální ploše nekonají elektrické síly práci.

$\Rightarrow$ ***E*** musí být v každém bodě ekvipotenciální plochy k ní kolmý.

Energie pole bodových nábojů

Pro dva náboje:



$$\boldsymbol{W_{V12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} = Q_1\varphi_1 = Q_2\varphi_2$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_{12}} \qquad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_{12}}$$

Potenciál v místě 1, resp. v místě 2

Pro více nábojů:

$$\boldsymbol{W_{Vj}} = Q_j\varphi_j \qquad \varphi_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{Q_i}{R_{ij}}$$

Práce vnější síly potřebná pro umístění j-tého náboje.

Potenciál na základě principu superpozice

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} Q_j\varphi_j$$

Celková energie pole

Matematické důsledky

Práce el. síly po uzavřené křivce $$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl} = \mathbf{0}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl} = \int_S \mathbf{rot}\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS}$$

Podle Stokesovy věty vektorové analýzy

Integrace přes libovolnou plochu uzavřenou křivku

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$$

Musí platit, protože se integruje přes lib. plochu.

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{rot\,grad}\,\boldsymbol{\varphi} \equiv 0$$

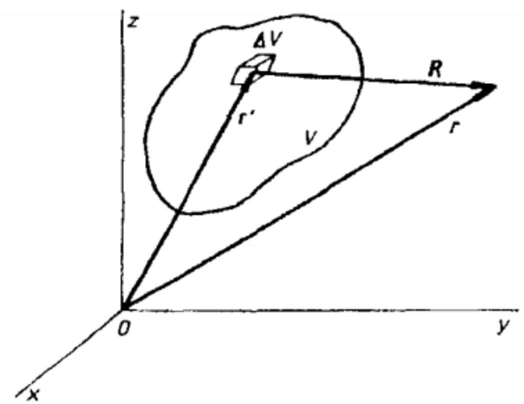
Též musí platit tato identita.

- Tyto vzorce souvisí s existencí potenciálu.
- Elektrostatické pole je potenciální a konzervativní.

Elektrostatické pole obecně rozložených nábojů

Objemová hustota náboje v bodě: $\rho(\boldsymbol{r}')$

$$\Delta Q = \rho(\boldsymbol{r}')\Delta V$$



Výpočet el. pole mimo objem *V*:

$$\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q}{R^3}\boldsymbol{R} \qquad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \qquad R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$$

$$\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\Delta V}{R^3}\boldsymbol{R}$$

Analogicky pro poteciál:

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\Delta V}{R}$$

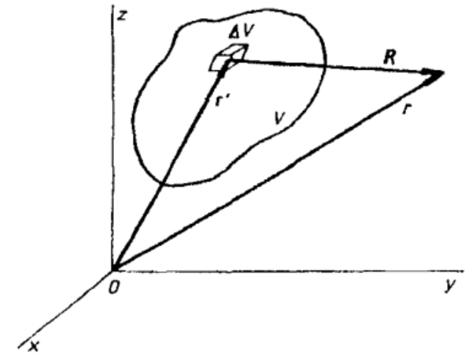
Celková intenzita a potenciál

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R^3}\boldsymbol{R}\,dV \qquad \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}\,dV$$

Elektrostatické pole obecně rozložených nábojů

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R^3}\boldsymbol{R}\,dV$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}\,dV$$



Pp. že objemová a plošná hustota náboje uvnitř V jsou konečné a dostatečně hladké. Z teorie vyplývá:

Obecné vlastnosti pole prostorově rozložených nábojů

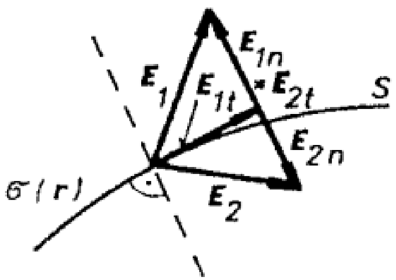
- Výraz pro **potenciál** platí **pro všechny body prostoru** (včetně *V*) a potenciál je konečný.
- **Potenciál** je všude **spojitý** a má **parciální derivace** alespoň **prvního řádu**.
- ***E***=-gradφ platí **ve všech bodech prostoru**, i uvnitř *V.*
- Intenzita pole ***E*** je všude **spojitá**.

Elektrostatické pole obecně rozložených nábojů

Obecné vlastnosti pole plošně rozložených nábojů

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{R^3}\boldsymbol{R}\,dS$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{R}\,dV$$



- Výraz pro **potenciál platí pro všechny body prostoru** (včetně *S*) a potenciál je **konečný**.
- P**otenciál je všude spojitý** a má **parciální derivace** alespoň prvního řádu ve **všech bodech s výjimkou plochy *S*.**
- ***E*** = -gradφ platí ve **všech bodech prostoru s výjimkou plochy *S***. Na této ploše nemá ***E*** smysl.
- Intenzita pole ***E*** je **všude spojitá s výjimkou plochy *S***. Při průchodu pole touto plochou zůstávají spojité pouze tečné složky. Normálové složky se skokově mění.

$$\mathbf{Rot}\boldsymbol{E} = E_{1t} - E_{2t} = 0 \qquad \mathbf{Div}\boldsymbol{E} = E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Gaussův zákon pro obecné elektrostatické pole

Budiž S uzavřená plocha, která ohraničuje objem V.
(kladná normála plochy míří ven z objemu V)
Uvnitř plochy je uzavřený náboj $\boldsymbol{Q}_c$, který může být tvořen jak bodovými náboji, tak náboji spojitě rozloženými libovolným způsobem.

$$\exists \quad \emptyset = \oint_S \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS} \Rightarrow \emptyset = \frac{Q_C}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint_S \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS} = \frac{Q_C}{\varepsilon_0}$$

Gaussův zákon v integrálním tvaru

- Pokud máme pouze objemově rozložené náboje:

$$Q_C = \int_V \rho(\boldsymbol{r})dV \quad \Rightarrow \quad \oint_S \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$\Leftarrow \quad \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}}$$

Gaussův zákon v diferenciálním tvaru

Gaussův zákon pro obecné elektrostatické pole

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}}$$

Gaussův zákon v diferenciálním tvaru

- Náboje jsou zdrojem siločar - je-li $\rho > 0 \Rightarrow \mathrm{div}E > 0$, siločáry z místa vycházejí
- Je-li $\rho < 0 \Rightarrow \mathrm{div}E < 0$, siločáry do místa vchází
- Je-li $\rho = 0 \Rightarrow \mathrm{div}E = 0$, tj. nelze zajistit, aby do místa vcházely všechny okolní siločáry

- Earnshaw:

Nelze elektrický náboj udržovat v prostoru ve stabilní rovnováze pouze silami elektrického pole.

Poissonova a Laplaceova rovnice

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\mathbf{rot}\boldsymbol{E} = 0}$$

- To je soustava 4 rovnic - 1 skalární a 1 vektorová (3 složky)

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Poissonova rovnice

pokud ρ = 0:

$$\boxed{\Delta\varphi = 0}$$

Laplaceova rovnice

- Obecná diferenciální rovnice pro nalezení průběhu potenciálu el.-stat. pole.
- Nutno dodat okrajové podmínky.

Energie obecného elekrostatického pole

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} Q_j \varphi_j$$

Energie pole bodových nábojů

Zobecnění:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})dV$$

Integrace přes celý prostor

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

dosazení z Poissonovy rovnice

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varphi\Delta\varphi dV = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left[-\int_V |\mathbf{grad}\varphi|^2 dV + \oint_S \varphi\mathbf{grad}\varphi\, dS\right]$$

druhý člen lze zanedbat

$$\oint_S \varphi\mathbf{grad}\varphi\, dS \to 0\; pro\; S \to \infty$$

Energie obecného elektrostatického pole

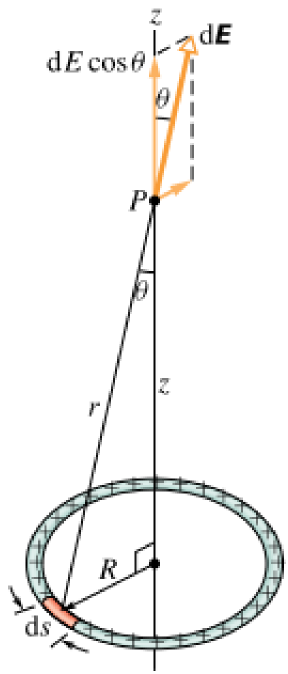
$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V |\mathbf{grad}\varphi|^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V |\boldsymbol{E}|^2 dV}$$

zanedbání druhého členu a dosazení za φ

$$\boxed{w_e = \frac{\varepsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}|^2}$$

Objemová hustota energie elektrického pole

Příklad 1



Tenký nevodivý prstenec o poloměru R s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem o délkové hustotě τ. Jaká je intenzita E elektrického pole v bodě P

$$dQ = \tau\, ds$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, ds}{r^2}.$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, ds}{(z^2+R^2)}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$

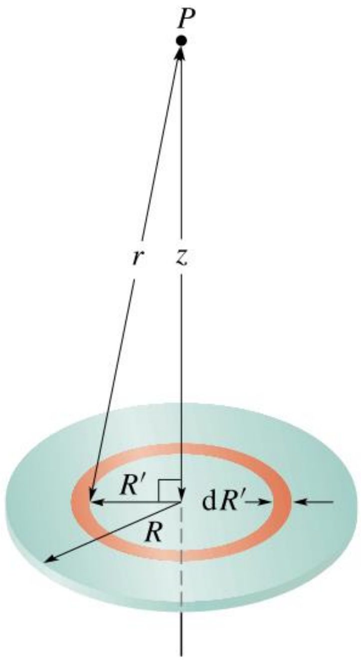
$$dE\cos\theta = \frac{z\tau}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\, ds$$

$$E = \int dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\tau}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} ds =$$

$$= \frac{z\tau(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}. \qquad (23.15)$$

$$\boxed{E = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}}$$

Příklad 2



Kruhový ebonitový disk o poloměru R, který má na svém horním povrchu rovnoměrně rozložený kladný náboj o plošné hustotě σ.
Jaká je elektrická intenzita v bodě P?

Pole prstence:

$$\mathrm{d}Q = \sigma(2\pi R')(\mathrm{d}R')$$

$$dE = \frac{z\sigma 2\pi R' dR'}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \frac{2R' dR'}{\left(z^2 + R'^2\right)^{3/2}}$$

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \int_0^R \left(z^2 + R'^2\right)^{-3/2} 2R' dR'$$

Integrál převedeme na tvar $\int X^m \,\mathrm{d}X$ substitucí $X = (z^2 + +R'^2)$, $m = -\frac{3}{2}$ a $\mathrm{d}X = 2R' dR'$ Pro upravený integrál máme

$$\int X^m \,\mathrm{d}X = \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

a z rov. (23.23) dostáváme

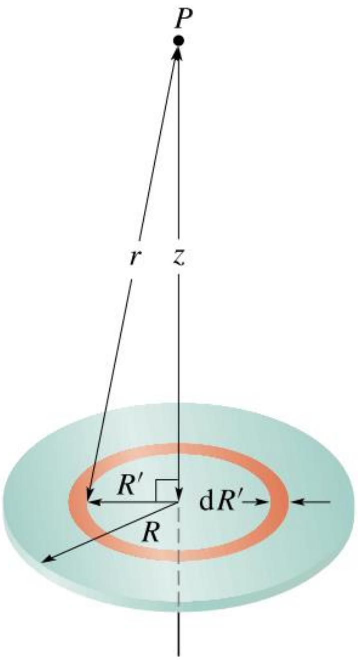
$$E = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \left[\frac{1}{2\left(z^2 + R'^2\right)^{1/2}} \right]_0^R$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

Nekonečná vrstva:

$$R \to \infty \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Příklad 2



Kruhový ebonitový disk o poloměru R, který má na svém horním povrchu rovnoměrně rozložený kladný náboj o plošné hustotě σ.

Jaký je **potenciál elektrického pole** v bodě P?

Pole prstence:

$$dQ = \sigma(2\pi R')(dR')$$

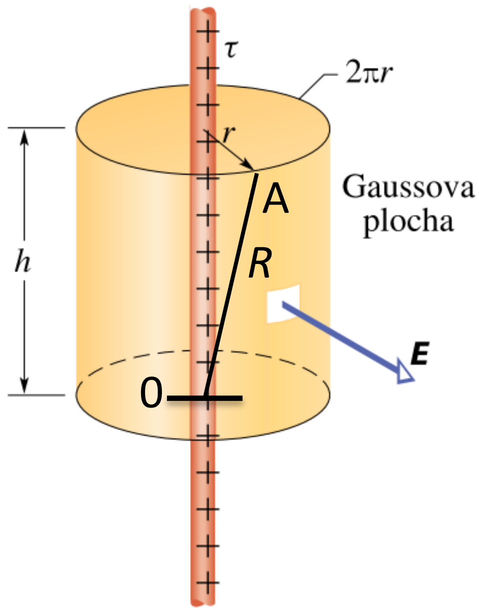
$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(2\pi R')(dR')}{\sqrt{z^2 + R'^2}}$$

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \left(z^2 + R'^2\right)^{-1/2} R' dR'$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

Elektrické pole okolo nabité nevodivé tyče



Hustota náboje τ.

Podle G. z. (tok pláštěm):

$$\Phi_E = ES\cos 0 = E(2\pi rh)$$

$$Q = \tau h$$

$$\varepsilon_0 E(2\pi rh) = \tau h$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{(nabité vlákno)}$$

Vektor ***E*** směřuje radiálně od vlákna.

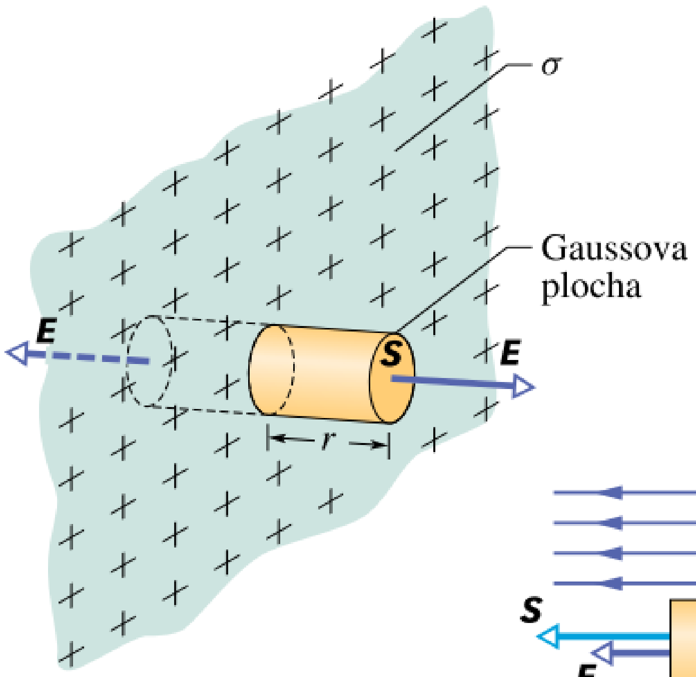
Alternativní výpočet

$$E_{rad} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r}{R}\frac{1}{R^2}dh = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r}{(r^2+h^2)^{3/2}}dh = \left[\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{h}{r(r^2+h^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Potenciál

$$\varphi = -\int \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dr} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r}dr = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + c$$

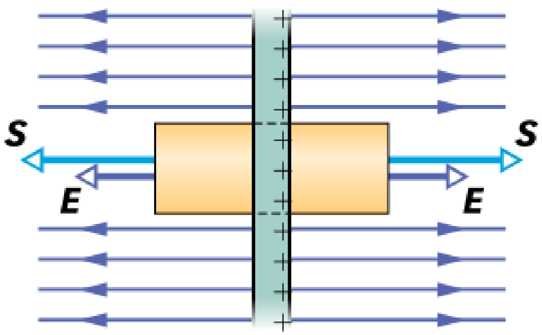
Elektrické pole nevodivé nabité vrstvy



(a)

Tenká, nekonečně velká nevodivá vrstva, na níž je rovnoměrně rozložen kladný náboj s plošnou hustotou σ.

- Ze symetrie: ***E*** je kolmá k rovině vrstvy.



Podle G. z. (tok podstavami):

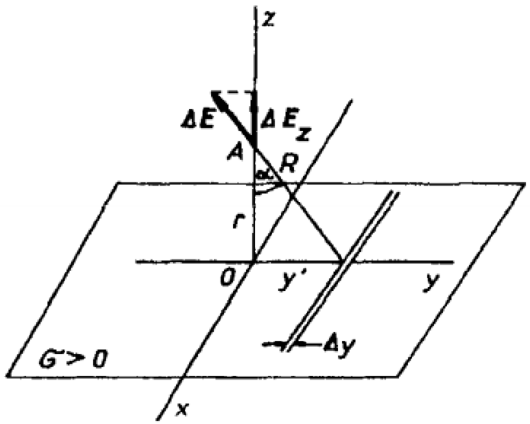
$$\varepsilon_0(ES + ES) = \sigma S$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \text{(nabitá plocha)}$$

Homogenní pole ***E***.

Alternativní výpočet: využijeme pole přímky z minulého příkladu

Elektrické pole nevodivé nabité vrstvy



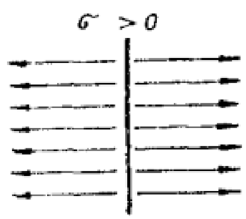
$$\Delta E_z = \frac{\sigma\,\Delta y'}{2\pi\varepsilon_0 R}\cos\alpha = \frac{\sigma\, r\,\Delta y'}{2\pi\varepsilon_0\left(r^2 + y'^2\right)}.$$

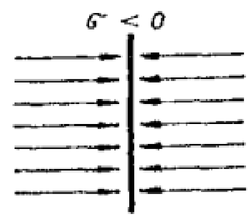
$$E_z = \frac{\sigma\, r}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y'}{r^2 + y'^2} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left[\operatorname{arctg}\frac{y'}{r}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

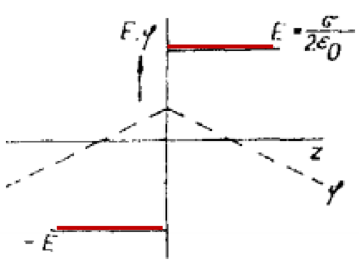
Potenciál:

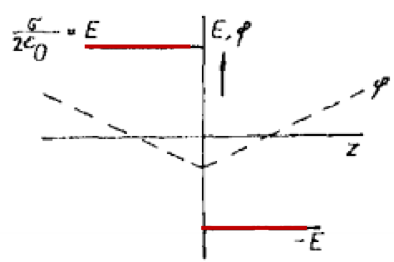
$$\varphi = -\int E(r)\,\mathrm{d}r = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}r + C$$

Průběh ***E*** a φ





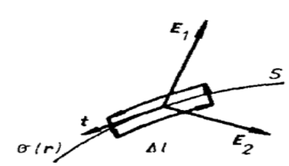




E má na rovině nespojitost

$$\boxed{\mathrm{Div}\,\boldsymbol{E} = E_{1\mathrm{n}} - E_{2\mathrm{n}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.}$$

$$\boxed{\mathrm{Rot}\,\boldsymbol{E} = E_{1t} - E_{2t} = 0}$$



tečné složky:
z cirkulace po uzavřené dráze

Srovnání elektrického pole bodu, přímky, roviny

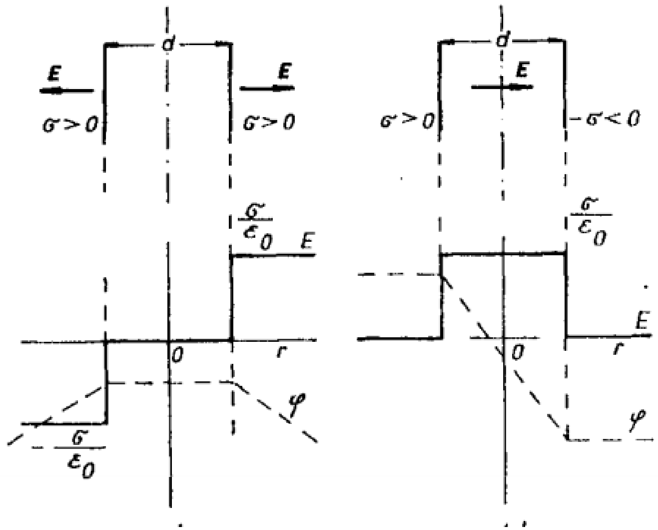
bod: $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + C\,,$$

přímka: $$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}, \qquad \varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C\,,$$

rovina: $$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma\,, \qquad \varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r + C$$

Elektrické pole dvou nabitých rovnoběžných rovin

Superpozice:



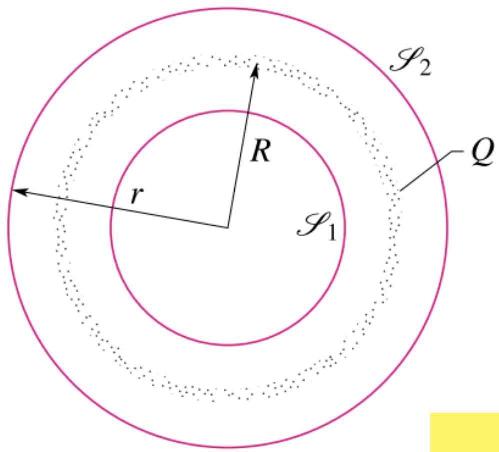
Homogenní pole mezi deskami s opačným nábojem.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = E\, d$$

$$\varphi(r) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} r + C$$

Nabitá kulová slupka



Řez tenkou kulovou vrstvou, nesoucí rovnoměrně rozložený náboj Q, a dvěma Gaussovými plochami $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$.
Plocha $\mathcal{S}_2$ obklopuje kulovou vrstvu, plocha $\mathcal{S}_1$ obklopuje pouze prázdný prostor uvnitř vrstvy.

$$Q = 4\pi r^2 \sigma$$

Podle G. z. pro $\mathcal{S}_2$:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{(pole kulové vrstvy ve vzdálenosti } r > R\text{)}$$

- Elektrické pole pro r > R je stejné jako v případě, že by vrstva byla nahrazena bodovým nábojem *Q* ležícím v jejím středu.

Podle G. z. pro $\mathcal{S}_1$:

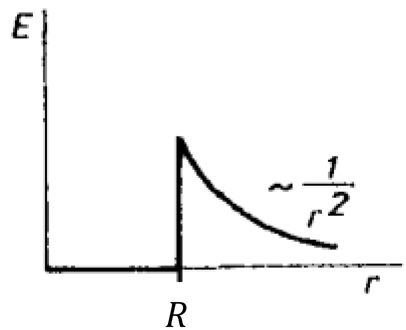
$$E = 0 \quad \text{(pole kulové vrstvy ve vzdálenosti } r < R\text{)}$$

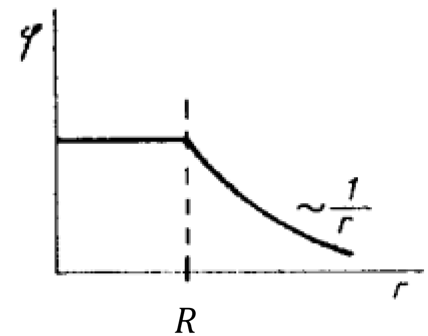
- Elektrické pole pro r < R je nulové.

Nabitá kulová slupka

Potenciál pro $\mathscr{S}_2$: $$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + c$$

$$\lim_{r\to\infty} \varphi = 0 \qquad\qquad c = 0$$





- Průběh E (kvalitativně):
uvnitř koule je nulová,
vně kvadraticky klesá

- Průběh φ (kvalitativně):
uvnitř koule je konstantní,
vně klesá jako hyperbola

Nabitá koule

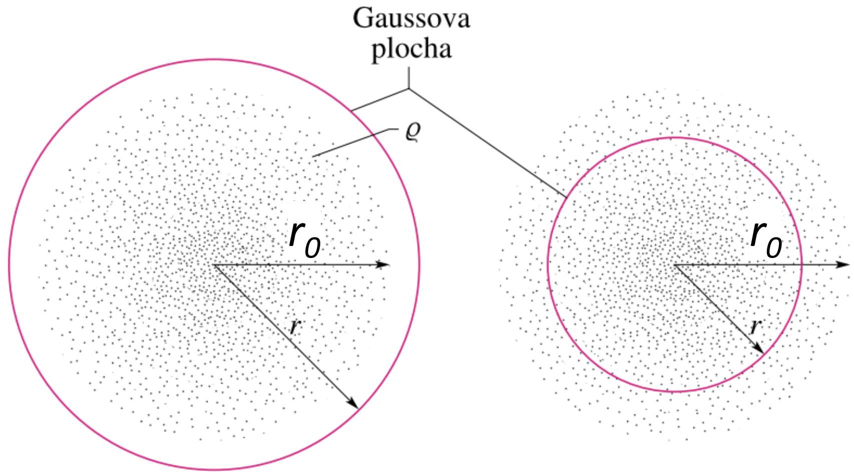
- Pp. homogenní rozložení náboje

$$Q = 4/3\pi r_0^3 \rho$$

- Gaussova plocha o poloměru $r < r_0$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} 4/3\pi r^3 \rho$$

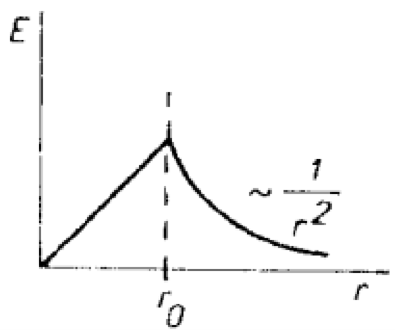
$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r_0^3} r$$



$$\varphi = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + c$$

Požadavek na spojitost pro $r = r_0$:

$$\varphi = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} r_0^2 \left(3 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r_0} \left(3 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$$



- Průběh *E* (kvalitativně): uvnitř lineárně roste, vně kvadraticky klesá