3 Funkce komplexní proměnné

3.1 Holomorfní funkce

Opakování, značení

$\mathbb{C}$ - komplexní rovina
$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy \ldots$ algebraický tvar z,
$x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$
$z \in \mathbb{C} \implies z = |z|(\underbrace{\cos\varphi + i\sin\varphi}_{e^{i\varphi}}) \ldots$ goniometrický tvar z
$z \in \mathbb{C} \implies z = |z|e^{i\varphi} \ldots$ exponenciání tvar z

$\varphi \ldots$ **argument** z $(\arg z)$ (není určen jednoznačně!)

$z = x + iy \implies \overline{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

Moivreova věta: $\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n}_{(e^{i\varphi})^n} = \underbrace{\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}_{e^{in\varphi}}$

$\implies |z^n| = |(|z|e^{i\varphi})^n| = |z|^n \underbrace{|e^{in\varphi}|}_{=1} = |z|^n$

$|e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| = e^{\operatorname{Re} z}$

Rozšířená komplexní rovina ≡ sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \to \infty \iff |z_n| \to +\infty, \quad z_n \to \infty \iff 1/z_n \to 0$
- $z_n = x_n + iy_n \to a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \to a \ \& \ y_n \to b$

Pozor na zásadní rozdíl:

Komplexní funkce **reálné proměnné**, tj. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

- $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + i \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$
- $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x)$, $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + i\int f_2(x)\,\mathrm{d}x$

Komplexní funkce **komplexní proměnné**, tj. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

- $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$, $z = x + iy$, $f(z) \approx f_1(x, y) + if_2(x, y)$
- Jaký je vztah (například) mezi $f'(z)$ a $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$? A co integrál? $dz = d(x + iy)$?

(**Konec opakování**.)

Definice. Nechť pro $w \in \mathbb{C}$ je funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definována alespoň na nějakém okolí $\mathcal{U}^\delta(w) := \{z \in \mathbb{C}, |z - w| < \delta\}$. Pokud existuje (vlastní) limita

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = A \in \mathbb{C}\,, \tag{1}$$

říkáme, že f má v bodě w (komplexní) derivaci A. Značíme $\frac{df}{dz}(w)$ nebo $f'(w)$.

Pozn. Komplexní derivace je komplexní číslo. Nekonečnou derivaci nedefinujeme, v $\mathbb{C}$ uvažujeme pouze konečné derivace.

Věta 3.1 (Cauchy-Riemannovy (C-R) podmínky). • *Nechť existuje $f'(z)$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$. Potom v $z = [x, y]$ platí tzv. C-R podmínky:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,. \tag{2}$$

- *Buďte $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ funkce třídy $\mathcal{C}^1$ v bodě $[x, y]$, splňující v tomto bodě C-R podmínky* (2). *Potom funkce $f(z) := f_1(x, y) + if_2(x, y)$ má v bodě $z = x + iy$ komplexní derivaci a platí*

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,. \tag{3}$$

Definice. • Řeknu, že funkce komplexní proměnné f je **holomorfní** (říkáme též **analytická**) **v bodě** $z \in \mathbb{C}$, pokud existuje okolí $\mathcal{U}(z)$ bodu z takové, že f má komplexní derivaci pro všechna $w \in \mathcal{U}(z)$.

- Buď $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) v** Ω, pokud je f holomorfní v každém bodě Ω. V takovém případě píšeme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- Buď $M \subset \mathbb{C}$ jakákoli množina. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) na** M ($f \in \mathcal{H}(M)$), pokud existuje otevřená množina $\Omega \supset M$ taková, že $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- Je-li $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, říkáme, že f je **celá** funkce.

Lemma 3.2 (souvislost holomorfních a harmonických funkcí). • *Nechť $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z))$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$, $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$. Potom*

$$\Delta f_1 = 0\,, \quad \Delta f_2 = 0 \quad v\,\mathcal{U}(x,y),$$

tj. f_1 a f_2 jsou ***harmonické*** *v $\mathcal{U}(x, y)$.*

- *Nechť $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$, $\Delta f = 0$ v $\mathcal{U}(x, y)$. Potom existují funkce $g, h \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$ takové, že $\Delta g = 0 = \Delta h$ v $\mathcal{U}(x, y)$, přičemž funkce $f + ig, h + if \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z))$, $z = x + iy$.*

3.2 Křivkový integrál a primitivní funkce

Definice. Cestou nebo též **po částech hladkou křivkou** v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$, pro které existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, přičemž pro každé $j = 1, \ldots, n$ je funkce φ třídy $\mathcal{C}^1$ na $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$.

Poznámka. Podobně jako v definici křivky v $\mathbb{R}^n$ definujeme pojmy **geometrický obraz křivky** $\langle\varphi\rangle$, **počáteční bod křivky** $\varphi(a)$, **koncový bod křivky** $\varphi(b)$, **uzavřená křivka** ($\varphi(a) = \varphi(b)$), **opačná křivka** $\ominus\varphi$, **součet křivek** $\varphi \oplus \psi$.

Příklad 1. ***Kladně orientovanou kružnicí o středu*** w ***a poloměru*** r *nazýváme křivku $\varphi(t) = w + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.* ***Orientovanou úsečkou*** *$\langle w, z\rangle$, $w, z \in \mathbb{C}$, nazýváme křivku $\varphi(t) = w + t(z - w)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$.*

Definice. Řetězcem v $\mathbb{C}$ nazýváme výraz tvaru $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n$, kde φ_j, $j = 1, \ldots, n$, jsou cesty v $\mathbb{C}$. Jsou-li všechny cesty φ_j, $j = 1, \ldots, n$ uzavřené, nazýváme řetězec $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n$ **cyklem** v $\mathbb{C}$.

Definice (křivkový integrál v $\mathbb{C}$). Je-li φ cesta v $\mathbb{C}$ a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **(křivkový) integrál funkce** f **podél** φ předpisem

$$\int_\varphi f = \int_\varphi f(z)\,dz := \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt, \tag{4}$$

pokud integrál vpravo existuje (např. jako Lebesgueův). Pro řetězec resp. cykl definujeme křivkový integrál jako součet integrálů přes jednotlivé cesty, které řetězec resp. cykl tvoří, má-li tento součet smysl.

Poznámka.

- Je-li φ cesta v $\mathbb{C}$, je $L(\varphi) := \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt$ číselně rovna její délce.
- Hodnota křivkového integrálu v $\mathbb{C}$ je komplexní číslo. Je-li φ cesta v $\mathbb{C}$, a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, platí
$$\Big|\int_\varphi f\Big| \le L(\varphi) \cdot \max_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|\,.$$
- Jsou-li níže uvedené integrály definovány, platí:
$$\int_{\ominus\varphi} f = -\int_\varphi f\,, \qquad \int_{\varphi\oplus\psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi f\,.$$

Definice. Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená množina a $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Funkci $F : G \to \mathbb{C}$ nazvu **primitivní funkcí k** f **na** G, pokud platí $F'(z) = f(z)$ pro všechna $z \in G$. (Zde F' značí komplexní derivaci F).

Lemma 3.3. *Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená množina, $f : G \to \mathbb{C}$ spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G, pak pro každou cestu $\varphi : \langle a, b\rangle \to G$ platí*
$$\int_\varphi f = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big)\,.$$
Speciálně, je-li φ uzavřená cesta (resp. cykl), je $\int_\varphi f = 0$.

Věta 3.4 (primitivní funkce a křivkový integrál)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast v $\mathbb{C}$ a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- *Existuje primitivní funkce k f **v celé** oblasti Ω.*
- *Křivkový integrál z f v Ω **nezávisí na cestě**, tj. kdykoli jsou $\varphi : \langle a, b\rangle \to \Omega$ a $\psi : \langle c, d\rangle \to \Omega$ dvě cesty takové, že $\varphi(a) = \psi(c)$, $\varphi(b) = \psi(d)$, pak $\int_\varphi f = \int_\psi f$.*
- *Pro každou uzavřenou cestu φ v Ω je $\int_\varphi f = 0$.*

3.3 Cauchyova věta a Cauchyův vzorec

Definice. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{C}$ je **hvězdovitá**, pokud existuje takový bod $z \in M$, že pro každé $w \in M$ je úsečka $\langle z, w\rangle$ obsažena celá v M.

Věta 3.5 (Cauchyova věta (pro hvězdovitou množinu))**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina a φ uzavřená cesta v Ω. Je-li $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pak $\int_\varphi f = 0$, a tedy f má primitivní funkci v Ω.*

Věta 3.6 (Cauchyův vzorec)**.** *Buď $K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ kruh v komplexní rovině a označme $\gamma_{z_0,r}(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ jeho kladně orientovaný obvod. Nechť $f \in \mathcal{H}(\overline{K_r(z_0)})$ (tj. je holomorfní na otevřeném okolí tohoto kruhu). Potom f má v $K_r(z_0)$ derivace všech řádů, a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $z \in K_r(z_0)$ platí*
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw\,. \tag{5}$$

3.4 Taylorovy a Laurentovy řady

Věta 3.7 (mocninná řada v $\mathbb{C}$)**.** *Buďte $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \ldots$. Potom existuje $R \in \langle 0, +\infty\rangle$ takové, že komplexní mocninná řada $\sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$*

- *absolutně konverguje **k holomorfní funkci** f uvnitř kruhu $K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\}$;*
- *diverguje vně kruhu $K_R(z_0)$.*

Přitom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *lze uvnitř* $K_R(z_0)$ *libovolněkrát derivovat člen po členu a platí*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k} \quad \text{v } K_R(z_0).$$

Věta 3.8 (Taylorova řada v $\mathbb{C}$)**.** *Buď* $f \in \mathcal{H}(K_R(z_0))$ *pro* $R > 0$*. Potom existují* $a_n \in \mathbb{C}$*, že*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad z \in K_R(z_0), \tag{6}$$

přičemž řada v (6) *absolutně konverguje v* $K_R(z_0)$*. Navíc je*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

a tedy řada (6) *je Taylorovou řadou funkce* f *na kruhu* $K_R(z_0)$*.*

Definice.

- Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n = -1, -2, \ldots$, definujme

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{-1} a_n(z-z_0)^n$$

  pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro které existuje limita vpravo.

- Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, definujme **zobecněnou mocninnou řadu**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

  pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro které má součet vpravo smysl.

Definice. Buďte $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, a buď $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ zobecněná mocninná řada. Řadu $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ nazýváme **hlavní část**, a řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ nazýváme **regulární část** zobecněné mocninné řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Věta 3.9 (zobecněná mocninná řada v $\mathbb{C}$)**.** *Buďte* $z, z_0 \in \mathbb{C}$*,* $a_n \in \mathbb{C}$*,* $n \in \mathbb{Z}$*. Potom existují* $r, R \in \langle 0, +\infty\rangle$*, taková, že zobecněná mocninná řada* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

- *absolutně konverguje* ***k holomorfní funkci*** f *uvnitř mezikruží* $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, r < |z-z_0| < R\}$*;*
- *diverguje vně mezikruží* $K_{r,R}(z_0)$*.*

Přitom řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *lze uvnitř mezikruží* $K_{r,R}(z_0)$ *libovolněkrát derivovat člen po členu a platí*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k} \quad \text{v } K_{r,R}(z_0).$$

Věta 3.10 (Laurentova řada v $\mathbb{C}$)**.** *Buď* $f \in \mathcal{H}(K_{r,R}(z_0))$ *pro* $R > r > 0$*. Potom existují* $a_n \in \mathbb{C}$*, že*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad z \in K_{r,R}(z_0), \tag{8}$$

přičemž řada vpravo absolutně konverguje v mezikruží $K_{r,R}(z_0)$*. Navíc je*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0,\varrho}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

kde $\gamma_{z_0,\varrho}(t) = z_0 + \varrho e^{it}$*,* $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ *je obvod kruhu o poloměru* $\varrho \in (r, R)$*. Řadu* (8) *nazýváme* ***Laurentovou*** *řadou funkce* f *na mezikruží* $K_{r,R}(z_0)$*.*

Poznámka. Porovnáním Cauchyova vzorce (5) pro z_0 a $\gamma_{z_0,\varrho}$, tj.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,\varrho}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw\,, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

a vzorce pro Laurentovy koeficienty (9). tj.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,\varrho}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw\,, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dostaneme

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}\,, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Poznámka. Speciálním případem mezikruží je prstencové okolí bodu: $\mathcal{P}^r(a) = K_{0,r}(a) = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z-a| < r\}$. Je-li tedy $f \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(a))$, lze ji podle předchozí věty rozvinout do Laurentovy řady na $\mathcal{P}(a)$. Této situaci tzv. izolované singularity se budeme věnovat v následujícím paragrafu podrobněji.

3.5 Izolované singularity, rezidua, reziduová věta

Definice. Bod $a \in \mathbb{C}$ nazvu **izolovanou singularitou** funkce f, pokud $f \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(a))$.

Definice. Izolovanou singularitu $a \in \mathbb{C}$ funkce f nazvu

- **odstranitelnou singularitou**, pokud existuje $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;
- **pólem**, pokud existuje $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$;
- **podstatnou singularitou**, pokud neexistuje $\lim_{z\to a} f(z)$.

Věta 3.11 (o odstranitelné singularitě)**.** *Buď $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f. Potom následující je ekvivalentní:*

1. *$a \in \mathbb{C}$ je* ***odstranitelnou singularitou*** *funkce f;*
2. *f je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$;*
3. *f lze spojitě dodefinovat v bodě $a \in \mathbb{C}$ (limitou), a poté je f holomorní v a;*
4. *Laurentova řada funkce f v $\mathcal{P}(a)$ má prázdnou hlavní část, je to tedy Taylorova řada, tj. pro $z \in \mathcal{U}(a)$ lze psát*
$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots\,.$$

Věta 3.12 (o pólech)**.** *Buď $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f. Potom následující je ekvivalentní:*

1. *$a \in \mathbb{C}$ je* ***pólem*** *funkce f;*
2. *existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^n \in \mathbb{C}$, a přitom $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^{n-1} = \infty$;*
3. *je-li Laurentova řada funkce f v $\mathcal{P}(a)$ s koeficienty a_k, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{-n} \neq 0$ a přitom $a_{-k} = 0$ pro všechna $k > n$. Hlavní čast této Laurentovy řady má tedy jen konečný počet nenulových členů, tj. pro $z \in \mathcal{P}(a)$ lze psát*
$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots\,.$$

Poznámka. • Hodnota čísla $n \in \mathbb{N}$ z druhého o třetího bodu předchozí věty je tatáž — tj. je-li $n \in \mathbb{N}$, pro který je (jako v bodu 2) $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^n \in \mathbb{C}$, a přitom $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^{n-1} = \infty$, pak a_{-n} je i (jako v bodu 3) "poslední nenulový koeficient v hlavní části Laurentovy řady f v $\mathcal{P}(a)$", a naopak.

- V této situaci říkáme, že f má v a **pól násobnosti** n.
- Předchozí věta tedy mimo jiné říká, že **každý pól má nějakou násobnost**.

Věta 3.13 (o podstatné singularitě)**.** *Buď $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f. Potom následující je ekvivalentní:*

1. *$a \in \mathbb{C}$ je **podstatnou singularitou** funkce f;*
2. *pro všechna $w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existuje posloupnost $z_n \to a$ taková, že $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$;*
3. *je-li Laurentova řada funkce f v $\mathcal{P}(a)$ s koeficienty a_k, pak její hlavní část obsahuje nekonečně mnoho nenulových členů, tj. pro $z \in \mathcal{P}(a)$ lze psát*

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots .$$

Poznámka. Implikace "(1) $\implies$ (2)" z předchozí věty se nazývá **věta Casorati-Weierstrassova**.

Definice (reziduum)**.** Buď $a \in \mathbb{C}$ izolovaná singularita funkce f, a buď

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{10}$$

rozvoj f do Laurentovy řady na $\mathcal{P}(a)$. Koeficient a_{-1} této řady nazveme **reziduem funkce f v bodě** a, píšeme

$$\operatorname{Res}_a f(z)\,. \tag{11}$$

Věta 3.14 (pravidla pro výpočet reziduí)**.** 1. *Je-li a odstranitelnou singularitou f, je* $\boxed{\operatorname{Res}_a f(z) = 0.}$

2. *Má-li f v a pól násobnosti 1, a g je holomorfní v a, je* $\boxed{\operatorname{Res}_a (f(z)g(z)) = g(a) \operatorname{Res}_a f(z).}$
3. *Jsou-li f i g holomorfní v a, $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, pak*

$$\boxed{\operatorname{Res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}\,.}$$

4. *Má-li f v a pól násobnosti $k \in \mathbb{N}$, je*

$$\boxed{\operatorname{Res}_a f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \Big(f(z)(z-a)^k\Big)^{(k-1)}\,.}$$

Věta 3.15 (reziduová věta)**.** *Buď φ jednoduchá uzavřená křivka v $\mathbb{C}$, která je orientována kladně vůči svému vnitřku* $\operatorname{Int}\varphi$*. Buď $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast obsahující* $\operatorname{Int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle$*. Nechť přitom $\{z_1, \ldots, z_n\} \cap \langle\varphi\rangle = \emptyset$. Potom*

$$\boxed{\int_\varphi f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \operatorname{Int}\varphi} \operatorname{Res}_{z_k} f(z)\,.} \tag{12}$$

Pozn. Křivka je orientovaná kladně vůči $\operatorname{Int}\varphi$, pokud při "pohybu po křivce" leží oblast $\operatorname{Int}\varphi$ "po levé ruce". V případě opačně orientované křivky je před sumou na pravé straně (12) znaménko minus.

Reziduová věta je jedním z velmi silných prostředků pro výpočet mnoha typů reálných určitých integrálů. Viz bonusový materiál "Použití reziduové věty k výpočtům".

Pro výpočty pomocí reziduové věty se hodí následující dvě lemmata.

Lemma 3.16 (lemma o velkých obloucích, Jordanovo lemma)**.** *Nechť $0 \le \alpha < \beta \le \pi$, a nechť $f \in \mathcal{C}(A_R)$, kde $A_R := \{z \in \mathbb{C};\ \arg z \in \langle \alpha, \beta \rangle,\ |z| \ge R\}$ pro nějaké $R > 0$. Nechť dále platí $\lim_{A_R \ni z \to \infty} f(z) = 0$. Je-li $\varphi_r(t) := re^{it}$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, oblouk kružnice o poloměru $r > 0$, pak*

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\varphi_r} f(z)\, e^{iz}\, dz = 0\,. \tag{13}$$

Lemma 3.17 (lemma o malých obloucích)**.** *Nechť $a \in \mathbb{C}$ a nechť f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu a, přičemž v bodě a má f nejvýše pól násobnosti 1. Nechť dále $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, a nechť $\varphi_r(t) := a + re^{it}$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, je oblouk kružnice o poloměru $r > 0$. Pak*

$$\lim_{r \to 0+} \int_{\varphi_r} f(z)\, dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{Res}_a f\,. \tag{14}$$

3.6 Věta o jednoznačnosti

Věta 3.18 (o jednoznačnosti)**.** *Buď $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Buď $A := \{z \in \Omega;\ f(z) = g(z)\}$. Pokud A má hromadný bod v Ω, je $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \Omega$.*

Důsledek 3.19. *Buď $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$. Buď $f = g$ na neprázdném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Potom $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$.*

Příklad 2 (goniometrické funkce v $\mathbb{C}$)**.**

- *Pro všechna $y \in \mathbb{R}$ je $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$. Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte) $\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh y$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$. Podobně $\sin(iy) = i \sinh y$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$.*
- *Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ je $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte) $\sin(x + w) = \sin x \cos w + \cos x \sin w$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$. Pro $w = iy$, $y \in \mathbb{R}$, dostaneme $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$. S využitím předchozího bodu dostaneme* $$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$ *a podobně* $$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)**.** *Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln|z| + i \arg z$. Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:*

$$\ln z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)\,, \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)**.**

- $\sqrt{-1} = \exp(\frac{1}{2}\ln(-1)) = \exp(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i) = \exp(i\frac{\pi}{2} + k\pi i) = i(-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $i^i = \exp(i \ln(i)) = \exp(i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i) = \exp(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $\sqrt[i]{i} = \exp(\frac{1}{i}\ln(i)) = \exp(\frac{1}{i}(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i) = \exp(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$