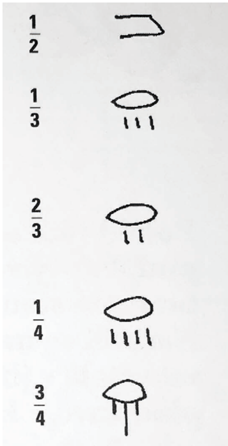
6 Čísla racionální

Racionální čísla jsou taková čísla, která, jak už název napovídá, lze vyjádřit jako poměr (z latinského *ratio*) ve tvaru zlomku $\frac{a}{b}$, kde $a, b \in \mathbb{N}$. Pro obor racionálních čísel použijeme označení $\mathbb{Q}$ z německého *Quotient*, které překládáme kvocient nebo také podíl.

O racionálních číslech se také někdy mluví jako o číslech souměřitelných. Eukleidés souměřitelné veličiny definoval takto: „Souměřitelnými zovou se veličiny, které touž měrou se měří; nesouměřitelnými pak, jimž míra žádná nemůže státi společnou.“ (Servít, 1907, s. 159)

Fine (1907) o zlomcích tvrdí, že z umělých čísel (těmi rozumí všechna čísla kromě přirozených) jako jediné nevznikly primárně jako abstraktní matematický konstrukt, ale proto, že měly v běžném životě své užití. To dokládá tím, že se objevují nejen v nejstarších matematických spisech Babyloňanů a Egypťanů, ale také Římanů, kteří se rozvoji matematiky příliš nevěnovali. Zlomky používali také řečtí kupci dávno před tím, než byly přijaty matematiky. Pokud byl etalon (jednotka [viz pozn. 4]) příliš velký, byl rozdělen na menší části. Tyto části se postupně staly další jednotkou. Tento princip je patrný například u peněz, kdy vznikaly nové druhy mincí nižší hodnoty. Poté došlo k abstrakci od mincí a vztah jednotky k jednotce menší začal být používán obecně i pro jiné předměty. Tímto principem vznikly například zlomky Římanů. Používali slova pro mince *uncia* nebo *sicilicus*, která byla částmi mince *as*, jež byla jednotkou. U jiných kultur však došlo k posunu od slov označujících mince k prostému numerickému vztahu. (Fine, 1907)

V matematicky vyspělejším Egyptě zavedli zlomky obecněji, i se značením. Tento systém je známý z nejstaršího matematického textu, *Rhindského papyru* (Ahmes, 2000 př.n.l). Jejich systém vycházel z tzv. kmenových zlomků. Kmenovými zlomky rozuměli takové zlomky, jejichž čitatel byl roven jedné. Další zlomky pak vyjadřovali pomocí zlomků kmenových, až na některé výjimky, které z praktických důvodů měly vlastní symbol, jak je vidět na obrázku 10 (např. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \ldots$). (Crilly, 2010)



Obrázek 10: Zlomky Egypťanů (Crilly, 2010, s. 15)

Jak by Egypťané vyjádřili například zlomek $\frac{5}{7}$, uvádí Crilly na následujícím příkladu:

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{168}.$$

Navíc Egypťané používali v součtu každý kmenový zlomek nejvýše jednou. Jak vidno, není tento způsob praktický a pro svou obtížnost nebyl příliš rozšířený.

Crilly ještě dodává, že některé zlomky je možné zapsat více způsoby. Například zlomek $\frac{5}{7}$ by bylo možné zapsat také takto:

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14},$$

což je kratší způsob. Do dnešní doby není znám způsob, jak obecně najít nejkratší rozklad na kmenové zlomky. (Crilly, 2010)

Zhruba o 150 let dříve se podobný systém objevil i u Babyloňanů (Crilly, 2010). Na rozdíl od Egypťanů, jejichž kořenové zlomky měly všechny stejný čitatel, Babyloňané měli zlomky se společnou vlastností ve jmenovateli, kde vždy najdeme nějakou mocninu čísla 60. U zlomků zapisovali pouze čitatel, mocnina jmenovatele závisela na pořadí, ve kterém byl další sčítanec zapsán. Například $\frac{27}{80} = \frac{20}{60} + \frac{15}{60^2}$ bychom podle Babyloňanů zapsali jako 20 15. (Fine, 1907)

Znovu zde chybělo znaménko operace, a muselo tak být jasné pouze z následnosti, že se jedná o sčítání (Fine, 1907). Jak Babyloňané rozlišili prostý součet čísel od součtu zlomků, Fine nezmiňuje.

Systém zlomků v šedesátkové soustavě byl ve vědě využíván až do šestnáctého století, kdy byl nahrazen soustavou desítkovou. Pro měření úhlů je však používán dodnes. (Fine, 1907)

Stejně jako Řekové rozlišovali mezi „čistou geometrií“ a geometrií řešenou aritmetickými metodami, rozlišovali také mezi „čistou aritmetikou“ a „uměním výpočtů“. Zlomky spadaly do kategorie umění výpočtů, jelikož byly Řeky považovány za umělý konstrukt, který nepatří do čisté vědy. Zlomky se tak objevují u geometrů Archimeda nebo Hera, ani jeden je však neuznává jako matematické objekty, nýbrž jen jako prostředky výpočtu. Zlomek $\frac{3}{2}$ by zapsali $\gamma'\ \beta''\ \beta''$. (Fine, 1907)

V *Eukleidových Základech* (300 př.n.l.) jsou popsány některé vlastnosti zlomků, například v následující větě: „Když je číslo čísla dílem a jiné jiného je týmž dílem, též součet obou týmž dílem bude součtu, jakým jedno jednoho.“ (Servít, 1907, s. 107) nebo také ve větě: „Když je číslo čísla dílem, jakým odečtené odečteného, také zbytek zbytku týmž dílem bude, jakým celek celku.“ (Servít, 1907, s. 108).

Fine (1907) ovšem dodává, že Eukleidés zlomky chápal pouze v roli poměru geometrických objektů a nezapisoval je, ani s nimi neprováděl aritmetické výpočty jako s abstraktními čísly. To prováděl až Diophantos (Fine, 1907).

Zlomkovou čáru v podobě, v jaké ji dnes známe, dal světu Pisánský (Fibonacci) na počátku 13. století. Na konci století 16. Stevin přešel od zlomků o základu mocniny čísla 60 ke zlomkům o základu mocniny čísla 10. (Crilly, 2010)

6.1 Konstrukce racionálních čísel

Chceme vytvořit strukturu $(\mathbb{Q}, \cdot)$. Motivací je zkonstruovat taková čísla, aby byla vždy řešitelná rovnice:

$$a \cdot x = b.$$

Také chceme, aby pro tato čísla platily aritmetické zákony. (Thurston, 1956)

1. Ukážeme, že rovnice v tomto tvaru může mít pouze jedno řešení. To dokážeme sporem. Předpokládejme, že rovnice má řešení dvě. Označme tato řešení například $p, q \in \mathbb{Z} : p \neq q$:

   $$a \cdot p = b = a \cdot q.$$

   Podle věty 9 zkrátíme, a dostaneme tak:

   $$p = q,$$

   což je spor s předpokladem, že $p \neq q$. Rovnice má tedy pouze jedno řešení. Řešení je závislé na a, b, proto by jeho označení mělo zahrnovat a i b. Zavedeme označení pro řešení $\frac{b}{a}$. (Thurston, 1956)
   Víme, že někdy mají různé rovnice tohoto typu stejná řešení, například $2x = 10$ a $3x = 15$. Zajímá nás, kdy se tak děje. Předpokládejme tedy, že dvojice rovnic $a \cdot x = b$ a $c \cdot x = d$ má stejné řešení $x = r$. Platí tedy:

   $$a \cdot r = b \wedge c \cdot r = d.$$

   Obě strany rovnosti $a \cdot r = b$ vynásobíme $d \in \mathbb{Z}$:

   $$(a \cdot r) \cdot d = b \cdot d = b \cdot (c \cdot r).$$

   Využijeme komutativitu a asociativitu násobení (věta 9):

   $$(a \cdot d) \cdot r = (b \cdot c) \cdot r.$$

Zkrátíme r podle věty 9 a zjišťujeme, že jestliže mají rovnice stejné řešení, pak platí $a \cdot d = b \cdot c$. (Thurston, 1956)

Naopak platí-li, že $a \cdot d = b \cdot c$ a r řeší rovnici $a \cdot x = b$, tedy $a \cdot r = b$, pak tuto rovnost vynásobíme $c \in \mathbb{Z}$:

$$(a \cdot r) \cdot c = b \cdot c = a \cdot d,$$

využijeme asociativitu násobení (věta 9):

$$a \cdot (r \cdot c) = a \cdot d,$$

zkrátíme a použijeme komutativitu (obojí věta 9):

$$c \cdot r = d.$$

To znamená, že r řeší i rovnici $c \cdot x = d$. Pro řešení jsme zavedli označení $\frac{b}{a} = r$. Jak vidno, mezi řešeními tedy platí následující ekvivalence:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

(Thurston, 1956)

Relace = ve výrazu $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ je ekvivalencí (označme tuto relaci $\approx$) definovanou na množině $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$. Platí:

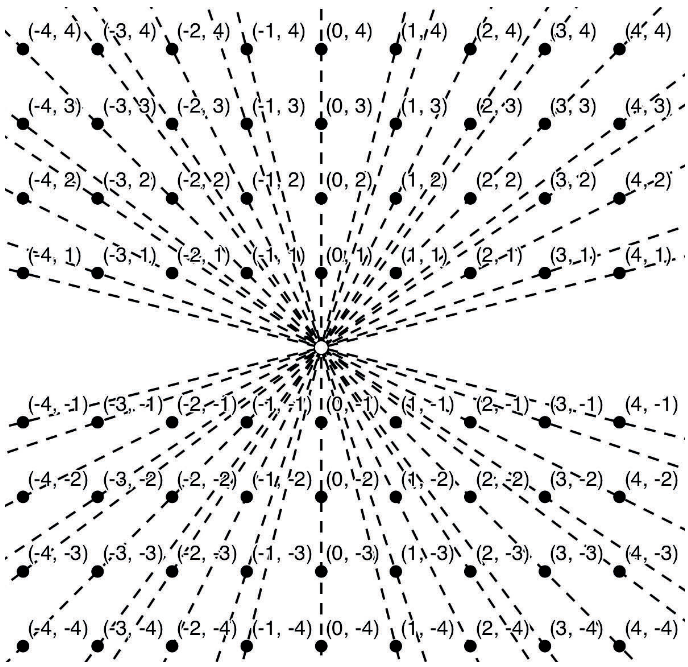
$$\forall a, c \in \mathbb{Z} \quad \forall b, d \in (\mathbb{Z} - \{0\}) : (a, b) \approx (c, d) \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot d.$$

2. Množinu $\mathbb{Q}$ racionálních čísel definujme jako rozklad množiny M podle ekvivalence $\approx$. Třídy tohoto rozkladu jsou prvky množiny $\mathbb{Q}$. Tedy platí:

$$\mathbb{Q} = \{T_{(a,b)}; (a, b) \in M\}, T_{(a,b)} = \{(c, d) \in M; (a, b) \approx (c, d)\}.$$

(Kubínová, Novotná, 1997)

Třídy rozkladu podle ekvivalence $\approx$ znázorňuje obrázek 11. Přerušovaná čára znázorňuje třídu ekvivalence a body na ní prvky, které do dané třídy spadají. Počátek přitom nepatří do žádné ze tříd, stejně tak jako každý bod osy x.



Obrázek 11: Třídy ekvivalence racionálních čísel (vlastní obrázek)

3. Na množině $\mathbb{Q}$ definujeme operaci násobení.

Definice 19. Operaci $\cdot$ na množině $\mathbb{Q}$ zavedeme takto:

$$\forall T_{(a,b)}, T_{(c,d)} \in \mathbb{Q} : T_{(a,b)} \cdot T_{(c,d)} = T_{(a \cdot c, b \cdot d)}.$$

(Kubínová, Novotná, 1997)

Pro korektnost definice musí platit, že:

i) $T_{(a \cdot c, b \cdot d)} \in \mathbb{Q}$,

ii) $\forall(x,y) \in T_{(a,b)}, \forall(u,v) \in T_{(c,d)} : (x \cdot u, y \cdot v) \in T_{(a \cdot c, b \cdot d)}$.

Podle definice množiny racionálních čísel i) platí. Čísla a, c jsou ze $\mathbb{Z}$ a čísla b, d jsou prvky $\mathbb{Z} - \{0\}$. Tedy i součin celých čísel bude celé číslo a součin nenulových čísel bude nenulový. To odpovídá definici množiny $\mathbb{Q}$.

Pro ověření ii) je třeba zjistit, zda platí:

$$\forall(x,y) \approx (a,b), \forall(u,v) \approx (c,d) : (x \cdot u, y \cdot v) \approx (a \cdot c, b \cdot d).$$

Přepíšeme předpoklady podle definice relace $\approx$:

$$\forall(x,y) \approx (a,b) \Leftrightarrow x \cdot a = y \cdot b,$$
$$\forall(u,v) \approx (c,d) \Leftrightarrow u \cdot c = v \cdot d.$$

Vynásobíme mezi sebou levé a pravé strany rovností a dostáváme $x \cdot a \cdot u \cdot c = $ $= y \cdot b \cdot v \cdot d$. To je podle definice relace $\approx$ a za využití komutativity násobení $(x \cdot u, y \cdot v) \approx (a \cdot c, b \cdot d)$.

Definice násobení na $\mathbb{Q}$ je tedy korektní.

4. Ukážeme, že struktura $(\mathbb{Q}, \cdot)$ je komutativní monoid. Jeho jednotkovým prvek je $T_{(1,1)}$.

Věta 23. *Struktura* $(\mathbb{Q}, \cdot)$ *tvoří komutativní monoid.*

Důkaz. Aby struktura byla komutativní monoid, je zapotřebí, aby byla asociativní, komutativní a existoval neutrální prvek vzhledem k operaci.

(a) Začneme důkazem asociativity. Chceme ukázat, že platí:

$$\forall T_{(a,b)}, T_{(a,b)}, T_{(a,b)} \in \mathbb{Q} : (T_{(a,b)} \cdot T_{(c,d)}) \cdot T_{(e,f)} = T_{(a,b)} \cdot (T_{(c,d)} \cdot T_{(e,f)}).$$

Součiny přepíšeme podle definice násobení v $\mathbb{Q}$:

$$T_{(a \cdot c, b \cdot d)} \cdot T_{(e,f)} = T_{(a \cdot c \cdot e, b \cdot d \cdot f)} = T_{(a,b)} \cdot T_{(c \cdot e, d \cdot f)}.$$

Struktura je asociativní.

(b) Ptáme se, zda je struktura komutativní. Ukážeme, že platí:

$$\forall T_{(a,b)}, T_{(c,d)} \in \mathbb{Q} : T_{(a,b)} \cdot T_{(c,d)} = T_{(c,d)} \cdot T_{(a,b)}.$$

Součiny přepíšeme podle definice násobení v $\mathbb{Q}$ a ukážeme, že platí:

$$T_{(a\cdot c, b\cdot d)} = T_{(c\cdot a, d\cdot b)}.$$

Čísla a, c jsou prvky $\mathbb{Z}$ a čísla b, d jsou prvky $\mathbb{Z} - \{0\}$. Násobení celých čísel je komutativní, tedy $a \cdot c = c \cdot a$ a $b \cdot d = d \cdot b$. Proto $T_{(a\cdot c, b\cdot d)} =$ $= T_{(c\cdot a, d\cdot b)}$. Násobení racionálních čísel je tedy komutativní.

(c) Nyní ověříme, že prvek $T_{(1,1)}$ je neutrálním prvkem vzhledem k operaci $\cdot$. Chceme ukázat platnost tvrzení:

$$\forall T_{(a,b)} \in \mathbb{Q} : T_{(a,b)} \cdot T_{(1,1)} = T_{(1,1)} \cdot T_{(a,b)} = T_{(a,b)}.$$

Komutativita operace $\cdot$ byla dokázána v (b). Stačí tedy ukázat, že platí:

$$T_{(a,b)} \cdot T_{(1,1)} = T_{(a,b)}.$$

Přepíšeme levou stranu rovnosti podle definice násobení racionálních čísel:

$$T_{(a,b)} \cdot T_{(1,1)} = T_{(a\cdot 1, b\cdot 1)}.$$

Chceme ukázat, že platí:

$$T_{(a\cdot 1, b\cdot 1)} = T_{(a,b)}.$$

Protože čísla a, b jsou prvky $\mathbb{Z}$, víme, že platí $a \cdot 1 = a$ a $b \cdot 1 = b$. Levá strana rovnosti se rovná pravé, a násobení racionálních čísel tak má opravdu neutrální prvek $T_{(1,1)}$.

Struktura $(\mathbb{Q}, \cdot)$ tedy tvoří komutativní monoid. Neutrálním prvkem je $T_{(1,1)}$.

$\square$

5. Chceme sestrojit takovou strukturu, aby vzhledem k násobení existovaly inverzní prvky k nenulovým racionálním číslům. Označíme $\mathbb{Q}_0 = \{T_{(a,b)} \in \in \mathbb{Q}; a \neq 0\}$. Existuje ke každému prvku z $\mathbb{Q}_0$ inverzní prvek vzhledem k operaci $\cdot$? Ukážeme, že pro každý prvek $T_{(a,b)} \in \mathbb{Q}_0$ existuje inverzní prvek ve tvaru $T_{(b,a)} \in \mathbb{Q}_0$:

$$T_{(a,b)} \cdot T_{(b,a)} = T_{(a \cdot b, b \cdot a)} = T_{(a \cdot b, a \cdot b)} = T_{(1,1)}.$$

Tím je ověřeno, že $T_{(b,a)}$ je inverzním prvkem pro $T_{(a,b)}$. Struktura $(\mathbb{Q}_0, \cdot)$ je tedy Abelova grupa.

6. Chceme izomorfně vnořit $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Q}$. Množinu tříd ekvivalence, které mají reprezentanta $(a, 1), a \in \mathbb{Z}$, označme $\mathbb{Q}'$. Definujme zobrazení f takto:

$$f : (\mathbb{Z}, \cdot) \to (\mathbb{Q}', \cdot), f(a) = T_{(a,1)}.$$

Zobrazení f je izomorfismem. Označíme $\mathbb{Q}'_0$ množinu tříd z $\mathbb{Q}$, které mají reprezentanta $(p, 1), p \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Zúžení izomorfismu na $\mathbb{Z} - \{0\}$ je izomorfismem mezi strukturami $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ a $(\mathbb{Q}' \bigcap \mathbb{Q}'_0, \cdot)$.

(Kubínová, Novotná, 1997, s. 153)

6.1.1 Značení

Platí $f : (\mathbb{Z}, \cdot) \to (\mathbb{Q}', \cdot), f(a) = T_{(a,1)}$, je izomorfismus, můžeme tedy prvky ve tvaru $T_{(a,1)}$ značit a.

Také platí, že každý prvek $\mathbb{Q}$ lze rozepsat jako následující součin:

$$T_{(a,b)} = T_{(a,1)} \cdot T_{(1,b)} = T_{(a,1)} \cdot (T_{(b,1)})^{-1} = a \cdot b^{-1}.$$

Prvek a^{-1} označíme $\frac{1}{a}$. V dalším textu $T_{(a,b)}$ budeme značit $\frac{a}{b}$.

(Kubínová, Novotná, 1997)

6.2 Operace na množině racionálních čísel

6.2.1 Vlastnosti operace násobení na množině $\mathbb{Q}$

Operaci $\cdot$ v $\mathbb{Q}$ jsme definovali takto:

$$\forall T_{a,b}, T_{c,d} \in \mathbb{Q} : T_{(a,b)} \cdot T_{(c,d)} = T_{(a \cdot c, b \cdot d)}.$$

Použijeme-li označení zavedené v kapitole 6.1.1, můžeme tuto definici přepsat takto:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

(Kubínová, Novotná, 1997)

Věta 24. $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$:

1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$, *(komutativita)*

2) $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$, *(asociativita)*

3) $\frac{1}{1} \cdot a = a$, *(1 je neutrální prvek)*

4) $\frac{a}{b} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{1} = 0$, *(nula je agresivní prvek)*

5) $\frac{a}{b} \neq 0 \Rightarrow \left(\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right) \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{e}{f}\right)$, *(pravidlo pro krácení)*

6) $\frac{a}{b} \neq 0 \Rightarrow \exists \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$. *(existence inverzních prvků)*

Důkaz. 1. Ukážeme, že platí $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$. Začneme upravovat levou stranu:

$$L = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \overset{\star}{=} \frac{c \cdot a}{d \cdot b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = P.$$

$\star$: Využili jsme komutativitu násobení celých čísel.

$L = P$, násobení racionálních čísel je tedy komutativní.

2. Chceme ukázat, že platí $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$.

$$L = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{(a \cdot c) \cdot e}{(b \cdot d) \cdot f} \overset{\star}{=} \frac{a \cdot (c \cdot e)}{b \cdot (d \cdot f)} =$$
$$= \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c \cdot e}{d \cdot f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = P.$$

$\star$: Využili jsme asociativitu násobení celých čísel.

$L = P$, násobení racionálních čísel je tedy asociativní.

3. Ověříme platnost $\frac{1}{1} \cdot a = a$.

$$\frac{1}{1} \cdot a \overset{viz\, 6.1.1}{=} 1 \cdot a \overset{\star}{=} a.$$

$\star$: Využili jsme toho, že jednička je neutální prvek vzhledem k násobení na množině celých čísel.

Jednička je neutrálním prvkem vzhledem k násobení i pro racionální čísla.

4. Dokážeme platnost $\frac{a}{b} \cdot \frac{0}{1} = 0$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 0}{b \cdot 1} \overset{\star}{=} \frac{0}{b} = T_{(0,b)} = T_{(0,0)} = 0.$$

$\star$: V čitateli jsme využili toho, že nula je agresivním prvkem vzhledem k násobení celých čísel. Ve jmenovateli jsme využili neutrálnosti prvku 1 vzhledem k násobení celých čísel.

Nula je tedy agresivní vzhledem k násobení racionálních čísel.

6. Nejprve dokážeme existenci inverzních prvků vzhledem k násobení. Dokážeme, že pro všechna $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\} \quad \exists (\frac{a}{b})^{-1} : \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = 1$.

   Nechť $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$. Ukážeme, že $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ je $\frac{b}{a}$:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{a \cdot b}{a \cdot b} = T_{(a \cdot b, a \cdot b)} = T_{(1,1)} = 1.$$

   Pro každý prvek $\mathbb{Q}$ kromě nuly existuje inverzní prvek vzhledem k násobení.

5. Nyní můžeme dokázat pravidlo pro krácení. Ukážeme, že pro všechna $\frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ a $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ platí $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right) \Rightarrow \left(\frac{c}{d} = \frac{e}{f}\right)$.

   Protože $\frac{a}{b} \neq 0$, existuje podle 6) inverzní prvek $\frac{b}{a}$. Obě strany rovnosti $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$ inverzním prvkem $\frac{b}{a}$ vynásobíme:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}, \\ 1 \cdot \frac{c}{d} &= 1 \cdot \frac{e}{f}, \\ \frac{c}{d} &= \frac{e}{f}. \end{aligned}$$

   Pravidlo pro krácení tedy platí.

□

6.2.2 Definice a vlastnosti operace sčítání na množině $\mathbb{Q}$

Definice 20. Sčítání racionálních čísel definujeme takto:

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} : \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$

(Kubínová, Novotná, 1997)

Zapsáno pomocí tříd:

$$T_{(a,b)} + T_{(c,d)} = T_{(a \cdot d + c \cdot b, b \cdot d)}.$$

Takto definovaná operace + na $\mathbb{Q}$ splňuje podmínky:

i) $T_{(a \cdot d + c \cdot b, b \cdot d)} \in \mathbb{Q}$,

ii) $\forall (x,y) \in T_{(a,b)}, \forall (u,v) \in T_{(c,d)} : (x \cdot v + u \cdot y, y \cdot v) \in T_{(a \cdot d + c \cdot b, b \cdot d)}$.

Proto je korektní.

Věta 25. *Pro všechna $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ platí následující vlastnosti:*

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$, *(komutativita)*

2) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$, *(asociativita)*

3) $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}$, *(nula je neutrální prvek)*

4) $\exists \frac{x}{y} : \frac{a}{b} + \frac{x}{y} = 0$, *(existence opačných prvků)*

5) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$. *(násobení je distributivní vzhledem ke sčítání)*

Důkaz. 1) Dokážeme, že platí $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$.

$$L = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \overset{\star}{=} \frac{c \cdot b + a \cdot d}{d \cdot b} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = P.$$

$\star$: Využili jsme komutativitu násobení a komutativitu sčítání celých čísel.

$L = P$, sčítání racionálních čísel je tedy komutativní.

2) Ukážeme, že platí $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} L = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} + \frac{e}{f} = \frac{(a \cdot d + c \cdot b) \cdot f + e \cdot b \cdot d}{b \cdot d \cdot f} \overset{\star}{=} \frac{a \cdot d \cdot f + c \cdot b \cdot f + e \cdot b \cdot d}{b \cdot d \cdot f} \\ P = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c \cdot f + e \cdot d}{d \cdot f} = \frac{a \cdot d \cdot f + (c \cdot f + e \cdot d) \cdot b}{b \cdot d \cdot f} \overset{\star}{=} \frac{a \cdot d \cdot f + c \cdot b \cdot f + e \cdot b \cdot d}{b \cdot d \cdot f} \end{array}\right\} L = P.$$

$\star$: Využili jsme distributivitu a komutativitu celých čísel.

$L = P$, sčítání racionálních čísel je tedy asociativní.

3) Ukážeme, že platí $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot b}{b \cdot 1} \overset{\star}{=} \frac{a + 0}{b} = \frac{a}{b}.$$

$\star$: Využili jsme toho, že jednička je jednotkový prvek a nula agresivní prvek vzhledem k násobení celých čísel.

Nula je neutrální prvek vzhledem ke sčítání racionálních čísel.

4) Dokážeme existenci opačných prvků. Nechť $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Dokážeme, že pro $\frac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$ platí $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$.

Existence plyne z existence opačných prvků pro celá čísla. Stačí ukázat, že $\frac{-a}{b}$ je opačné číslo k $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a \cdot b + (-a) \cdot b}{b \cdot b} \overset{\star}{=} \frac{0}{b \cdot b} = 0,$$

$\star$: Využili jsme vlastnosti opačného prvku pro celá čísla.

Platí, že pro každé racionální číslo existuje opačný prvek vzhledem ke sčítání a je pro každé číslo $\frac{a}{b}$ ve tvaru $\frac{-a}{b}$.

5) Dokážeme, že násobení racionálních čísel je distributivní vzhledem ke sčítání. Chceme ukázat, že pro všechna $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ platí $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$.

Upravíme každou stranu rovnosti zvlášť:

$$\left.\begin{aligned} L &= \left(\tfrac{a}{b} + \tfrac{c}{d}\right) \cdot \tfrac{e}{f} = \left(\tfrac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}\right) \tfrac{e}{f} = \tfrac{(a \cdot d + c \cdot b) \cdot e}{b \cdot d \cdot f} \overset{\star}{=} \tfrac{a \cdot d \cdot e + c \cdot b \cdot e}{b \cdot d \cdot f} \\ P &= \tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{e}{f} + \tfrac{c}{d} \cdot \tfrac{e}{f} = \tfrac{a \cdot e}{b \cdot f} + \tfrac{c \cdot e}{d \cdot f} = \tfrac{a \cdot e \cdot d \cdot f + c \cdot e \cdot b \cdot f}{b \cdot f \cdot f \cdot d \cdot e} \overset{\star}{=} \tfrac{f}{f} \cdot \tfrac{a \cdot d \cdot e + c \cdot b \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = \tfrac{a \cdot d \cdot e + c \cdot b \cdot e}{b \cdot d \cdot f} \end{aligned}\right\} L = P$$

$\star$: Využili jsme distributivitu násobení vzhledem ke sčítání na celých číslech.

$L = P$, tedy násobení racionálních čísel je distributivní vzhledem ke sčítání.

$\square$

Pozn. 24. Důkazy vět 24, 25 jsou vlastní. Věty pocházejí ze skript *Posloupnosti a řady* (Kubínová, Novotná, 1997).

6.3 Spočetnost

Věta 26. *Množina racionálních čísel je nekonečnou množinou.*

Důkaz. Nekonečná množina $\mathbb{Z}$ je podmnožinou množiny $\mathbb{Q}$. Proto je i množina $\mathbb{Q}$ nekonečná. $\square$

Věta 27. *Množina racionálních čísel je spočetná množina.*

Důkaz. Proto, abychom mohli racionální čísla snadno bijektivně přiřadit k přirozeným, zapíšeme je do matice:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{-2}{1} & \cdots \\
\frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} & \cdots \\
\frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \cdots \\
\frac{0}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{-2}{4} & \cdots \\
\frac{0}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Nyní zlomky seřadíme do posloupnosti tak, jak je znázorněno na obrázku 12.

Prvky matice tedy řadíme po diagonálách. Posloupnost, kterou dostáváme, je:

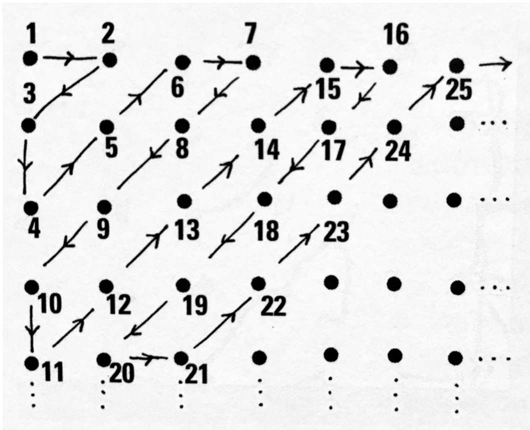
$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2} \cdots$$

Z definice 9 víme, že můžeme-li množinu chápat jako posloupnost, je spočetná. Tedy množina racionálních čísel je spočetnou množinou.

$\square$

6.4 Uspořádání na množině racionálních čísel

Pozn. 25. Každé racionální číslo $\frac{a}{b}$ lze zapsat ve tvaru podílu tak, že $b > 0$ (Kubínová, Novotná, 1997). Toho využijeme v důkazu věty 28.



Obrázek 12: Způsob, jakým řadíme racionální čísla z matice do posloupnosti (Crilly, 2010, s. 30)

Definice 21. Relace $<$ je na $\mathbb{Q}$ definována takto:

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \quad (a, b > 0) : \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d < c \cdot b$$

(Kubínová, Novotná, 1997, s. 153)

Věta 28. *Relace $<$ je na $\mathbb{Q}$ tranzitivní a trichotomická.*

Důkaz. i. Nejprve dokážeme tranzitivitu relace $<$. Chceme ukázat, že pro všechna $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ platí $\left[\left(\frac{a}{b} < \frac{c}{d}\right) \wedge \left(\frac{c}{d} < \frac{e}{f}\right)\right] \Rightarrow \left(\frac{a}{b} < \frac{e}{f}\right)$. Předpokládejme také, že čísla $b, d, f \in \mathbb{Z}$ jsou větší, než nula (viz poznámka 25). Podle definice 21 platí:

$$\left(\frac{a}{b} < \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow a \cdot d < c \cdot b,$$
$$\left(\frac{c}{d} < \frac{e}{f}\right) \Leftrightarrow c \cdot f < e \cdot d.$$

Vynásobíme první nerovnost číslem f a druhou nerovnost číslem b. Obě čísla jsou kladná celá. Platí:

$$(a \cdot d \cdot f < c \cdot b \cdot f) \wedge (b \cdot c \cdot f < b \cdot e \cdot d).$$

Čísla a, b, c, d, e, f jsou celá. Pro celá čísla je relace $<$ tranzitivní (viz. věta 21). Proto:

$$a \cdot d \cdot f < b \cdot e \cdot d.$$

Protože d je kladné celé číslo a proto, že násobení celých čísel je komutativní, platí:

$$a \cdot f < e \cdot b.$$

Podle definice 21 pak tedy $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$.

Relace $<$ je na množině racionálních čísel tranzitivní.

ii. Nyní ukážeme, že relace $<$ je na množině racionálních čísel trichotomická. Chceme ukázat, že pro všechna $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ platí právě jedna z možností $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Podle věty 21 je relace $<$ trichotomická pro celá čísla. Tedy pro všechna $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ nastává právě jedna z možností:

(a) $a \cdot d = c \cdot b$,

(b) $a \cdot d < c \cdot b$,

(c) $a \cdot d > c \cdot b$.

Proto i na racionálních číslech je relace $<$ trichotomická.

Relace $<$ je tranzitivní a trichotomická na množině racionálních číslech. Je tedy uspořádáním na $\mathbb{Q}$. □

6.5 Racionální čísla jako algebraická struktura

Definice 22. Algebraickou strukturu $(T, +, \cdot)$ nazveme tělesem, jestliže $(T, +)$ a $(T - \{0\}, \cdot)$ tvoří Abelovu grupu a operace $\cdot$ je distributivní vzhledem k operaci $+$.

Věta 29. *Struktura* $(\mathbb{Q} - \{0\}, +, \cdot)$ *tvoří těleso.*

Důkaz. Že struktura $(\mathbb{Q}, +)$ je Abelovou grupou, jsme ověřili ve větě 25. Obdobně jsme ukázali, že $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ tvoří Abelovu grupu ve větě 24. Ve stejné větě jsme dokázali také distributivitu násobení vzhledem ke sčítání.

Struktura $(\mathbb{Q} - \{0\}, +, \cdot)$ tvoří těleso. $\square$