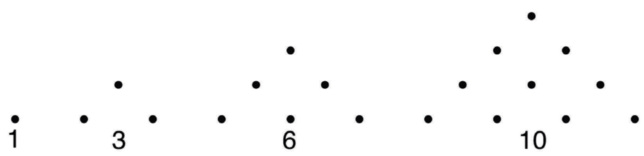
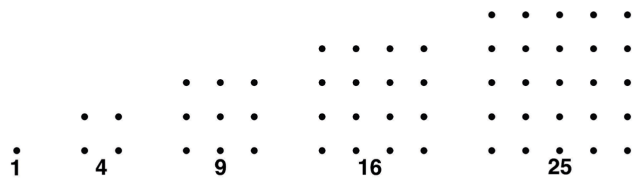
7 Čísla reálná

Objev nesouměřitelných čísel je připisován Pythagorovi, který žil v šestém století před naším letopočtem, a jeho stoupencům. Pro Pythagorejce a antickou matematiku, včetně aritmetiky, je typické interpretovat všechny zákonitosti pomocí geometrie. Dokonce od Řeků pocházejí i pojmy jako čísla trojúhelníková (viz obrázek 13) nebo čtvercová (viz obrázek 14). (Fine, 1907; Crilly, 2010; Kolman, 2008)



Obrázek 13: Trojúhelníková čísla (vlastní obrázek)



Obrázek 14: Čtvercová čísla (vlastní obrázek)

Právě při zkoumání čísel čtvercových si Pythagoras všiml vztahu mezi čtverci trojky, čtyřky a pětky. Tedy, že platí $3^2 + 4^2 = 5^2$. Stejně tak věděl, že trojúhelník o těchto délkách stran je pravoúhlý. Pythagorovi se povedlo větu zobecnit i geometricky ukázat její platnost. Ovšem když začal hledat trojice čísel odpovídající délkám stran pravoúhlých trojúhelníků, narazil na problém.

Řekové se zabývali tzv. *teorií měření* (Crilly, 2010). Ta spočívala v tom, že chceme-li změřit délku úsečky AB měřidlem (jednotkou) délky CD, budeme měřidlo přikládat n-krát. Pokud se po n-tém přiložení konec úsečky AB a konec měřidla překrývají, je délka úsečky AB právě n (vzhledem k jednotce). Pokud měřidlo přesáhlo, prodloužíme úsečku AB na dvojnásobek její délky a postup opakujeme. Pokud se konce překryjí, je délka úsečky AB počtem přiložení měřidla k prodloužené úsečce dělený násobností délky úsečky AB v úsečce prodloužené. Pokud měřidlo znovu přesáhne, prodloužíme původní úsečku AB na trojnásobek atd.

Řekové věřili, že po konečně mnoha prodlouženích úsečky AB se konce prodloužené úsečky a měřidla překryjí, a bude tak možné vyjádřit délku měřené úsečky ku měřidlu jako poměr nějakých dvou celých čísel. Délky, pro které tato vlastnost platí, nazýváme souměřitelné. (Crilly, 2010, Fine, 1907, Kolman, 2008)

Pozn. 26. V Eukleidových základech (Servít, 1907) jsou jako souměřitelné veličiny označeny takové veličiny, pro něž existuje společná míra, a nesouměřitelné takové, pro které společná míra neexistuje.

Pythagoras chtěl tímto způsobem změřit délku přepony pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny měly délku jednotky. Hledal tedy délku úhlopříčky čtverce. Za jednotku, pomocí které měřil, zvolil délku strany čtverce. Najít délku úhlopříčky se mu ovšem nedařilo. Pythagorejcům se podařilo ukázat, že délka úhlopříčky čtverce není s délkou jeho strany souměřitelná. (Fine, 1907; Kolman, 2008)

Věta 30. *Strana a úhlopříčka čtverce jsou nesouměřitelné.*

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že úhlopříčka U a strana S čtverce jsou souměřitelné. Pak mají poměr jako nějaká dvě celá čísla $u, s \in \mathbb{Z}$. Podle Pythagorovy věty platí $u^2 = 2s^2$.
Pokud jsou čísla u, s soudělná, tedy pokud $\exists c \in \mathbb{N} - \{0, 1\} : u = c \cdot \alpha, s = c \cdot \beta$, pak tvar $(c \cdot \alpha)^2 = 2 \cdot (c \cdot \beta)^2$ zkrátíme c^2 a dostáváme:

$$\alpha^2 = 2 \cdot \beta^2.$$

Protože se α^2 rovná dvojnásobku β^2, můžeme říct, že α je sudé číslo. Jelikož jsme vydělili c^2, čísla α, β jsou nesoudělná, musí β být liché číslo.
Je-li α sudé číslo, existuje $\gamma \in \mathbb{N}$ takové, že $\alpha = 2 \cdot \gamma$. Když dosadíme za α do rovnosti $\alpha^2 = 2 \cdot \beta^2$, dostáváme:

$$(2 \cdot \gamma)^2 = 2 \cdot \beta^2,$$

což je po umocnění:

$$4 \cdot \gamma^2 = 2 \cdot \beta^2,$$

obě strany vydělíme dvěma:

$$2 \cdot \gamma^2 = \beta^2.$$

Z toho plyne, že β je sudé číslo. To je spor s nesoudělností čísel α, β. Ke sporu jsme došli také proto, že číslo je buď sudé, nebo liché, ale β je současně sudé i liché.
Délka hrany čtverce a jeho úhlopříčky jsou tedy nesouměřitelné. □

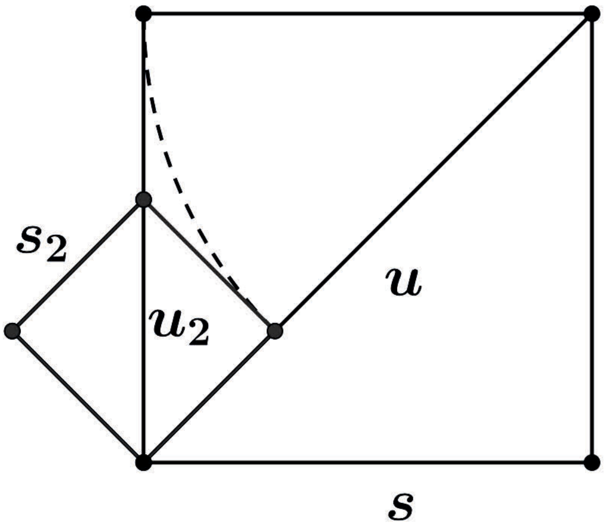
(Servít, 1907; Fine, 1907; Kolman, 2008)

Důkaz věty lze provést i graficky:

Důkaz. Mějme čtverec o délce strany s a délce úhlopříčky u. Přeneseme délku strany s na u. Nad zbývající délkou strany u sestavíme čtverec. Délku jeho strany označíme s_2 a délku jeho úhlopříčky u_2 (viz obrázek 15).

Předpokládejme nyní, že je možné změřit s pomocí u, nebo opačně, tedy, že existuje společná míra s a u. Označíme ji E.
Pro délky menšího ze čtverců však platí:

- $s_2 = u - s$,
- $u_2 = s - s_2$ (je vidět z deltoidu, v němž je vepsán oblouk kružnice na obrázku 15).



Obrázek 15: Nesouměřitelnost délek strany a úhlopříčky čtverce (vlastní obrázek)

Proto by společná míra u, s byla i společnou mírou u_2, s_2. Konečným počtem opakování stejné konstrukce pro vzniklé menší čtverce dostaneme pro libovolné E stranu a úhlopříčku, které budou kratší než E, tedy E nemůže být společnou měrou a to je spor. □

(Kolman, 2008)

Pozn. 27. Čísla, která jsou nesouměřitelná, tedy je nemožné je zapsat jako podíl dvou celých čísel, dnes nazýváme iracionální. Slovo pochází z latinského slova *ratio*, znamenajícího *poměr*, a předpony, vyjadřující zápor. Slovo *ratio* ovšem také znamená rozum, a proto by se slovo *iracionální* dalo přeložit i jako *stojící mimo rozum.*

Z práce se čtvercovými čísly Řekové usoudili, že rovnice $x^2 = 2$ nemá řešení, jelikož neznali žádné číslo, které by ji splňovalo. Ovšem právě takové číslo se objevovalo v geometrii jako poměr úhlopříčky jednotkového čtverce k jeho straně.

Thurston (1956) soudí, že objev iracionálních čísel mohl přispět k tomu, proč se antičtí matematici přestali věnovat aritmetice a soustředili se na geometrii. (Thurston, 1956)

7.1 Konstrukce reálných čísel

7.1.1 Axiomatická výstavba oboru reálných čísel

Definice 23. Množinu $\mathbb{R}$ nazveme množinou reálných čísel, jestliže platí následující axiomy:

1. Na množině $\mathbb{R}$ je definována operace sčítání $+, + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Operace přiřazuje každé dvojici $x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prvek $x + y \in \mathbb{R}$. Sčítání má tyto vlastnosti:

   a) $\exists 0 \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} : 0 + a = a + 0 = a,$ *(nula je neutrální prvek pro +)*

   b) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = (-a) + a = 0,$ *(existence opačných prvků)*

   c) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c,$ *(asociativita)*

   d) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a.$ *(komutativita)*

2. Na množině $\mathbb{R}$ je definována operace násobení $\cdot, \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Operace přiřazuje každé dvojici $x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prvek $x \cdot y \in \mathbb{R}$. Násobení má tyto vlastnosti:

   a) $\exists 1 \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a,$ *(jednička je neutrální prvek vzhledem k $\cdot$)*

   b) $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1,$ *(existence inverzních prvků)*

   c) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$ *(asociativita)*

d) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a.$ *(komutativita)*

3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$ *($\cdot$ je distributivní vzhledem k $+$)*

4. Na množině $\mathbb{R}$ je definována relace nerovnost $<$, která splňuje tyto podmínky:

   a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c,$ *(tranzitivita)*

   b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a < b \oplus a = b \oplus a > b.$ *(trichotomie)*

5. Axiom vazby operací a uspořádání: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

   a) $a < b \Rightarrow a + c < b + c,$

   b) $(0 < a \wedge 0 < b) \Rightarrow 0 < a \cdot b.$

6. Axiom úplnosti: $(A, B \subset \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B : a < b) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a < c < b.$

(Kubínová, Novotná, 1997, s. 154-155)

Pozn. 28. Thurston (1956) k názvu reálných čísel píše, že nejsou *reálná* proto, že by byla v nějakém ohledu reálnější než podobory, nýbrž proto, že jsou v některých vlastnostech *reálnější* než jejich nadobory. Například je možné znázornit je na číselné ose.

7.1.2 Cantorova konstrukce oboru reálných čísel

Pro zavedení oboru reálných čísel Cantorovou konstrukcí je potřeba nejprve definovat, co je *cauchyovská* posloupnost.

Definice 24. Posloupnost $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n \in \mathbb{Q}$, je cauchyovská, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}; m, n > n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

(Kubínová, Novotná, 1997, s. 155)

Definice 25. Nechť $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti racionálních čísel. Definujeme:

- $a + b = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$,
- $a - b = \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$,
- $a \cdot b = \{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$,
- $\frac{a}{b} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ pro $b_n \neq 0$.

(Kubínová, Novotná, 1997, s. 155)

Nyní zavedeme množinu všech cauchyovských posloupností F.

$$F = \{a; a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel}\}.$$

Dále definujeme relaci $\sim$ na F:

$$a \sim b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

Ukážeme, že relace $\sim$ je ekvivalence na F:

- Je relace $\sim$ reflexivní? Ukážeme, že $\forall a \in F : a \sim a$. Přepíšeme relaci podle definice:

  $$a \sim a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - a_n) = 0.$$

  To platí, relace je tedy reflexivní.

- Je relace $\sim$ symetrická? Ukážeme, že $\forall a, b \in F : a \sim b \Rightarrow b \sim a$. Obě strany přepíšeme podle definice relace $\sim$:

  $$L : a \sim b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n),$$

$P: b \sim a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) - \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$.

Tedy dostáváme $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n)$, a relace $\sim$ je proto symetrická.

- Je relace $\sim$ tranzitivní? Ukážeme, že $\forall a, b, c \in F : (a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$.

  Začneme přepsáním předpokladu podle definice relace $\sim$:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) = 0.$$

  Chceme ukázat, že pak $\lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = 0$:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) -$$
$$- \lim_{n\to\infty}(c_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) = 0.$$

  Protože $\lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = 0$, platí $a \sim$c.

  Relace $\sim$ je na F tranzitivní.

Protože je relace $\sim$ reflexivní, symetrická i tranzitivní, jedná se o ekvivalenci na F.

Množinu $\mathbb{R}$ reálných čísel definujeme jako rozklad množiny F podle ekvivalence $\sim$. Třídy tohoto rozkladu jsou prvky množiny $\mathbb{R}$. Tedy platí:

$$\mathbb{R} = \{T_a; a \in F\}, T_a = \{x \in F; x \sim a\}.$$

Na množině $\mathbb{R}$ zavedeme operace + a $\cdot$.

Definice 26. Sčítání na množině $\mathbb{R}$ definujeme:

$$\forall T_a, T_b \in \mathbb{R} : T_a + T_b = T_{a+b}.$$

Pozn. 29. Pro korektnost definice 26 je ještě třeba ověřit, že součet nezávisí na volbě reprezentantů tříd a že $T_{a\cdot b} \in \mathbb{R}$.

Definice 27. Odčítání na množině $\mathbb{R}$ definujeme:

$$\forall T_a, T_B \in \mathbb{R} : T_a - T_b = T_{a-b}.$$

Pozn. 30. V důkazech vět 31 a 32 použijeme následující vlastnosti limit posloupností. Ty vycházejí z (Kubínová, Novotná, 1997, s. 23) a (Kubínová, Novotná, 1997, s. 35).

1. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Pak existuje limita $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ a je rovna 0.

2. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, pak:

   a) $\exists \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ a platí $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

   b) $\exists \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ a platí $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

   c) pro $b \neq 0 \quad \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ a platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Věta 31. $\forall T_a, T_b, T_c \in \mathbb{R}$ *platí:*

1) $(T_a + T_b) + T_c = T_a + (T_b + T_c)$, *(asociativita)*

2) $T_a + T_b = T_b + T_a$, *(komutativita)*

3) $T_a + T_{\{0,0,\dots\}} = T_a$, *($T_{\{0,0,\dots\}}$ je neutrální prvek)*

4) $T_a + (T_b - T_a) = T_b$. *(existence inverzních prvků)*

Důkaz. 1. Dokážeme, že sčítání reálných čísel je asociativní:

$$(T_a + T_b) + T_c = T_{(a+b)} + T_c = T_{(a+b)+c} \stackrel{\star}{=} T_{a+(b+c)} = T_a + T_{(b+c)} =$$
$$= T_a + (T_b + T_c).$$

$\star$: Využili jsme asociativitu sčítání racionálních čísel (viz věta 25).

Sčítání je asociativní pro všechna $T_a, T_b, T_c \in \mathbb{R}$.

2. Chceme ukázat, že sčítání reálných čísel je komutativní:

$$T_a + T_b = T_{(a+b)} \overset{\star}{=} T_{b+a} = T_b + T_a.$$

$\star$: Využili jsme komutativitu sčítání racionálních čísel (viz věta 25).

Sčítání je komutativní pro všechna $T_a, T_b \in \mathbb{R}$.

3. Chceme ukázat, že $T_{\{0,0,\dots\}}$ je neutrálním prvkem vzhledem ke sčítání:

$$T_a + T_{\{0,0,\dots\}} = T_{(a+0)} \overset{\star}{=} T_a.$$

$\star$: Využili jsme toho, že 0 je neutrální prvek vzhledem ke sčítání racionálních čísel (viz věta 25).

$T_{\{0,0,\dots\}}$ je neutrálním prvkem pro všechna $T_a \in \mathbb{R}$ vzhledem ke sčítání.

4. A nakonec platnost tvrzení $T_a + (T_b - T_a) = T_b$:

$$T_a + (T_b - T_a) = T_a + T_{(b-a)} = T_{(a+b-a)} \overset{\star}{=} T_{(b+0)} = T_b.$$

$\star$: Využili jsme komutativitu a vlastnost opačných prvků vzhledem ke sčítání racionálních čísel (viz věta 25).

Pro každé reálné číslo T_a existuje opačné číslo vzhledem ke sčítání ve tvaru $-T_a$.

$\square$

Definice 28. Násobení na množině $\mathbb{R}$ definujeme:

$$\forall T_a, T_b \in \mathbb{R} : T_a \cdot T_b = T_{(a \cdot b)}.$$

Pozn. 31. Pro korektnost definice 28 je ještě třeba ověřit, že součin nezávisí na volbě reprezentantů tříd a to, že $T_{a \cdot b} \in \mathbb{R}$.

Definice 29. Dělení na množině $\mathbb{R}$ definujeme:

$$\forall T_a, T_b \in \mathbb{R} : \frac{T_a}{T_b} = T_{\frac{a}{b}}; T_b \neq T_{\{0,0,\dots\}}.$$

Věta 32. $\forall T_a, T_b, T_c \in \mathbb{R}$ *platí:*

1) $(T_a \cdot T_b) \cdot T_c = T_a \cdot (T_b \cdot T_c)$, *(asociativita)*

2) $T_a \cdot T_b = T_b \cdot T_a$, *(komutativita)*

3) $T_a \cdot T_{\{1,1,\dots\}} = T_a$, *(*$T_{\{1,1,\dots\}}$ *je neutrální prvek)*

4) $T_b \cdot \frac{T_a}{T_b} = T_a; T_b \neq T_{\{0,0,\dots\}}$, *(existence inverzních prvků)*

5) $(T_a + T_b) \cdot T_c = T_a \cdot T_c + T_b \cdot T_c$. *(distributivita násobení vzhledem ke sčítání)*

Důkaz. 1. Dokážeme asociativitu násobení reálných čísel:

$$(T_a \cdot T_b) \cdot T_c = T_{(a \cdot b)} \cdot T_c = T_{[(a \cdot b) \cdot c]} \stackrel{\star}{=} T_{[a \cdot (b \cdot c)]} = T_a \cdot T_{(b \cdot c)} = T_a \cdot (T_b \cdot T_c).$$

$\star$: Využili jsme asociativitu násobení racionálních čísel (viz věta 24).

Násobení je asociativní pro všechna $T_a, T_b, T_c \in \mathbb{R}$.

2. Chceme ukázat, že násobení reálných čísel je komutativní:

$$T_a \cdot T_b = T_{(a \cdot b)} \stackrel{\star}{=} T_{(b \cdot a)} = T_b \cdot T_a.$$

$\star$: Využili jsme komutativitu násobení racionálních čísel (viz věta 24).

Násobení je komutativní pro všechna $T_a, T_b \in \mathbb{R}$.

3. Ukážeme, že $T_{\{1,1,\dots\}}$ je neutrálním prvkem vzhledem k násobení reálných čísel:

$$T_a \cdot T_{\{1,1,\dots\}} = T_{(a \cdot 1)} \stackrel{\star}{=} T_a.$$

$\star$: Využili jsme toho, že 1 je neutrální prvek vzhledem k násobení racionálních čísel (viz věta 24).

$T_{\{1,1,\dots\}}$ je neutrálním prvkem vzhledem k násobení pro všechna $T_a \in \mathbb{R}$.

4. Chceme ukázat, že $\forall T_a, T_b, T_c \in \mathbb{R}$ platí tvrzení $T_b \cdot \frac{T_a}{T_b} = T_a$.

$$T_b \cdot \frac{T_a}{T_b} = T_b \cdot T_{\frac{a}{b}} = T_{b \cdot \frac{a}{b}} \stackrel{\star}{=} T_a.$$

$\star$: Využili jsme vlastnosti inverzních prvků vzhledem k násobení racionálních čísel (viz věta 24).

Pro každé reálné číslo $T_a \neq T_{\{0,0,\dots\}}$ existuje inverzní prvek ve tvaru $\frac{1}{T_a}$.

5. Nakonec dokážeme distributivitu násobení vzhledem ke sčítání:

$$(T_a + T_b) \cdot T_c = T_{(a+b)} \cdot T_c = T_{[(a+b)\cdot c]} \stackrel{\star}{=} T_{(a \cdot c + b \cdot c)} = T_a \cdot T_c + T_b \cdot T_c.$$

$\star$: Využili jsme distributivity násobení vzhledem ke sčítání racionálních čísel (viz věta 25).

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání pro všechna $T_a, T_b, T_c \in \mathbb{R}$.

$\square$

Pozn. 32. Definice a věty v kapitole 7.1.2 vycházejí ze skript Posloupnosti a řady (Kubínová Novotná, 1997).

7.1.3 Konstrukce pomocí Dedekindových řezů

Jiný způsob konstrukce reálných čísel popsal Richard Dedekind. Jeho metoda je založena na takzvaných *řezech*.

Předpokládejme, že existuje způsob rozdělení množiny všech racionálních čísel na dvě množiny. Množinu A a množinu B. Přitom platí, že pro každý prvek $b \in B$ je větší než každý prvek a množiny A. Takové rozdělení nazýváme řezem na množině racionálních čísel. (Courant, Robbins, 1996)

Formálně tedy definujeme:

Definice 30. Dedekindovým řezem A/B na množině racionálních čísel nazveme uspořádanou dvojici $[A, B]$, kde A, B jsou množiny racionálních čísel, pro které platí:

(1) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$,

(2) pro každé $a \in A$ a $b \in B$ platí $a < b$, a tedy i $A \cap B = \emptyset$,

(3) $A \cup B = \mathbb{Q}$.

(Kolman, 2008, s. 99; Kubínová, Novotná, 1997)

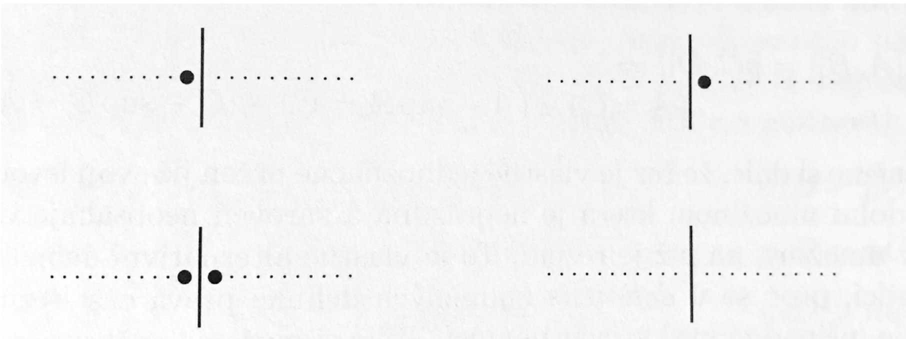
Pro řez mohou nastat pouze následující tři případy podle toho, zda existuje supremum/infimum na A, B (viz obrázek 16):

1) Existuje supremum $a' \in A$, které je zároveň infimem množiny B. (viz obrázek 16 vpravo nahoře)

2) Existuje infimum množiny $b' \in B$, které je zároveň supremum množiny A (viz obrázek 16 vlevo nahoře).

3) Neexistuje ani supremum v A, ani infimum v B. (viz obrázek 16 vpravo dole)

(Kolman, 2008; Courant, Robbins, 1996)



Obrázek 16: Dedekindovy řezy (Kolman, 2008, s. 101)

Pozn. 33. Pro případ 1) platí, že supremum množiny A je infimem množiny B, a pro případ 2) obráceně. Případy se liší pouze tím, do které z množin A, B supremum/infimum náleží. (Kolman, 2008)

Případ, že by existovalo supremum $a' \in A$ a infimum $b' \in B$, kdy $a' \neq b'$, nemůže nastat. Důvodem je, že například racionální číslo p, které je aritmetickým průměrem a' a b', by bylo větší než a' a menší než b', a tedy nepatřilo ani do A, ani do B, což je ve sporu s definicí řezu. (Courant, Robbins, 1996)
V případě 3) řez podle Dedekinda definuje iracionální číslo (viz obrázek 16 vlevo dole). (Kolman 2008; Courant, Robbins, 1996)

7.1.4 Definice iracionálních čísel pomocí vnořených intervalů

Definice 31. Uvažujme posloupnost intervalů $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$ na množině racionálních čísel takovou, že každý další interval je obsažen v intervalech předešlých, a takovou, že velikost intervalu se s rostoucím n neomezeně blíží nule. Takovou posloupnost nazveme posloupností vnořených intervalů (*nested intervals*).

(Courant, Robbins, 1996)

Věta 33. *Pro každou posloupnost vnořených intervalů existuje právě jeden bod, který je obsažen v každém z nich.*

(Courant, Robbins, 1996)

Pozn. 34. Věta je pod názvem *Cantorova věta o vnořených intervalech* dokázána například na stranách 13-14 v textu *Učební text k přednášce matematická analýza I* (Klazar, 2007). Dostupné online na: https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/analyzaI.pdf.

Definice 32. Bod z věty 33 nazveme reálným číslem. Nejedná-li se o číslo racionální, pak se jedná o číslo iracionální.

(Courant, Robbins, 1996)

7.2 Spočetnost

Věta 34. *Množina reálných čísel je nekonečnou množinou.*

Důkaz. Množina reálných čísel obsahuje všechna čísla racionální. Množina racionálních čísel je nekonečná, tedy i množina reálných čísel je nekonečná. □

Věta 35. *Množina reálných čísel není spočetnou množinou.*

Důkaz. Předpokládejme, že množina reálných čísel je spočetná. Je-li spočetná, pak existuje její bijektivní zobrazení na $\mathbb{N}$. Seřaďme všechna reálná čísla do následující posloupnosti $\{a_n\}$:

$$a_1 = 0, u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 \ldots$$
$$a_2 = 0, v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 \ldots$$
$$a_3 = 0, w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 \ldots$$
$$\vdots$$

Nyní pomocí tzv. Cantorovy diagonalizační metody sestrojíme prvek $a_c \in \mathbb{R}$ ve tvaru $0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \ldots$, pro který platí, že prvek $c_1 \neq u_1$, prvek $c_2 \neq v_2$, prvek $c_3 \neq w_3$, ...
Takový prvek ovšem nebyl v posloupnosti $\{a_n\}$, přičemž jsme předpokládali, že v posloupnosti $\{a_n\}$ jsou všechny prvky $\mathbb{R}$. To je spor a bijektivní zobrazení reálných čísel na čísla přirozená neexistuje. □

7.3 Uspořádání na množině reálných čísel

Věta 36. *Relace $<$, zavedená jako 4. axiom axiomatické výstavby oboru reálných čísel (viz kapitola 7.1.1), je uspořádáním na množině reálných čísel.*

Důkaz. Axiom 4. v kapitole 7.1.1 také říká, že je relace $<$ na $\mathbb{R}$ tranzitivní a trichotomická. Proto se jedná o uspořádání na $\mathbb{R}$. □

7.4 Reálná čísla jako algebraická struktura

Věta 37. *Reálná čísla spolu s operacemi $+$ a $\cdot$ tvoří těleso.*

Důkaz. Vlastnosti tělesa plynou z vět 31 a 32. $\square$