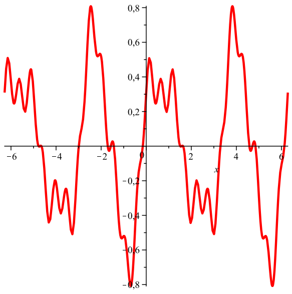
1 Fourierovy řady

1.1 Úvod, základní pojmy

• **Otázka J. Fouriera**: Lze každou periodickou funkci napsat jako součet nějakých "elementárních" periodických funkcí?

• Konkrétněji: lze každou 2π-periodickou funkci napsat jako součet "sinů a kosinů"?



$\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 12x + \frac{1}{7}\cos 5x$

• Škálování: $a_k \cos(kx)$, $b_k \sin(kx)$ $\Longrightarrow$ řada typu

$$c + \sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad c, a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

• Využití komplexní exponenciály: $\cos(kx) = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$, $\sin(kx) = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$ $\Longrightarrow$ řada typu

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

• p-periodicita místo 2π-periodicity: faktor $\frac{2\pi}{p}$.

Definice. • **Reálným trigonometrickým (p-periodickým) polynomem řádu** n rozumíme funkci tvaru

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right),$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $(k = 0, \dots, n)$, $p > 0$.

• **Komplexním trigonometrickým (p-periodickým) polynomem řádu** n rozumíme funkci tvaru

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{2\pi}{p}ikx},$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $(k = -n, \dots, n)$, $p > 0$.

Definice. • **Reálnou trigonometrickou (p-periodickou) řadou** rozumíme řadu funkcí

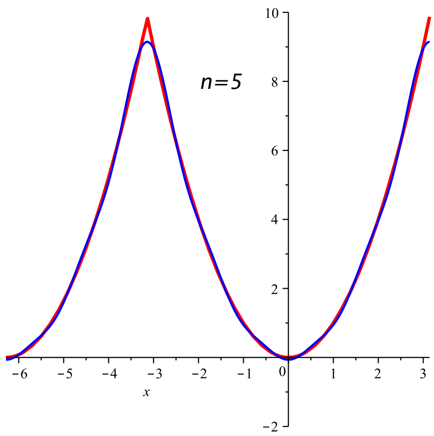
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right),$$

kde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $p > 0$.

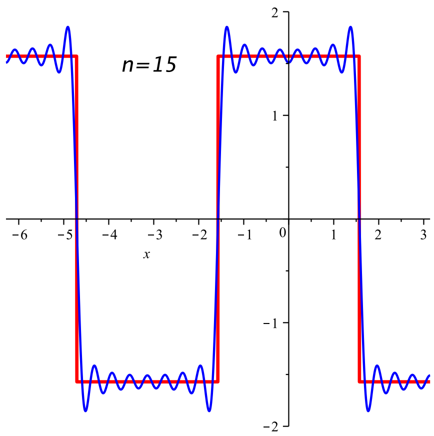
• **Komplexní trigonometrickou (p-periodickou) řadou** rozumíme řadu funkcí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi}{p}ikx},$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $p > 0$.



Obr.: Aproximace spojité, po částech hladké funkce, pomocí trigonometrického polynomu řádu n.



Obr.: Aproximace nespojité, po částech hladké funkce, pomocí trigonometrického polynomu řádu n.

Cvičení. Ukažte, že pokud pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p} kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p} kx\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{2\pi}{p} ikx},$$

kde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $p > 0$, pak

$$\begin{aligned}
a_k &= c_k + c_{-k}\,, & c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2}\,, \quad k \in \mathbb{N},\\
b_k &= i(c_k - c_{-k})\,, & c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2}\,, \quad k \in \mathbb{N},\\
a_0 &= 2c_0\,, & c_0 &= \frac{a_0}{2}\,.
\end{aligned}$$

Lemma 1.1. *Pro všechna $k, m \in \mathbb{N}$ a $p > 0$ platí:*

$$\begin{aligned}
\int_0^p \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) dx = \int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) dx &= 0\,,\\
\int_0^p \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}mx\right) dx &= 0\,,\\
\int_0^p \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) \sin\left(\frac{2\pi}{p}mx\right) dx &= \frac{p}{2}\delta_{km}\,,\\
\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}mx\right) dx &= \frac{p}{2}\delta_{km}\,,\\
k \in \mathbb{Z} \implies \int_0^p e^{\frac{2\pi}{p}ikx}\, dx &= p\delta_{k0}\,.
\end{aligned}$$

Věta 1.2. *Nechť $p > 0$ a nechť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right),$$

přičemž řadu vpravo je možno integrovat přes intervaly konečné délky člen po členu. Potom

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\, dx\,,\\
a_k &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) dx\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,\\
b_k &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) dx\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}$$

Věta 1.3. *Nechť $p > 0$ a nechť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi}{p}ikx},$$

přičemž řadu vpravo je možno integrovat přes intervaly konečné délky člen po členu. Potom

$$c_k = \frac{1}{p}\int_0^p f(x) e^{-\frac{2\pi}{p}ikx}\, dx\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

1.2 Bodová konvergence Fourierových řad

Označení.

(i) Buďte $-\infty \le a < b \le \infty$ a buď dále $q \ge 1$. Množinu všech funkcí (s hodnotami v $\mathbb{C}$), definovaných alespoň skoro všude na (a, b), pro které je

$$\|f\|_q := \left(\int_a^b |f(x)|^q\, \mathrm{d}x\right)^{1/q} < \infty,$$

označíme symbolem $L^q(a, b)$.

(ii) Buď $p > 0$. Množinu všech p-periodických funkcí, definovaných na $\mathbb{R}$, s hodnotami v $\mathbb{C}$, které jsou navíc prvky prostoru $L^1(0, p)$, budeme značit $\mathcal{P}_p$.

Lemma 1.4. *Nechť $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom*

$$\int_0^p f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+p} f(x)\,dx.$$

Definice (reálná Fourierova řada)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$. Definujeme čísla a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}$, pomocí vztahů z Věty 1.2. Tato čísla pak nazýváme **("reálnými") Fourierovými koeficienty** funkce f a řadu $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right)$ nazýváme **"reálnou" (sinově-kosinovou) Fourierovou řadou funkce** f. Jejím n**-tým částečným součtem** rozumíme součet

$$s_{f,n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definice (komplexní Fourierova řada)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$. Definujeme čísla c_k, $k \in \mathbb{Z}$, pomocí vztahů z Věty 1.3. Tato čísla pak nazýváme **(komplexními) Fourierovými koeficienty** funkce f a řadu $\sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{\frac{2\pi}{p}ikx}$ nazýváme **komplexní Fourierovou řadou funkce** f. Jejím n**-tým částečným součtem** rozumíme součet

$$s_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{\frac{2\pi}{p}ikx}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Definice. Buď $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$, $x \in \mathbb{R}$, a $s_{f,n}(x)$ buď n-tý částečný součet (reálné resp. komplexní) Fourierovy řady funkce f. Pokud existuje vlastní

$$\lim_{n\to\infty} s_{f,n}(x) =: F_f(x),$$

nazvu tuto hodnotu **součtem (reálné resp. komplexní) Fourierovy řady funkce** f v bodě $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 1.5. *Buď $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$.*

- *Je-li f **sudá** funkce, je $b_k = 0$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots$, a*

$$a_k = \frac{4}{p}\int_0^{p/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{p}kx\right)dx\,, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

- *Je-li f **lichá** funkce, je $a_k = 0$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, a*

$$b_k = \frac{4}{p}\int_0^{p/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{p}kx\right)dx\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Problém:

$$f \in \mathcal{P}_p \quad \rightsquigarrow \quad F_f \quad \rightsquigarrow \quad F_f(x) \stackrel{?}{=} f(x).$$

Příklad:

- $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ na $\langle 0, 2\pi)$ a dále 2π-periodicky ($f \in \mathcal{P}_{2\pi}$)
- $F_f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{sin(kx)}{k}$ konverguje bodově $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $F_f(0) = 0$.

Studované otázky:

- Vlastnosti Fourierových koeficientů v závislosti na vlastnostech f.

- Rovnost f a F_f v závislosti na vlastnostech f.

Věta 1.6 (Riemann-Lebesgueovo lemma). *Nechť $f \in \mathcal{P}_p$ pro $p > 0$. Potom Fourierovy koeficienty a_k, b_k, resp. c_k existují a jsou konečné $\forall k \in \mathbb{N}$ resp. $\mathbb{Z}$. Navíc platí*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\pm\infty} c_k = 0.$$

Věta 1.7. *Nechť $f \in \mathcal{P}_p \cap \mathcal{C}^{s+1}(\mathbb{R})$ pro $p > 0$, $s \in \{0, 1, 2 \dots\}$. Potom řady*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^j(|a_k| + |b_k|) \quad a \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^j |c_k|$$

konvergují pro všechna $j = 0, 1, \dots, s$.

Věta 1.8. *Nechť $f, g \in \mathcal{P}_p$, $p > 0$, přičemž všechny odpovídající si Fourierovy koeficienty funkcí f a g jsou stejné. Potom $f = g$ s.v. na $\mathbb{R}$.*

Věta 1.9 (Carleson). *Nechť $p > 0$, $f \in \mathcal{P}_p$ a nechť navíc platí $f \in L^2(0, p)$. Potom $F_f = f$ s.v. na $\mathbb{R}$.*

Úmluva: až do konce kapitoly bude $p > 0$ mít význam délky periody.

Definice. Řekneme, že funkce $f \in \mathcal{P}_p$ je **po částech hladká**, pokud existují body $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = p$ tak, že f je spojitá na každém intervalu (x_i, x_{i+1}), v krajních bodech těchto intervalů má vlastní limity zprava i zleva (označme je $f(x_i+)$ a $f(x_{i+1}-)$) a má uvnitř těchto intervalů omezenou derivaci, pro všechna $i = 0, \dots n - 1$.

Věta 1.10. *Nechť $f \in \mathcal{P}_p$ je po částech hladká ve smyslu předchozí definice. Potom*

$$F_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Speciálně je tedy $F_f(x) = f(x)$ ve všech bodech x, ve kterých je f spojitá.

Věta 1.11 (Parsevalova rovnost). *Nechť $f \in \mathcal{P}_p$ a nechť navíc platí $f \in L^2(0, p)$. Buďte a_k, b_k resp. c_k reálné resp. komplexní Fourierovy koeficienty funkce f. Potom platí*

$$\frac{2}{p}\int_0^p |f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2)\,,$$

resp.

$$\frac{1}{p}\int_0^p |f(x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2\,.$$

Cvičení.

1. Modifikujte funkci x^2 tak, aby Fourierova řada výsledné funkce obsahovala pouze členy tvaru $\cos(kx)$. Dosazením vhodných bodů sečtěte řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. Pomocí Parsevalovy rovnosti sečtěte řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.
2. Rozmyslete si, jakou funkci by bylo potřeba rozvinout do Fourierovy řady, abyste sečetli číselnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$. Na jaké problémy narazíte, pokusíte-li se touto metodou sečíst číselnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$?
3. Modifikujte funkci $\cos x$ tak, aby Fourierova řada výsledné funkce obsahovala pouze členy tvaru $\sin(kx)$ (tj. tzv. "rozviňte kosinus do sinové řady").

Výsledky a komentáře

1. Uvažte x^2 na $\langle -\pi, \pi)$ a dále dodefinovanou 2π-periodicky. Výsledná funkce f je sudá, po částech hladká a spojitá na $\mathbb{R}$. Tedy $F_f(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Spočtěte $F_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$. Dosazení bodů $x = \pi$ resp. $x = 0$ dá $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ resp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Konečně, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
2. Uvažte např. x^3 na $\langle -\pi, \pi)$ a dále dodefinovanou 2π-periodicky. Z Parsevalovy rovnosti dostanete $\frac{\pi^6}{14} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2\pi^2-6)^2}{k^6}$. Umocněním v čitateli a s využitím výsledků předchozího bodu je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$.
3. Uvážíme $\cos x$ na $(0, \pi)$, rozšířenou liše na $(-\pi, 0)$ a dále dodefinovanou 2π-periodicky. Výsledek: $\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}$.

1.3 Derivování a integrování Fourierových řad

Věta 1.12 (o derivování)**.** *Buď $f \in \mathcal{P}_p$ taková, že číselné řady*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s(|a_k| + |b_k|) \quad \textit{resp.} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^s |c_k|\,, \tag{1}$$

sestavené z jejich Fourierových koeficientů, konvergují pro nějaké $s \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Potom $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$; navíc je možno příslušnou Fourierovu řadu derivovat s-krát člen po členu, přičemž $f \in \mathcal{P}_p \cap \mathcal{C}^s(\mathbb{R})$.

Pozn. Podle věty 1.7 je podmínka (1) splněna například pro $f \in \mathcal{P}_p \cap \mathcal{C}^{s+1}(\mathbb{R})$.

Věta 1.13 (o integrování)**.** *Buď $f \in \mathcal{P}_p$ a buďte a_k, b_k její Fourierovy koeficienty. Pak*

$$\int_0^x f(t)dt = A_0 + \frac{a_0 x}{2} + \frac{p}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}\sin\Big(\frac{2\pi}{p}kx\Big) - \frac{b_k}{k}\cos\Big(\frac{2\pi}{p}kx\Big),$$

kde (integrační konstanta)

$$A_0 = \frac{p}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}.$$

Pozn. Tato věta platí bez ohledu na to, jestli Fourierova řada pro f konverguje či ne.

1.4 Aplikace: rovnice vedení tepla

Uvažujme **rovnici vedení tepla**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Hledáme funkci $u = u(x, t) : \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$, která uvnitř svého defničního oboru řeší (2) a navíc splňuje **počáteční podmínku** $u(x, 0) = f(x)$, kde f je daná funkce, spojitá na $\langle 0, \pi\rangle$, $f(0) = f(\pi) = 0$. Současně u splňuje **okrajové podmínky** $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ pro všechna $t > 0$.

Hledejme nejprve řešení (2) ve tvaru $u(x, t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.

Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní. Označme odpovídající konstantu α. Nenulová funkce A pak musí splňovat $A(0) = A(\pi) = 0$, což nastane pouze pro (spočtěte přesně) $\alpha = -n^2$, kde $n \in \mathbb{N}$. Funkce A je potom (až na násobek konstantou) tvaru $\sin nx$. Funkce B (spočtěte) je pak nutně násobkem $e^{-n^2 t}$.

Tyto úvahy nás vedou k hledání řešení ve tvaru

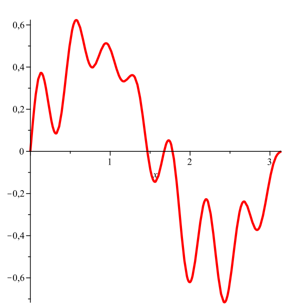
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin nx. \tag{3}$$

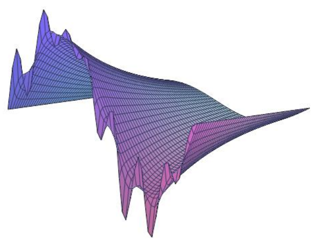
Pro $t = 0$ má ale platit

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

Koeficienty a_n ve (3) jsou tedy Fourierovými koeficienty zadané funkce f, pokud jde tato rozvinout do řady sinů. To půjde, pokud ji rozšíříme liše na $\langle -\pi, \pi \rangle$.

$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{9}\sin 12x + \frac{1}{7}\sin 15x$





$u(x,t) = \frac{1}{2}e^{-4t}\sin 2x + \frac{1}{9}e^{-144t}\sin 12x + \frac{1}{7}e^{-225t}\sin 15x$