8 Komplexní čísla

Posledním na gymnáziích probíraným oborem je obor komplexních (imaginárních) čísel. V učebnici *Matematika pro gymnázia, Komplexní čísla* (Calda, 1994) jsou komplexní čísla definována takto: „**Komplexním číslem** nazveme výraz tvaru $a + b\mathrm{i}$, kde a, b jsou reálná čísla a i je číslo, pro něž $\mathrm{i}^2 = -1$. V komplexním čísle $a + b\mathrm{i}$ se číslo a nazývá **reálná část**, číslo b - nikoli $b\mathrm{i}$ - **imaginární část**; číslo i se nazývá **imaginární jednotka**.“ (Calda, 1994, s. 12)

Motivací k zavedení komplexních čísel je požadavek na řešení rovnic typu $x^2 + 1 = 0$ (Fine, 1907). Historicky však potřeba zavést komplexní čísla vzešla z rovnic kubických. Acheson (2002) na straně 167 demonstruje potřebu komplexních čísel na příkladu $x^3 = 15x + 4$. Když Cardano popsal v šestnáctém století vzoce pro řešení kubických rovnic (viz poznámka 35), dostal se jejich použitím ke tvaru (Acheson, 2002):

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Bez čísel komplexních bychom nyní učinili závěr, že rovnice nemá řešení, jelikož $\sqrt{-121}$ neexistuje. Ovšem Cardano si uvědomoval, že reálné řešení existuje, rovnice je splněna pro $x = 4$. Roku 1572 tento problém vyřešil Rafael Bombelli. (Crilly, 2010; Acheson, 2002).

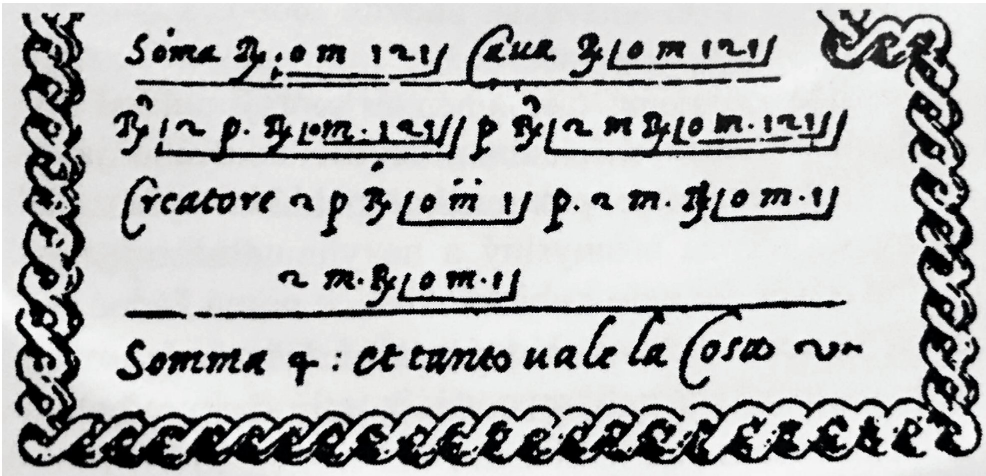
Bombelli s $\sqrt{-1}$ pracoval jako s běžným číslem. Pro vyřešení Cardanova problému umocnil výraz $2 + \sqrt{-1}$ na třetí. Tak dostal výraz $8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$. Platí tedy, že $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$, a obdobně bychom pro $(2 - \sqrt{-1})^3$ dostali $2 - 11\sqrt{-1}$. Platí proto:

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = 4,$$

což je reálným řešením rovnice. (Acheson, 2002)

Pozn. 35. Rovnice $x^3 = 15x + 4$ má ještě kořeny $x = -2 \pm \sqrt{3}$, které bychom dopočítali buď vydělením rovnice polynomem $(x - 4)$ a následným dořešením kvadratické rovnice, nebo také z Cardanových vzorců, které jsou uvedeny například v *Mathematical Handbook of Formulas and Tables* (Spiegel, Liu, 1968, s. 32).

Na obrázku 17 je vidět, jak Bombelli pracuje s výrazem odmocnina (zapsaným jinak, než jsme dnes zvyklí) z $0\,m\,121$, kde m značí znaménko minus. (Acheson, 2002)


Sõma R.c.⌊0 m 121⌋ Caua R.c.⌊0 m 121⌋
R.c.⌊2 p. R.⌊0 m. 121⌋⌋ p R.c.⌊2 m R.⌊0 m. 121⌋⌋
Creatore 2 p R.⌊0 m 1⌋ p. 2 m. R.⌊0 m. 1⌋
2 m. R.⌊0 m. 1⌋
Somma 4 : et tanto uale la Cosa 4

Obrázek 17: Bombelli v knize *L'Algebra* (1572) pracuje s $\sqrt{-121}$, (Acheson, 2002, s. 168)

Euler roku 1777 jako první pro $\sqrt{-1}$ použil symbol i (Crilly, 2010). Fine (1907) za prvního označil Gausse.

Rozdělení čísel na reálná a imaginární není podle Finea (1907) zcela vhodné. O číslech komplexních říká, že nejsou o nic více imaginární, než čísla záporná nebo zlomky. Název imaginární pochází pravděpodobně z úst Reného Descarta. Existence imaginárních čísel byla otázkou filosofů, zatímco pro matematiky je komplexní jednotka pouhým znakem, stejně jako například znaménko minus. (Crilly, 2010; Fine, 1907).

„Hamilton považoval komplexní čísla za uspořádanou dvojici reálných čísel (a, b)*, čímž odkryl jejich dvojrozměrný charakter a tajemnou* $\sqrt{-1}$ *zbavil kouzla.“* (Crilly, 2010, s. 35)

Hamilton začal komplexní čísla interpretovat jako uspořádané dvojice, čímž ukázal, že znak i je pouhým pozičním znakem, a tedy ničím nepředstavitelným nebo imaginárním. (Crilly, 2010)

Téměř ve stejné době komplexní čísla začali znázorňovat do roviny matematici Gauss a Argand. Proto při znároznění komplexních čísel do roviny mluvíme o Gaussově/Argandově rovině. (Courant, Robbins, 1996; Crilly, 2010; Calda, 1994)

Jako uspořádanou dvojici konstruujeme čísla i v následujícím zavedení.

8.1 Konstrukce komplexních čísel

Definice 33. Množinu $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nazveme množinou komplexních čísel. Protože je $\mathbb{C}$ rovno kartézskému součinu, jsou prvky množiny $\mathbb{C}$ uspořádané dvojice $z = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, pro které platí:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d).$$

(Kubínová, Novotná, 1996, s. 163)

8.2 Operace na množině komplexních čísel

Definice 34. Sčítat a násobit komplexní čísla budeme takto:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : &(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \\ &(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c). \end{aligned}$$

(Kubínová, Novotná, 1996, s. 163)

8.3 Spočetnost a mohutnost množiny komplexních čísel

Věta 38. *Množina komplexních čísel je nekonečná množina.*

Důkaz. Množina reálných čísel je nekonečná. Komplexní čísla jsou uspořádanou dvojicí reálných čísel. Proto jsou také nekonečná. □

Věta 39. *Množina komplexních čísel je nespočetná.*

Důkaz. Množina reálných čísel je nespočetná množina. Komplexní čísla jsou uspořádanou dvojicí reálných čísel. Proto musí být také nespočetná. □

8.4 Uspořádání na množině komplexních čísel

Pozn. 36. Množinu reálných čísel lze izomorfně vnořit do množiny čísel komplexních. Podrobný postup nebudeme pro rozsah práce uvádět. Těleso reálných čísel ztotožníme se strukturou $\mathbb{C}' = \{z; , z = (a, 0), a \in \mathbb{R}\}$. Dvojici $(a, 0)$ budeme značit a.

Označme $\mathrm{i} = (0, 1)$. Použijeme definici sčítání a násobení komplexních čísel. Pak můžeme každé komplexní číslo (a, b) zapsat ve tvaru $(a, 0) + (b, 0)\mathrm{i}$, tj. $a + b\mathrm{i}$.

Věta 40. *Množinu komplexních čísel nelze uspořádat.*

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje uspořádání $<$ na množině komplexních čísel. Pro uspořádání platí, že je-li $a \neq 0$, je $a^2 > 0$. Protože $\mathrm{i} \neq 0$, je $\mathrm{i}^2 = -1 > 0$. Obě strany poslední nerovnosti vynásobíme číslem -1 a dostáváme $1 < 0$. Číslo $\mathrm{i}^2 \neq 0$, proto $(\mathrm{i}^2)^2 = 1 > 0$.

Ukázali jsme, že $(1 > 0) \wedge (1 < 0)$. To je spor s trichotomií.

Množinu komplexních čísel nelze uspořádat.

□

8.5 Komplexní čísla jako algebraická struktura

Věta 41. *Množina komplexních čísel spolu s operacemi $+$ a $\cdot$ tvoří těleso.*

Důkaz. Musíme pro operaci $+$ ověřit následující vlastnosti pro všechna $z_1, z_2, z_3 \in$ $\in \mathbb{C}$:

1.a) $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$, *(uzavřenost operace)*

2.a) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, *(asociativita)*

3.a) $\exists 0 \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{Z} : z + 0 = 0 + z = z$, *(existence neutrálního prvku)*

4.a) $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists(-z) \in \mathbb{C} : z + (-z) = 0$, *(existence opačných prvků)*

5.a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. *(komutativita)*

Pro operaci $\cdot$ musíme ověřit následující vlastnosti pro všechna $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

1.b) $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$, *(uzavřenost operace)*

2.b) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$, *(asociativita)*

3.b) $\exists 1 \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{Z} : 1 \cdot z = z \cdot 1 = z$, *(existence neutrálního prvku)*

4.b) $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \quad \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : z \cdot z^{-1} = 1$, *(existence inverzních prvků)*

5.b) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$. *(komutativita)*

A navíc ještě musíme ověřit, že platí pro všechna $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

1.c) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$. *(násobení je distributivní ke sčítání)*

Pro důkaz budeme využívat tvaru komplexního čísla jako uspořádané dvojice reálných čísel, jejichž vlastnosti již známe. Nechť tedy $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d)$ a $z_3 = (e, f)$, kde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

1.a) Chceme ukázat, že $(a, b) + (c, d)$ patří také do množiny komplexních čísel. Sečteme čísla podle definice 34:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

čísla a, b, c, d jsou reálná, tedy i součty čísel $a+c$ a $b+d$ jsou reálná čísla. Proto podle definice 33 je i součet komplexních čísel komplexním číslem a operace + je vnitřní operací na množině komplexních čísel.

2.a) Znovu využijeme definici 34 a upravíme zvlášť levou a zvlášť pravou stranu rovnosti:

$$\left.\begin{aligned} L &= ((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = (a + c + e, b + d + f) \\ R &= (a, b) + ((c, d) + (e, f)) = (a, b) + (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f) \end{aligned}\right\} L = P.$$

Sčítání je na množině komplexních čísel asociativní.

3.a) Dokážeme, že $(0, 0)$ je neutrální prvek pro operaci +. Využijeme k tomu definici 34:

$$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) \stackrel{\star}{=} (a, b),$$

$$(0, 0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) \stackrel{\star}{=} (a, b).$$

$\star$: Využili jsme větu 31.

Operace + je na množině komplexních čísel asociativní.

4.a) Dokážeme, že opačným číslem k číslu (a, b) je komplexní číslo $(-a, -b)$. Opět využijeme definici 34:

$$(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) \stackrel{\star}{=} (0, 0).$$

$\star$: Využili jsme větu 31.

Opačným prvkem k prvku (a, b) je tedy opravdu prvek $(-a, -b)$. Značit ho budeme $-z$.

5.a) Pro důkaz komutativity znovu využijeme větu 34. Chceme ukázat, že pro všechna $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ platí $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$. Upravíme každou stranu rovnosti zvlášť:

$$\left.\begin{aligned} L &= (a,b)+(c,d) = (a+c,b+d) \\ R &= (c,d)+(a,b) = (c+a,d+b) \overset{\star}{=} (a+c,b+d) \end{aligned}\right\} L = P.$$

$\star$: Využili jsme větu 31.

Sčítání je na množině komplexních čísel komutativní.

1.b) Chceme ukázat, že součin dvou komplexních čísel je prvkem množiny komplexních čísel:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c - b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c),$$

a,b,c,d jsou reálná čísla, proto i $a\cdot c - b\cdot d$ a $a\cdot d + b\cdot c$ jsou podle věty 37 reálná čísla. Součin je tedy podle definice 33 prvkem množiny $\mathbb{C}$.

2.b) Dokážeme asociativitu násobení komplexních čísel. Chceme ukázat, že pro všechna $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{C}$ platí $((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$. Upravíme zvlášť levou a zvlášť pravou stranu rovnosti. Využijeme definici 34:

$$\begin{aligned} L &= ((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (a\cdot c - b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c)\cdot(e,f) = \\ &= ((a\cdot c - b\cdot d)\cdot(e) - (a\cdot d + b\cdot c)\cdot f, (a\cdot c - b\cdot d)\cdot f + (a\cdot d + b\cdot c)\cdot e) = \\ &\overset{\star}{=} (a\cdot c\cdot e - b\cdot d\cdot e - a\cdot d\cdot f - b\cdot c\cdot f, a\cdot c\cdot f - b\cdot d\cdot f + a\cdot d\cdot e + b\cdot c\cdot e) = \\ &\overset{*}{=} (a\cdot c\cdot e - a\cdot d\cdot f - b\cdot c\cdot f - b\cdot d\cdot e, a\cdot c\cdot f + a\cdot d\cdot e + b\cdot c\cdot e - b\cdot d\cdot f), \\ R &= (a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f)) = (a,b)\cdot(c\cdot e - d\cdot f, c\cdot f + d\cdot e) = \\ &= (a\cdot(c\cdot e - d\cdot f) - b\cdot(c\cdot f + d\cdot e), a\cdot(c\cdot f + d\cdot e) + b\cdot(c\cdot e - d\cdot f)) = \\ &\overset{\star}{=} (a\cdot c\cdot e - a\cdot d\cdot f - b\cdot c\cdot f - b\cdot d\cdot e, a\cdot c\cdot f + a\cdot d\cdot e + b\cdot c\cdot e - b\cdot d\cdot f). \end{aligned}$$

$\star$: Využili jsme větu 32.

$*$: Využili jsme větu 31.

$L = P$. Násobení je tedy asociativní na množině komplexních čísel.

3.b) Dokážeme, že $(1,0)$ je neutrálním prvkem pro operaci $\cdot$. Využijeme k tomu definici 34:

$$(a,b)\cdot(1,0)=(a\cdot 1-b\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 1)\stackrel{\star}{=}(a,b),$$

$$(1,0)\cdot(a,b)=(1\cdot a-0\cdot b, 1\cdot b+0\cdot a)\stackrel{\star}{=}(a,b).$$

$\star$: Využili jsme věty 32 a 31.

Prvek $(1,0)$ je tedy neutrálním prvkem pro násobení komplexních čísel.

4.b) Předpokládejme, že inverzním prvkem čísla (a,b) vzhledem k násobení je $\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$. Dokážeme, že opravdu je:

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\frac{-a\cdot b+a\cdot b}{a^2+b^2}\right)\stackrel{\star}{=}(1,0).$$

$\star$: Využili jsme větu 31.

Ke každému nenulovému komplexnímu číslu najdeme inverzní prvek ve tvaru $(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2})$.

5.b) Pro důkaz komutativity násobení upravíme obě strany rovnosti podle definice 34:

$$\left.\begin{aligned}L&=(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c)\\P&=(c,d)\cdot(a,b)=(c\cdot a-d\cdot b, c\cdot b+d\cdot a)\stackrel{\star}{=}(a\cdot c-b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c)\end{aligned}\right\} L=P.$$

$\star$: Využili jsme věty 32 a 31.

Násobení na množině komplexních čísel je komutativní.

1.c) Pro důkaz distributivity upravíme levou i pravou stranu podle definice 34 a ukážeme, že se rovnají:

$$
\begin{aligned}
L &= ((a,b)+(c,d))\cdot(e,f) = (a+c,b+d)\cdot(e,f) = \\
&= ((a+c)\cdot e-(b+d)\cdot f,(a+c)\cdot f+(b+d)\cdot e) = \\
&\stackrel{\star}{=} (a\cdot e+c\cdot e-b\cdot f-d\cdot f,a\cdot f+c\cdot f+b\cdot e+d\cdot e),\\
P &= (a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f) = (a\cdot e-b\cdot f,a\cdot f+b\cdot e)+ \\
&+ (c\cdot e-d\cdot f,c\cdot f+d\cdot e) = (a\cdot e-b\cdot f+c\cdot e-d\cdot f,\\
&a\cdot f+b\cdot e+c\cdot f+d\cdot e),\\
L &= P.
\end{aligned}
$$

$\star$: Využili jsme větu 32.

Násobení je na množině komplexních čísel distributivní vzhledem ke sčítání.

Ukázali jsme, že struktura $(\mathbb{C},+)$ tvoří Abelovu grupu. Také jsme ukázali, že množina $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$ tvoří Abelovu grupu a nakonec distributivitu násobení vzhledem ke sčítání. Struktura $(\mathbb{C},+,\cdot)$ je tedy tělesem. $\square$