4, 1. ZÁKLADNÍ POJMY

4, 1.1. Definice. *Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých* nad tělesem T nazýváme soustavu

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \ldots+ & a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \ldots+ & a_{2n}x_n = & b_2, \\ \ldots, & & & & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \ldots+ & a_{mn}x_n = & b_m, \end{array} \qquad (*)$$

kde $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m$ jsou prvky z T. Symboly $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, se nazývají *neznámé*, prvky $a_{ik},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, n$, *koeficienty* u neznámých, prvky $b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$, *pravé strany rovnic*.

4, 1.2. Definice. Řekneme, že n-rozměrný aritmetický vektor $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in V_n(T)$, je *řešením i-té rovnice* soustavy $(*)$, jestliže platí

$$a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \ldots + a_{in}r_n = b_i.$$

Řešením soustavy $(*)$ nazýváme každý n-rozměrný aritmetický vektor $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in V_n(T)$, který je řešením všech rovnic soustavy.

4, 1.3. Poznámka. Označíme-li $\underline{A} = (a_{ik})$ matici typu (m, n) tvořenou koeficienty u neznámých, píšeme soustavu $(*)$ maticově ve tvaru

$$\underline{A}\,\underline{x}^T = \underline{b}^T,$$

kde $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ je *vektor neznámých*, $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in V_m(T)$ vektor *pravých stran soustavy* $(*)$. Matici $\underline{A}$ nazýváme *maticí soustavy* $(*)$. Matici $\underline{A}_r$ typu $(m, n+1)$, která vznikne z matice $\underline{A}$ tak, že do $(n+1)$-ho sloupce zapíšeme vektor $\underline{b}^T$, tj.

$$\underline{A}_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* $(*)$.

4, 1.4. Frobeniova věta. Soustava $\underline{A}\,\underline{x}^T = \underline{b}^T$ má řešení, právě když hodnost matice $\underline{A}$ je rovna hodnosti rozšířené matice $\underline{A}_r$.

4, 1.5. Věta. Nechť hod $\underline{A}$ = hod $\underline{A}_r = h, n$ je počet neznámých.
a) Soustava $\underline{A}\,\underline{x}^T = \underline{b}^T$ má jediné řešení, právě když platí $h = n$.
b) Soustava $\underline{A}\,\underline{x}^T = \underline{b}^T$ má nekonečně mnoho řešení, právě když platí $h < n$.

4, 1.6. Definice. Soustava $\underline{A}\,\underline{x}^T = \underline{b}^T$ se nazývá *homogenní*, resp. *nehomogenní*, je-li $\underline{b} = \underline{o}$, resp. $\underline{b} \neq \underline{o}$.

4, 1.7. Věta. Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, tzv. triviální řešení $\underline{o} = (0, 0, \ldots, 0)$.

4, 1.8. Věta. Pro homogenní soustavu rovnic $\underline{A}\,\underline{x}^T = o^T$ platí: Je-li hod $\underline{A} = h$, má tato soustava $n - h$ lineárně nezávislých řešení. Množina všech řešení obsahuje právě všechny lineární kombinace těchto $n - h$ řešení.

4, 1.9. Věta. Všechna řešení nehomogenní soustavy $\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T$ můžeme vyjádřit jako součet jednoho libovolného řešení této soustavy a všech řešení příslušné homogenní soustavy $\underline{A}\,\underline{x}^T = o^T$.

4, 1.10. Definice. O dvou soustavách lineárních rovnic řekneme, že jsou *ekvivalentní*, jestliže mají stejné množiny řešení.

4, 1.11. Věta. Nechť jsou dány dvě soustavy lineárních rovnic nad týmž tělesem T

$$\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T, \ \underline{C}\,\underline{x}^T = d^T$$

takové, že rozšířená matice $\underline{C}_r$ vznikla elementárními řádkovými úpravami z matice $\underline{A}_r$. Pak jsou obě soustavy ekvivalentní.

4, 1.12. Poznámka. Při konkrétním výpočtu je někdy účelné provést jednoduche úpravy i se sloupci. Pozor ! Vyměníme-li však i-tý slopec matice $\underline{A}$ s jejím j-tým sloupcem, vymění se ve vektoru řešení jeho i-tý a j-tý člen. Vynásobení i-tého sloupce nenulovým prvkem $\alpha \in T$ představuje vynásobení i-tého členu řešení prvkem α^{-1}. Poslední slopec matice $\underline{A}_r$ nesmíme při elementárních sloupcových úpravách používat.

4, 1.13. Gaussova eliminační metoda řešení soustav. Řešme soustavu $\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T$. Matici $\underline{A}_r$ převedeme elementárními řádkovými úpravami (příp. jednoduchými úpravami se sloupci - viz 4,1.12) na ekvivalentní zobecněnou trojúhelníkovou matici $\underline{C}_r$. Úlohu nalézt všechna řešení soustavy $\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T$ jsme tak převedli na úlohu řešit soustavu s rozšířenou maticí $\underline{C}_r$, kde

$$\underline{C}_r = \left(\begin{array}{rrrrrrr|c} p_{11}, & p_{12}, & \ldots, & p_{1h}, & \ldots, & p_{1n} & & q_1 \\ 0, & p_{22}, & \ldots, & p_{2h}, & \ldots, & p_{2n} & & q_2 \\ \multicolumn{7}{c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & p_{hh}, & \ldots, & p_{hn} & & q_h \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \ldots, & 0 & & q_{h+1} \end{array}\right).$$

Je-li $q_{h+1} \neq 0$, nemá soustava řešení, je-li $q_{h+1} = 0$, můžeme libovolně volit $n - h$ neznámých a pomocí nich vypočítat zbývajících h neznámých.

4, 1.14. Postup při výpočtu inverzní matice . Matici $\underline{A}$ převedeme ekvivalentními řádkovými úpravami na jednotkovou matici a zároveň tytéž úpravy provádíme s jednotkovou maticí stejného řádu. Na konci procesu získáme z $\underline{A}$

jednotkovou matici $\underline{E}$ a z jednotkové matice $\underline{E}$ matici $\underline{A}^{-1}$. Schematicky zapsáno:

$$(\underline{A} \,|\, \underline{E}) \sim (\underline{E} \,|\, \underline{A}^{-1}).$$

4, 1.15. Poznámka . Popsané úpravy "dvojmatice" $(\underline{A} \,|\, \underline{E})$ vedoucí k inverzní matici provádíme pouze s řádky matice. Sloupce zde totiž znamenají koeficienty u neznámých v soustavách rovnic, jejichž pravé strany jsou aritmetické vektory s jedním prvkem rovným jednotkovému prvku z T a ostatní nulovému prvku z T. Změnami sloupců bychom změnili význam neznámých - viz 4, 1.12.