Příklad 1

1. Nalezněte souřadnice vrcholů A_1, A_7 a A_{11} pravidelného dvanáctiúhelníku se středem v $[-3, 5]$ a vrcholem $A_0 = [1, 2]$ a vyjádřete je bez použití goniometrických funkcí (při výpočtu goniometrické funkce použít lze). Vrcholy jsou číslovány standardně, tedy proti směru hodinových ručiček.

2. Pravidelný osmiúhelník má vrcholy $A_0 = [2, -4]$ a $A_2 = [0, 0]$. Vyjádřete souřadnice ostatních vrcholů bez použití goniometrických funkcí (při výpočtu goniometrické funkce použít lze). Vrcholy jsou číslovány standardně, tedy proti směru hodinových ručiček.

3. Rozhodněte, zda je geometrická posloupnost
$$a_n = \frac{6 + 4\mathrm{i}}{2^n} \cdot (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^n$$
periodická, a pokud ano, určete délku periody. Popište geometricky vztah mezi prvky posloupnosti v Gaussově rovině.

4. Rozhodněte, zda je geometrická posloupnost
$$a_n = (2 - \mathrm{i}) \cdot \left(-\frac{1 + \mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n$$
periodická, a pokud ano, určete délku periody. Popište geometricky vztah mezi prvky posloupnosti v Gaussově rovině.

Příklad 2

1. Nalezněte všechna komplexní řešení rovnice
$$(2 - 3\mathrm{i})x^5 - 3 - 2\mathrm{i} = -\sqrt{12} + \mathrm{i}\sqrt{27}$$
v libovolném tvaru.

2. Nalezněte všechna komplexní řešení rovnice
$$x^3 + \frac{4 + 4\mathrm{i}}{x^3} = 2$$
v libovolném tvaru.

3. Nalezněte všechna komplexní řešení rovnice
$$(x^2 + 1)^3 = -1$$
v libovolném tvaru.

Příklad 3

1. Vyjádřete $\sin 7x$ pomocí $\sin x$ nebo $\cos x$. Odvoďte.
2. Vyjádřete $\cos 6x$ pomocí $\sin x$ nebo $\cos x$. Odvoďte.
3. Vyjádřete $\cos x + \cos y$ jako součin konstant a goniometrických funkcí. Odvoďte.

Příklad 4

1. Vyjádřete $\sin^7 x$ jako lineární kombinaci funkcí $\sin kx$ a $\cos kx$, $k \in \mathbb{N}_0$. Odvoďte.
2. Vyjádřete $\cos^6 x$ jako lineární kombinaci funkcí $\sin kx$ a $\cos kx$, $k \in \mathbb{N}_0$. Odvoďte.

Příklad 5

1. Vyjádřete hodnotu $\sin \frac{17}{12}\pi$ bez použití goniometrických funkcí (při výpočtu goniometrické funkce použít lze).
2. Vyjádřete hodnotu $\cos \frac{13}{8}\pi$ bez použití goniometrických funkcí (při výpočtu goniometrické funkce použít lze).

Příklad 6

1. Zakreslete v Gaussově rovině definiční obor funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dané předpisem
$$f(z) = \ln|z^5 + z^3 - z^2 - 1| + \sqrt{1 - |z|}.$$
Pozn. Odmocnina je reálná funkce.
2. Zakreslete v Gaussově rovině definiční obor funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dané předpisem
$$f(z) = \sqrt{\frac{\operatorname{Im} z \cdot (|z| - 2)}{|z+1| - |z+2\mathrm{i}|}}.$$
Pozn. Odmocnina je reálná funkce.

Příklad 7

1. Nalezněte hodnotu parametrů $a, b \in \mathbb{C}$ tak, aby polynom
$$az^2 + bz + 9 - 7\mathrm{i}$$
měl kořeny $1 - \mathrm{i}$ a $1 + 2\mathrm{i}$. Následně řešte rovnici
$$(9 - 7\mathrm{i})z^2 + bz + a = 0.$$

2. Nalezněte hodnotu parametrů $a, c \in \mathbb{C}$ tak, aby polynom

$$az^2 + (-6 + 10\mathrm{i})z + c$$

měl kořeny $2 - 3\mathrm{i}$ a i. Následně řešte rovnici

$$cz^2 + (-6 + 10\mathrm{i})z + a = 0.$$

Příklad 8

1. Nalezněte geometricky (tj. načrtněte a popište konstrukci a určete počet řešení) v Gaussově rovině množinu bodů splňujících podmínky:

$$\operatorname{Re} \frac{z}{-4 + 3\mathrm{i}} = 0$$
$$|z + 4 - 3\mathrm{i}| \text{ je kořen polynomu } x^2 - 11x + 30.$$

2. Nalezněte geometricky (tj. načrtněte a popište konstrukci a určete počet řešení) v Gaussově rovině množinu bodů splňujících podmínky:

$$\operatorname{Im} \frac{2 - \mathrm{i}}{z} = 0$$
$$(z + 2 + \mathrm{i})\overline{(z + 2 + \mathrm{i})} = 5.$$

3. Nalezněte geometricky (tj. načrtněte a popište konstrukci a určete počet řešení) v Gaussově rovině množinu bodů z splňujících následující podmínky:

$$\operatorname{Re} \frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$|2\mathrm{i} - 1 + z|^2 = 5.$$