4, 2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

4, 2.1. Nalezněme všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1- & x_2+ & x_3- & 2x_4 = & 0, \\ & x_2+ & 2x_3- & x_4 = & -1, \\ 2x_1+ & x_2- & x_3- & 3x_4 = & 1, \\ -x_1- & x_2+ & & 2x_4 = & 0. \end{array}$$

Řešení . Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Na rozšířenou matici soustavy $\underline{A}_r$ provedeme postupně vhodné elementární řádkové úpravy:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & -1, & 1, & -2 & 0 \\ 0, & 1, & 2, & -1 & -1 \\ 2, & 1, & -1, & -3 & 1 \\ -1, & -1, & 0, & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & -1, & 1, & -2 & 0 \\ 0, & 1, & 2, & -1 & -1 \\ 0, & 3, & -3, & 1 & 1 \\ 0, & -2, & 1, & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & -1, & 1, & -2 & 0 \\ 0, & 1, & 2, & -1 & -1 \\ 0, & 0, & -9, & 4 & 4 \\ 0, & 0, & 5, & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & -1, & 1, & -2 & 0 \\ 0, & 1, & 2, & -1 & -1 \\ 0, & 0, & -9, & 4 & 4 \\ 0, & 0, & 0, & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Protože hod $\underline{A}$ = hod $\underline{A}_r = 4$, $n = 4$, má soustava právě jedno řešení. Ekvivalentní soustava je

$$\begin{array}{rrrrr} x_1- & x_2+ & x_3- & 2x_4 = & 0, \\ & x_2+ & 2x_3- & x_4 = & -1, \\ & - & 9x_3- & 4x_4 = & 4, \\ & & & x_4 = & 1, \end{array}$$

odkud postupně dostaneme (výpočet začínáme od čtvrté rovnice)

$$x_4 = 1,\ x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = 2.$$

Jediným řešením je vektor

$$\underline{r} = (2, 0, 0, 1).$$

4, 2.2. Nalezněme všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1+ & 2x_2- & x_3+ & & 2x_5 = & 4, \\ & x_2+ & x_3- & x_4 & = & 1, \\ x_1+ & 4x_2+ & x_3- & 2x_4+ & 2x_5 = & 60. \end{array}$$

Řešení . Postupujeme analogicky jako v příkl. 4, 2.1:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1, & 2, & -1, & 0, & 2 & 4 \\ 0, & 1, & 1, & -1, & 0 & 1 \\ 1, & 4, & 1, & -2, & 2 & 60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1, & 2, & -1, & 0, & 2 & 4 \\ 0, & 1, & 1, & -1, & 0 & 1 \\ 0, & 2, & 2, & -2, & 0 & 56 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1, & 2, & -1, & 0, & 2 & 4 \\ 0, & 1, & 1, & -1, & 0 & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 & 56 \end{array}\right).$$

Protože hod $\underline{A} = 2$, hod $\underline{A}_r = 3$ nemá soustava řešení.

4, 2.3. Nalezněme všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1- & x_2 & & +\ 2x_4- & x_5 & = & 1, \\ & x_2- & x_3- & x_4+ & 2x_5 & = & 1, \\ x_1+ & x_2- & 2x_3- & + & 3x_5 & = & 3, \\ -x_1+ & 2x_2- & x_3- & 3x_4+ & 3x_5 & = & 0, \end{array}$$

<u>Řešení .</u>

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1, & -1, & 0, & 2, & -1 & 1 \\ 0, & 1, & -1, & -1, & 2 & 1 \\ 1, & 1, & -2, & 0, & 3 & 3 \\ -1, & 2, & -1, & -3, & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1, & -1, & 0, & 2, & -1 & 1 \\ 0, & 1, & -1, & -1, & 2 & 1 \\ 0, & 2, & -2, & -2, & 4 & 2 \\ 0, & 1, & -1, & -1, & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Čtvrtý řádek je roven druhému, třetí řádek je dvojnásobek druhého, proto je hod $\underline{A} =$ hod $\underline{A}_r = 2$, $n = 5$. Soustava má nekonečně mnoho řešení, $5 - 2 = 3$ neznámé jsou volitelné. Označme např.

$$x_3 = t,\ x_4 = u,\ x_5 = v.$$

Z druhé rovnice ekvivalentní soustavy

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1- & x_2+ & & 2x_4- & x_5 & = & 1, \\ & x_2- & x_3- & x_4- & 2x_5 & = & 1 \end{array}$$

pak dostaneme

$$\text{tj.} \begin{array}{l} x_2 - t - u + 2v = 1, \\ x_2 = 1 + t + u - 2v, \end{array}$$

a z první rovnice

$$x_1 = 2 + t - u - v.$$

Libovolné řešení soustavy můžeme tedy psát ve tvaru

$$\underline{r} = (2 + t - u - v, 1 + t + u - 2v, t, u, v).$$

tj.

$$\underline{r} = (2, 1, 0, 0, 0) + \underline{t} = (1, 1, 1, 0, 0) + \underline{u} = (-1, 1, 0, 1, 0) + \underline{v} = (-1, -2, 0, 0, 1), t, u, v \in \mathbf{R}.$$

4, 2.4. Řešme soustavu nehomogenních lineárních rovnic danou rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 1, & a, & 2 & -7 \\ a+3, & 6, & -3 & 3 \end{array}\right)$$

a proveďme diskusi řešení vzhledem k parametru $a \in \mathbf{R}$.
Řešení . Matice soustavy obsahuje parametr a. Je výhodné vyměnit první a třetí sloupec (ve třetím sloupci se nevyskytuje parametr a). Na výměnu sloupců pak nesmíme zapomenout při řešení matice.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 2, & a, & 1 & -7 \\ -3, & 6, & a+3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 0, & a+2, & -1 & -15 \\ 0, & 3, & a+6 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 0, & 3, & a+6 & 15 \\ 0, & a+2, & -1 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 0, & 3, & a+6 & 15 \\ 0, & 0, & 3+(a+6)(a+2) & 45+15a+30 \end{array}\right).$$

Pro hodnost matic $\underline{A}$ a $\underline{A}_r$ je zřejmě rozhodující třetí řádek poslední matice. Platí:

$$\operatorname{hod} \underline{A} = 2 \Leftrightarrow 3 + (a+6)(a+2) = 0, \text{tj. } a^2 + 8a + 15 = 0;$$

kořeny této kvadratické rovnice jsou

$$a_1 = -5, a_2 = -3.$$

Pro $a \in \mathbf{R}$, $a_1 \neq -5$, $a_2 \neq -3$, je $\operatorname{hod} \underline{A} = 3$. Vypočítáme $\operatorname{hod} \underline{A}_r$:
a) Pro $a = -5$ je $45 + 15a + 30 = 15(a+5) = 0$, tj. $\operatorname{hod} \underline{A}_r = 2$.
b) Pro $a = -3$ je $15(a+5) \neq 0$, tedy $\operatorname{hod} \underline{A}_r = 3$.
c) Pro $a \neq -5$, $a \neq -3$ je $\operatorname{hod} \underline{A}_r = 3$.
Ad a). Platí $\operatorname{hod} \underline{A} = \operatorname{hod} \underline{A}_r = 2$, $n = 3$, soustava má tedy nekonečně mnoho řešení, jedna neznámé je volitelná. Řešení má obecně tvar (nesmíme zapomenout na záměnu sloupců)

$$\underline{r} = (t, 5 - \frac{1}{3}t, 9 - \frac{4}{3}t),\ t \in \mathbf{R}.$$

Ad b). Protože $\operatorname{hod} \underline{A} = 2$, $\operatorname{hod} \underline{A}_r = 3$, nemá soustava řešení.
Ad c). Platí $\operatorname{hod} \underline{A} = \operatorname{hod} \underline{A}_r = 3$, $n = 3$, soustava má právě jedno řešení

$$\underline{r} = (\frac{15}{a+3}, -\frac{15}{a+3}, \frac{4a-18}{a+3}).$$

4, 2.5. Rozhodněme, zda je matice

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & -3 \\ 2, & 2, & 1 \\ 4, & 0, & -1 \end{pmatrix}$$

regulární. V kladném případě vypočítejme matici $\underline{A}^{-1}$.
Řešení . Postupujeme podle 4, 1.14. V průběhu výpočtu získáme i hodnost matice $\underline{A}$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 2, & 2, & 1 & 0, & 1, & 0 \\ 4, & 0, & -1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2, & 2, & 1 & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 4, & 0, & -1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2, & 2, & 1 & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -4, & -3 & 0, & -2, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2, & 2, & 1 & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -15 & 4, & -2, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 30, & 30, & 0 & 4, & 13, & 1 \\ 0, & -5, & 0 & -1, & -2, & 1 \\ 0, & 0, & -15 & 4, & -2, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 30, & 0, & 0 & -2, & 1, & 7 \\ 0, & -5, & 0 & -1, & -2, & 1 \\ 0, & 0, & -15 & 4, & -2, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1, & 0, & 0 & -1/15, & 1/30, & 7/30 \\ 0, & 1, & 0 & 1/5, & 2/5, & -1/5 \\ 0, & 0, & 1 & -4/15, & -2/15, & -1/15 \end{array}\right).$$

Z předposlední matice je vidět, že $\underline{A}$ je regulární matice (hod $\underline{A} = 3$). Z poslední matice dostáváme

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -2, & 1, & 7 \\ 6, & 12, & -6 \\ -8, & 4, & -2 \end{pmatrix}$$

Zkouška:

$$\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0, & 1, & -3 \\ 2, & 2, & 1 \\ 4, & 0, & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2, & 1, & 7 \\ 6, & 12, & -6 \\ -8, & 4, & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 30, & 0, & 0 \\ 0, & 30, & 0 \\ 0, & 0, & 30 \end{pmatrix} = \underline{E}.$$

4, 2.6. Nalezněte matici $\underline{X}$, pro kterou platí $\underline{A}\,\underline{X}\,\underline{B} = \underline{C}$, kde

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1, & -2 \\ -2, & 3 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}, \underline{C} = \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení . V maticové rovnici je povoleno přičíst (odečíst) k oběma stranám tutéž matici, obě strany násobit prvkem $\alpha \in T, \alpha \neq 0$. Při násobení a vytýkání matic nesmíme zapomenout, že násobení matic není komutativní. V našem příkladě dostáváme postupně:

$$\underline{X}\,\underline{B} = \underline{A}^{-1}\,\underline{C},$$
$$\underline{X} = \underline{A}^{-1}\,\underline{C}\,\underline{B}^{-1},$$

pokud $\underline{A}^{-1}$, $\underline{B}^{-1}$ existují.

Elementárními řádkovými úpravami dostaneme

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1, & -2 & 1, & 0 \\ -2, & 3 & 0, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1, & -2 & 1, & 0 \\ 0, & -1 & 2, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1, & 0 & -3, & -2 \\ 0, & -1 & 2, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1, & 0 & -3, & -2 \\ 0, & 1 & -2, & -1 \end{array}\right), \text{ tedy } \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3, & -2 \\ -2, & -1 \end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1, & 0 & 1, & 0 \\ 2, & 1 & 0, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1, & 0 & 1, & 0 \\ 0, & 1 & -2, & 1 \end{array}\right), \text{ tedy } \underline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2, & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakonec vypočítáme součin

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} -3, & -2 \\ -2, & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5, & -8 \\ 3, & -5 \end{pmatrix}.$$

Zkouška:

$$\begin{pmatrix} 1, & -2 \\ -2, & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5, & -8 \\ 3, & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}.$$

4, 2.7. Nalezněte matici $\underline{X}$, pro kterou platí $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B} + \underline{X}\,\underline{A}$, kde

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2, & 5 \\ 0, & 4 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Řešení .</u> Na rozdíl od příkl. 4, 2.6 zde nelze vyjádřit matici $\underline{X}$ přímo, protože rovnice je ekvivalentní rovnici

$$\underline{A}\,\underline{X} - \underline{X}\,\underline{A} = \underline{B},$$

Z níž nelze matici $\underline{X}$ vytknout. Proto označíme

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix}$$

a budeme hledat x_1, x_2, x_3, x_4 tak, aby platilo

$$\begin{pmatrix} 2, & 5 \\ 0, & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2, & 5 \\ 0, & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{pmatrix} 5x_3, & -5x_1 - 2x_2 + 5x_4 \\ 2x_3, & -5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato rovnost bude splněna, jestliže budou x_1, x_2, x_3, x_4 vyhovovat soustavě rovnic

$$\begin{array}{rrrrl} & & 5x_3 & & = 0, \\ -5x_1 - & 2x_2 & + & 5x_4 & = 1, \\ & & 6x_3 & & = 0, \\ & - & 5x_3 & & = 0. \end{array}$$

Řešme tuto soustavu Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0, & 0, & 5, & 0 & 0 \\ -5, & -2, & 0, & 5 & 1 \\ 0, & 0, & 6, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & -5, & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -5, & -2, & 0, & 5 & 1 \\ 0, & 0, & 5, & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Protože hodnost matice soustavy i rozšířené matice soustavy je 2, má soustava nekonečně mnoho řešení; dvě neznámé můžeme volit libovolně. Z poslední rovnice je

$$x_3 = 0,$$

tedy, zvolíme-li např. $x_1 = s, x_2 = t$, bude

$$5x_4 = 1 + 5s + 2t,$$

tj.

$$x_4 = \frac{1}{5} + s + \frac{2}{5}t.$$

Tedy

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} s, & t \\ 0, & \frac{1}{5} + s + \frac{2}{5}t \end{pmatrix}, s, t \in \mathbf{R}.$$

Zkouška

$$\underline{A}\,\underline{X} = \begin{pmatrix} 2s, & 5s + 4t + 1 \\ 0, & \frac{4}{5} + 4s + \frac{8}{5}t \end{pmatrix} = \underline{B} + \underline{X}\,\underline{A}.$$