ALGEBRA A TEORETICKÁ ARITMETIKA

1. část - Lineární algebra

doc.RNDr. Jarmila Novotná, CSc.
doc.RNDr. Milan Trch, CSc.

Obsah

Kapitola 1

Aritmetické vektory

1.1 Základní pojmy

1, 1.1. Definice. Nechť T je těleso, n přirozené číslo. Uspořádanou n-tici $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in T$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nazýváme *n-rozměrným aritmetickým vektorem* nad tělesem T. Prvek x_i nazýváme *i-tým členem* aritmetického vektoru $\underline{x}$. Množinu všech n-rozměrných aritmetických vektorů nad T budeme značit $V_n(T)$.

1, 1.2. Úmluva. V dalším textu u této kapitoly budeme - pokud nebude hrozit nedorozumění - mluvit pouze o (aritmetických) vektorech a vynechávat informace o n a T.

1, 1.3. Definice. Dva aritmetické vektory $\underline{x}$, $\underline{y}$ se *sobě rovnají* (píšeme $\underline{x} = \underline{y}$), právě když $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Součet* $\underline{x} + \underline{y}$ dvou aritmetických vektorů $\underline{x}$ a $\underline{y}$ definujeme takto:

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Pro $\alpha \in T$ definujeme *α-násobek* aritmetického vektoru $\underline{x}$ takto:

$$\alpha\underline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

1, 1.4. Definice. Nulovým aritmetickým vektorem nad tělesem T nazýváme vektor $\underline{o}$, jehož všechny členy jsou rovny nulovému prvku tělesa T, tj. $\underline{o} = (0, 0, \ldots, 0)$.

1, 1.5. Poznámka. Pro operace definované v 1, 1.3 platí tyto zákony [$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V_n(T)$, $\alpha, \beta \in T$]:
(1)$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$,
(2)$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$,

$(3)(\alpha+\beta)\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a}$,
$(4)\alpha(\underline{a}+\underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b}$,
$(5)\alpha(\beta\underline{a}) = (\alpha\beta)\underline{a}$,
$(6)\alpha\underline{a} = \underline{o} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee \underline{a} = \underline{o})$,
$(7)1.\underline{a} = \underline{a}$,
$(8)(-1).\underline{a} = -\underline{a}$, kde $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{o}$.

1, 1.6. Definice. Nechť $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ jsou prvky z $V_n(T)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ prvky z T. Aritmetický vektorový prostor

$$\underline{x} = \alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{a}_k.$$

nazýváme *lineární kombinací* aritmetických vektorů $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ s *koeficienty* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

1, 1.7. Věta. Nechť vektor $\underline{x} \in V_n(T)$ je lineární kombinací vektorů $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in V_n(T)$ a nechť každý vektor $\underline{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, je lineární kombinací vektorů $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_r \in V_n(T)$. Pak je x lineární kombinací $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_r$.

1, 1.8. Úmluva. Jestliže jsou všechny koeficienty lineární kombinace vektorů rovny nulovému prvku 0 z tělesa T, nazveme tuto lineární kombinaci *triviální*. Jestliže je alespoň jeden koeficient různý od 0, mluvíme o *netriviální lineární kombinaci*.

Jestliže pro prvky $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in T$ a vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in V_n(T)$ platí

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{a}_k = \underline{o},$$

hovoříme o *nulové lineární kombinaci*.

1, 1.9. Definice. Jestliže existuje nulová netriviální lineární kombinace vektorů $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in V_n(T)$, nazýváme vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ *lineárně závislými*. V opačném případě (tj. jedinou jejich nulovou lineární kombinací je triviální lineární kombinace) mluvíme o *lineárně nezávislých vektorech*.

1, 1.10. Poznámka. Lineární nezávislost či závislost vektorů nezávisí na tom, v jakém pořadí tyto vektory píšeme.

1, 1.11. Věta. Nechť $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in V_n(T)$.
a) Je-li $k = 1$, je vektor $\underline{a}_1$ lineárně závislý, právě když $\underline{a}_1 = \underline{o}$.
b) Je-li $k > 1$, jsou vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ lineárně závislé, právě když existuje index i takový, že $\underline{a}_i$ je lineární kombinací zbývajících vektorů $\underline{a}_j$, $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k$.
c) Je-li $k > n$, jsou vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ lineárně závislé.

1, 1.12. Důsledek.
a) Přidáme-li k lineárně závislým vektorům další vektory, dostaneme vektory lineárně závislé.

b) Ubereme-li z lineárně nezávislých vektorů některé vektory, dostaneme vektory lineárně nezávislé.
c) Je-li mezi vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ aspoň jeden nulový vektor, jsou tyto vektory lineárně závislé.

1, 1.13. Věta. Nechť $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in V_n(T)$. Pak existuje právě jedno číslo h, $0 \leq h \leq k$, s touto vlastností:
a) Je-li $h = 0$, jsou všechny vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ nulové.
b) Je-li $0 < h < k$, potom je možné z vektorů $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vybrat h lineárně nezávislých vektorů. Vybereme-li z vektorů $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ více než h vektorů, jsou tyto vektory lineárně závislé.
c) Je-li $h = k$, jsou vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ lineárně nezávislé.

1.2 Řešené příklady

1, 2.1. Jsou dány vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \in V_3(\mathbf{R})$, $\underline{a}_1 = (1, 2, -1)$, $\underline{a}_2 = (0, -1, 5)$, $\underline{a}_3 = (4, 1, 3)$. Utvořte jejich lineární kombinaci s koeficienty $5, -8, 7$.
Řešení. Máme najít vektor $\underline{b} \in V_3(\mathbf{R}), \underline{b} = 5\underline{a}_1 - 8\underline{a}_2 + 7\underline{a}_3$. Podle pravidel pro počítání s aritmetickými vektory je

$$\begin{aligned} \underline{b} &= 5(1, 2, -1) - 8(0, -1, 5) + 7(4, 1, 3) = \\ &= (5, 10, -5) - (0, -8, 40) + (28, 7, 21) = (33, 25, -24). \end{aligned}$$

1, 2.2. Určeme, pro která $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ platí $\underline{x} = \underline{y}$, je-li

$$\underline{x} = (2\alpha, 5, \gamma + 7, -\delta), \underline{y} = (0, 1 - \beta, 3\delta, 2\gamma - 14).$$

Řešení. Rovnost $(2\alpha, 5, \gamma + 7, -\delta) = (0, 1 - \beta, 3\delta, 2\gamma - 14)$ nastává, právě když platí

$$2\alpha = 0, 5 = 1 - \beta, \gamma + 7 = 3\delta, -\delta = 2\gamma - 14.$$

Z prvních dvou rovnic dostáváme $\alpha = 0, \beta = -4$; třetí a čtvrtá rovnice vede na soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé γ, δ

$$\begin{aligned} \gamma - 3\delta &= -7, \\ 2\gamma + \delta &= 14. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme $\gamma = 5, \delta = 4$.

1, 2.3. Ve $V_3(\mathbf{R})$ vypočítejme vektor $\underline{x}$ z vektorové rovnice

$$5\underline{x} - 2\underline{a} = t\,\underline{b},$$

kde $\underline{a} = (-5,1,0), \underline{b} = (1,5,3), t$ je reálný parametr. Zjistěme, zda vektory $\underline{c} = (-\frac{9}{5}, \frac{7}{5}, \frac{3}{5}), \underline{d} = (-2, \frac{2}{5}, 1)$ jsou řešení dané rovnice.
Řešení. Podle pravidel pro počítání s aritmetickými vektory platí pro vektor $\underline{x}$ postupně

$$\begin{aligned} 5\underline{x} &= t\,\underline{b} + 2\underline{a} \\ \underline{x} &= \frac{t\,\underline{b} + 2\underline{a}}{5} = \frac{2}{5}\,\underline{a} + \frac{t}{5}\,\underline{b}. \end{aligned}$$

Vektor $\underline{x}$ je tedy lineární kombinací vektorů $\underline{a}, \underline{b}$ s koeficienty $\frac{2}{5}, \frac{t}{5}$. Dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}\,\underline{a} &= \frac{2}{5}(-5,1,0) = (-2, \frac{2}{5}, 0), \\ \frac{t}{5}\,\underline{b} &= \frac{t}{5}(1,5,3) = (\frac{t}{5}, t, \frac{3t}{5}), \end{aligned}$$

tedy

$$\underline{x} = (\frac{-10+t}{5}, \frac{2+5t}{5}, \frac{3t}{5}).$$

Vektory $\underline{c}, \underline{d}$ budou řešení dané rovnice, jestliže budou existovat reálná čísla r, resp. s tak, že

$$\underline{c} = (\frac{-10+r}{5}, \frac{2+5r}{5}, \frac{3r}{5}),$$

resp.

$$\underline{d} = (\frac{-10+s}{5}, \frac{2+5s}{5}, \frac{3s}{5}).$$

Tyto rovnosti platí, právě když

$$-\frac{9}{5} = \frac{-10+r}{5} \wedge \frac{7}{5} = \frac{2+5r}{5} \wedge \frac{3}{5} = \frac{3r}{5}, \text{tj. } r = 1,$$

resp.

$$-2 = \frac{-10+s}{5} \wedge \frac{2}{5} = \frac{2+5s}{5} \wedge 1 = \frac{3s}{5}, \text{tj. } s \, \text{neexistuje},$$

Vektor $\underline{c}$ je řešením dané rovnice, vektor $\underline{d}$ řešením není.

1, 2.4. Zjistěme, zda lze vektor $\underline{x} = (6,-2,10)$ zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\underline{a} = (1,-1,-1), \underline{b} = (-1,1,-1), \underline{c} = (-1,-1,1)$. V kladném případě určeme její koeficienty.
Řešení. Hledáme čísla α, β, γ tak, aby platilo

$$\underline{x} = \alpha\,\underline{a} + \beta\,\underline{b} + \gamma\,\underline{c},$$

tj.

$$\begin{aligned} 6 &= \alpha - \beta - \gamma, \\ -2 &= -\alpha + \beta - \gamma, \\ 10 &= -\alpha - \beta + \gamma. \end{aligned}$$

Tuto soustavu upravíme na tvar

$$\begin{aligned} 6 &= \alpha - \beta - \gamma, \\ 4 &= -2\gamma, \\ 16 &= -2\beta, \end{aligned}$$

odkud $\beta = -8, \gamma = -2, \alpha = -4$. Tedy vektor $\underline{x}$ je lineární kombinací vektorů $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ s koeficienty $-4, -8, -2$, tj.

$$\underline{x} = -4\underline{a} - 8\underline{b} - 2\underline{c}.$$

1, 2.5. Rozhodněme, zda vektory $\underline{a} = (2, 5, -3), \underline{b} = (-1, -3, 2), \underline{c} = (1, 2, 1)$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé.
<u>Řešení.</u> Napíšeme nulovou lineární kombinaci

$$\alpha\,\underline{a} + \beta\,\underline{b} + \gamma\,\underline{c} = 0,$$

tj.

$$\alpha(2, 5, -3) + \beta(-1, -3, 2) + \gamma(1, 2, 1) = (0, 0, 0).$$

Odtud dostáváme soustavu lineárních rovnic pro neznámé α, β, γ:

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta + \gamma &= 0, \\ 5\alpha - 3\beta + 2\gamma &= 0, \\ -3\alpha + 2\beta + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Podrobný návod, jak postupovat při řešení soustav lineárních rovnic podáme v kap. 4. Vynásobme první rovnici -2, přičtěme ji ke druhé rovnici a třetí rovnici odečtěme od první rovnice. Dostaneme

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta &= 0, \\ 5\alpha - 3\beta &= 0. \end{aligned}$$

α, β vypočítáme ze druhé a ze třetí rovnice:

$$\alpha = \beta \Rightarrow 5\alpha - 3\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Z první rovnice je potom i $\gamma = 0$. To však znamená, že nulová lineární kombinace vektorů $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ je nutně triviální, a tedy vektory $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ jsou lineárně nezávislé.

1, 2.6. Rozhodněme, zda vektory $\underline{a} = (-3, 0, 1), \underline{b} = (0, 1, -1), \underline{c} = (3, 3, -4)$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé.
<u>Řešení.</u> Postupujeme jako v příkl. 1, 2.5. Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -3\alpha + 3\gamma &= 0, \\ \beta + 3\gamma &= 0, \\ \alpha - \beta - 4\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Přičteme-li druhou rovnici ke třetí, bude mít soustava tvar

$$\begin{aligned} -3\alpha + \quad\quad\quad 3\gamma &= 0, \\ \alpha - \quad\quad\quad \gamma &= 0, \\ \beta + \quad 3\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic plyne, že $\alpha = \gamma$, ze třetí rovnice $\beta = -3\gamma$. Soustava má řešení pro libovolné γ, např. pro $\gamma = 1$ dostáváme $\alpha = 1, \beta = -3$. Dané vektory $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ jsou tedy lineárně závislé.

1, 2.7. Rozhodněme, zda jsou vektory
a) $(2, 5, -3), (1, 2, 1)$;
b) $(1, 7, 8), (-3, 0, 1), (0, 1, -1), (3, 3, -4)$
lineárně závislé nebo nezávislé.
Řešení.
a) Vektory jsou lineárně nezávislé podle důsl. 1, 1.12b) a příkl. 1, 2.5.
b) Vektory jsou lineárně závislé podle důsl. 1, 1.12a) a příkl. 1, 2.6 nebo podle věty 1, 1.11.c).

Kapitola 2

Matice, hodnost matice

2.1 Základní pojmy

2, 1.1. Definice. Nechť T je těleso. Obdélníkovou tabulkou prvků z T sestavených do m řádků a n sloupců nazýváme *matici typu* (m, n) nad tělesem T. Je-li $m = n$, hovoříme o *čtvercové matici n-tého řádu.*

2, 1.2. Poznámka. Matice $\underline{A}$ přiřazuje každé dvojici (i, k), $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$, prvek z T, který označujeme a_{ik} a nazýváme *prvkem matice* $\underline{A}$ v i-tém řádku a k-tém sloupci. Matici $\underline{A}$ zapisujeme

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nebo zkráceně

$$\underline{A} = (a_{ik})_{i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n}$$

Pokud je z textu známo m, n, píšeme pouze $\underline{A} = (a_{ik})$. Aritmetický vektor $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, se nazývá *i-tý řádek*, aritmetický vektor $(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})$ *k-tý sloupec matice* $\underline{A}$. *Vedoucím prvkem i-tého řádku* matice $\underline{A}$ rozumíme jeho první nenulový prvek. Jinými slovy: Je-li a_{ik} vedoucí prvek i-tého řádku a $j < k$, je už $a_{ij} = 0$. Nulový řádek nemá žádný vedoucí prvek.

2, 1.3. Definice. Matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m, n) a $\underline{B} = (b_{ik})$ typu (r, s) se sobě *rovnají*, právě když platí: $m = r$, $n = s$, $a_{ik} = b_{ik}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

2, 1.4. Definice. *Transponovaná matice* k matici $\underline{A} = a_{ik}$ typu (m, n) je matice $\underline{A}^T = (b_{ik})$ typu (n, m), pro kterou platí

$$a_{ik} = b_{ki},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

2, 1.5. Poznámka. Transponovanou matici $\underline{A}^T$ dostaneme z matice $\underline{A}$ tak, že vzájemně vyměníme řádky a sloupce v matici $\underline{A}$.

2, 1.6. Definice. Nechť $\underline{A} = (a_{ik})$ je matice typu (m, n). Aritmetický vektor $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr})$, kde $r = \min\,(m, n)$, se nazývá *(hlavní) diagonála* matice $\underline{A}$. Prvky $a_{ii},\ i = 1, 2, \ldots, r$, se nazývají *diagonální prvky.*

2, 1.7. Definice. Jsou-li všechny nediagonální prvky matice $\underline{A} = (a_{ik})$ nulové (tj. $a_{ik} = 0$ pro všechna $i \neq k$), říkáme, že $\underline{A}$ je *diagonální matice.*

2, 1.8. Definice. Matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m, n) se nazývá *zobecněná trojúhelníková matice*, právě když
a) má pouze nenulové řádky,
b) jsou-li $a_{ik},\ a_{rs}$ vedoucí prvky takové, že $i < r$, pak $k < s$.

2, 1.9. Poznámka. Vlastnost b) z def. 2, 1.8. říká, že s rostoucím řádkovým indexem se vedoucí prvek každého dalšího řádku vyskytuje stále více vpravo.

2, 1.10. Definice. Zobecněná trojúhelníkovitá matice $\underline{A}$ typu (m, n) se nazývá *redukovaná trojúhelníková matice*, právě když
a) každý vedoucí prvek je roven 1,
b) nad každým vedoucím prvkem jsou ve sloupci pouze 0.

2, 1.11. Poznámka. V literatuře se uvádí také tyto pojmy: Matice $\underline{A}$ typu (m, n) se nazývá *horní*, resp. *dolní trojúhelníkovitá matice*, právě když všechny prvky ležící pod diagonálou, resp. nad diagonálou jsou nulové (tj. $a_{ik} = 0$ pro všechna $i > k$, resp. $i < k$).

2, 1.12. Definice. *Řádkovým prostorem matice* $\underline{A}$ rozumíme podprostor vektorového prostoru $V_n(T)$ generovaný všemi řádky matice $\underline{A}$.

2, 1.13. Definice. *Elementární řádkovou*, resp. *sloupcovou úpravou matice* $\underline{A}$ rozumíme některou z těchto úprav:
a) změnu pořadí řádků, resp. sloupců matice $\underline{A}$;
b) nahrazení řádku, resp. sloupce matice $\underline{A}$ jeho α-násobkem, kde $\alpha \in T$, $\alpha \neq 0$;
c) nahrazení řádku, resp. sloupce matice $\underline{A}$ jeho součtem s α-násobkem, $\alpha \in T$, jiného řádku matice $\underline{A}$;
d) vynechání řádku, resp. sloupce, který je lineární kombinací ostatních řádků, resp. sloupců.

2, 1.14. Věta. Elementární řádkové úpravy nemění řádkový prostor matice.

2, 1.15. Definice. Dvě matice jsou *ekvivalentní*, právě když lze jednu z druhé získat konečným počtem elementárních úprav řádků.

2, 1.16. Věta. Každá matice je ekvivalentní aspoň s jednou zobecněnou trojúhelníkovitou maticí a aspoň s jednou redukovanou trojúhelníkovitou maticí.

2, 1.17. Definice. *Hodností matice* $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m, n) nazýváme dimenzi jejího řádkového prostoru. Píšeme $h = \text{hod } \underline{A}$.

2, 1.18. Věta. (Gaussova metoda výpočtu hodnosti matice.) Hodnost matice $\underline{A}$ je rovna počtu *řádků zobecněné* trojúhelníkové matice $\underline{B}$ ekvivalentní s $\underline{A}$.

2, 1.19. Věta. Platí $\text{hod } \underline{A} = \text{hod } \underline{A}^T$.

2, 1.20. Definice. Čtvercová matice $\underline{A}$ n-tého řádu se nazývá *regulární*, resp. *singulární*, jestliže $\text{hod } \underline{A} = n$, resp. $\text{hod } \underline{A} < n$.

2.2 Řešené příklady

2, 2.1. Zjistěme, zda se rovnají matice $\underline{A}$, $\underline{B}$, jestliže

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -1, & 2, & 1/2, \\ e, & \pi, & 3, \\ \sqrt{12}, & \sqrt{4}, & \sqrt{18} \end{pmatrix}, \ \underline{B} = \begin{pmatrix} -2/2, & 6/3, & 2/4, \\ e, & 2\pi/2, & 3e/e, \\ 2\sqrt{3}, & 2, & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Řešení. Obě matice jsou stejného typu, jsou to čtvercové matice třetího řádu. Protože platí

$$a_{ik} = b_{ik} \quad \text{pro všechna } i, k = 1, 2, 3,$$

jsou si matice rovny.

2, 2.2. Určeme hodnost matice

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3, & -2, & 1, & 0, \\ 4, & 0, & 2, & -3, \\ 11, & -4, & 13, & -1, \\ 2, & -1, & 5, & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Pomocí elementárních řádkových a sloupcových úprav převedeme matici $\underline{\text{A}}$ na ekvivalentní zobecněnou trojúhelníkovou matici:

$$\begin{pmatrix} 3, & -2, & 1, & 0, \\ 4, & 0, & 2, & -3, \\ 11, & -4, & 13, & -1, \\ 2, & -1, & 5, & 1 \end{pmatrix} \overset{(a)}{\sim} \begin{pmatrix} -1, & 2, & 5, & 1, \\ -2, & 3, & 1, & 0, \\ 0, & 4, & 2, & -3, \\ -4, & 11, & 13, & -1 \end{pmatrix} \overset{(b)}{\sim}$$

$$\overset{(b)}{\sim} \begin{pmatrix} -1, & 2, & 5, & 1, \\ 0, & -1, & -9, & -2, \\ 0, & 4, & 2, & -3, \\ 0, & 5, & 11, & -1 \end{pmatrix} \overset{(c)}{\sim} \begin{pmatrix} -1, & 2, & 5, & 1, \\ 0, & -1, & -9, & -2, \\ 0, & 0, & -34, & -11, \\ 0, & 0, & -34, & -11 \end{pmatrix} \overset{(d)}{\sim}$$

$$\overset{(d)}{\sim} \begin{pmatrix} -1, & 2, & 5, & 1, \\ 0, & -1, & -9, & -2, \\ 0, & 0, & -34, & -11 \end{pmatrix}.$$

Provedli jsme tyto úpravy:
(a) Čtvrtý řádek jsme napsali jako první a druhý sloupec jako první;
(b) ke čtvrtému řádku jsme přičetli (-2)-násobek druhého řádku a k druhému řádku jsme přičetli (-2)-násobek prvního řádku;
(c) ke třetímu řádku jsme přičetli čtyřnásobek druhého řádku a ke čtvrtému řádku jsme přičetli pětinásobek druhého řádku;
(d) vynechali jsme čtvrtý řádek, který se rovná třetímu řádku.
Hodnost matice $\underline{A}$ je 3.

2, 2.3. Určeme hodnost matice

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, \\ 2, & 4, & 0, & 5, \\ 3, & 6, & 3, & 9 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Postupujeme jako v příkl. 2, 2.2:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, \\ 2, & 4, & 0, & 5, \\ 3, & 6, & 3, & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, \\ 0, & 0, & -6, & -3, \\ 0, & 0, & -6, & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, \\ 0, & 0, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice $\underline{A}$ je 2.

2, 2.4. Pro která $c \in \mathbf{R}$ má matice

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -2, & 0, & 1, \\ 1, & 2, & 1, \\ 0, & 3, & c \end{pmatrix}$$

hodnost 2?

Řešení. Postupujeme analogicky jako v příkl. 2, 2.2:

$$\begin{pmatrix} -2, & 0, & 1, \\ 1, & 2, & 1, \\ 0, & 3, & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2, & 0, & 1, \\ 0, & 4, & 3, \\ 0, & 3, & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2, & 0, & 1, \\ 0, & 4, & 3, \\ 0, & 0, & 4c-9 \end{pmatrix}.$$

Aby měla matice $\underline{A}$ hodnost 2, musí platit

$$4c - 9 = 0, \quad \text{tj.} \quad c = \frac{9}{4}.$$

Pro $c = \frac{9}{4}$ má matice $\underline{A}$ hodnost 2, pro $c \neq \frac{9}{4}$ hodnost 3.

2, 2.4. Zjistěme, zda jsou vektory

$$\underline{a} = (1, -2, 5), \ \underline{b} = (3, -1, 2), \ \underline{c} = (2, -9, 23)$$

lineárně závislé nebo nezávislé.

Řešení. Můžeme postupovat stejně jako v kap. 1. Ukážeme zde jiný postup. Vektory $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ zapíšeme jako řádkové vektory matice a zjistíme její hodnost h. Bude-li $h = 3$, jsou vektory $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárně nezávislé, bude-li $h < 3$, jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 1, & -2, & 5, \\ 3, & -1, & 2, \\ 2, & -9, & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -2, & 5, \\ 0, & 5, & -13, \\ 0, & -5, & 13 \end{pmatrix}.$$

Protože v poslední matici je třetí řádek (-1)-násobkem druhého řádku, je hodnost $h = 2$, a vektory $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jsou tedy lineárně závislé.

Kapitola 3

Operace s maticemi

3.1 Základní pojmy

3, 1.1. Definice. Matici $\underline{O} = (o_{ik})$ typu (m, n), kde $o_{ik} = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, n$, nazýváme *nulovou maticí typu* (m, n).

3, 1.2. Definice. *Jednotkovou maticí n-tého řádu* nazýváme diagonální matici $\underline{E} = (e_{ik})$ n-tého řádu, pro niž platí $e_{ii} = 1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$.

3, 1.3. Definice. Nechť jsou dány matice $\underline{A} = (a_{ik})$, $\underline{B} = (b_{ik})$ téhož typu (m, n) nad týmž tělesem T. *Součtem matic* $\underline{A}$ a $\underline{B}$ nazýváme matici $\underline{C} = (c_{ik})$ typu (m, n) definovanou předpisem

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Píšeme $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$.

3, 1.4. Věta. Pro součet matic platí ($\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ jsou matice stejného typu, $\underline{O}$ je nulová matice téhož typu):
a) $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$,
b) $\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$,
c) $\underline{A} + \underline{O} = \underline{O} + \underline{A} = \underline{A}$,
d) $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$,
e) $-\underline{A} = (-a_{ik})$, kde $-a_{ik}$ je opačný prvek k a_{ik} v tělese T, je matice opačná k matici $\underline{A}$, tj. platí $\underline{A} + (-\underline{A}) = \underline{O}$.

3, 1.5. Poznámka.
a) Z věty 3, 1.4 a), b), c), e) plyne, že množina všech matic daného typu (m, n) nad tělesem T tvoří komutativní grupu.
b) Místo $\underline{A}+(-\underline{B})$ píšeme krátce $\underline{A}-\underline{B}$ a mluvíme o *rozdílu matic* $\underline{A}$, $\underline{B}$ (v tomto pořadí).

3, 1.6. Definice. Nechť $\underline{A} = (a_{ik})$ je matice typu (m, n) nad tělesem T. *Součinem prvku* $\alpha \in T$ *a matice* $\underline{A}$ (α*-násobkem matice* $\underline{A}$) nazýváme matici $\underline{C} = (c_{ik})$ typu (m, n) definovanou předpisem

$$c_{ik} = \alpha a_{ik},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Píšeme $\underline{C} = \alpha\underline{A}$.

3, 1.7. Věta. Pro násobení matice prvkem z T platí ($\underline{A}$, $\underline{B}$ jsou matice téhož typu, α, β libovolné prvky z T, 1 jednotkový prvek v T):
a) $\alpha(\underline{A} + \underline{B}) = \alpha\underline{A} + \alpha\underline{B}$,
b) $(\alpha + \beta)\underline{A} = \alpha\underline{A} + \beta\underline{A}$,
c) $\alpha(\beta\underline{A}) = (\alpha\beta)\underline{A}$,
d) $1\underline{A} = \underline{A}$,
e) $(\alpha\underline{A})^T = \alpha\underline{A}^T$.

3, 1.8. Poznámka. Matice typu $(1, n)$ nad tělesem T jsou vlastně n-rozměrné aritmetické vektory nad T. V tomto případě sčítání matic a násobení matice prvkem z T odpovídá příslušným operacím s aritmetickými vektory.

3, 1.9. Definice. Matice $\underline{A}$ se nazývá *symetrická*, jestliže platí $\underline{A} = \underline{A}^T$. Matice $\underline{A}$ se nazývá *antisymetrická*, jestliže platí $\underline{A} = -\underline{A}^T$.

3, 1.10. Věta. Pro každou čtvercovou matici $\underline{A}$ je $\underline{A} + \underline{A}^T$ symetrická matice a $\underline{A} - \underline{A}^T$ antisymetrická matice.

3, 1.11. Poznámka. Každou čtvercovou matici $\underline{A}$ lze psát jako součet symetrické a antisymetrické matice, neboť např. $\underline{A} = \frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{A}^T) + \frac{1}{2}(\underline{A} - \underline{A}^T)$.

3, 1.12. Definice. Nechť je dána matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m, n) a matice $\underline{B} = (b_{ik})$ typu (n, p), obě nad týmž tělesem T. *Součinem matic* $\underline{A}$, $\underline{B}$ (v tomto pořadí!) nazýváme matici $\underline{C} = (c_{ik})$ typu (m, p) definovanou předpisem

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, p.$$

Píšeme $\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B}$.

3, 1.13. Poznámka. Podmínku pro typy matic při násobení si můžeme zapamatovat pomocí formálního vztahu

$$(m, n)(n, p) = (m, p).$$

3, 1.14. Věta. Nechť jsou dány matice $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ nad tělesem T a prvek $\alpha \in T$. Pak platí:
a) $\alpha(\underline{A}\,\underline{B}) = (\alpha\underline{A})\underline{B} = \underline{A}(\alpha\underline{B})$,
b) $\underline{A}(\underline{B}\,\underline{C}) = (\underline{A}\,\underline{B})\underline{C}$,

c) $\underline{A}(\underline{B}+\underline{C}) = \underline{A}\,\underline{B} + \underline{A}\,\underline{C}$,
d) $(\underline{A}+\underline{B})\underline{C} = \underline{A}\,\underline{C} + \underline{B}\,\underline{C}$,
e) $(\underline{A}\,\underline{B})^T = \underline{B}^T\underline{A}^T$,
kdykoliv je alespoň jedna strana příslušné rovnosti definována;
f) $\underline{A}\,\underline{E} = \underline{A}$, $\underline{E}\,\underline{A} = \underline{A}$,
g) $\underline{A}\,\underline{O} = \underline{O}$, $\underline{O}\,\underline{A} = \underline{O}$,
kdykoli je součin na levé straně příslušné rovnosti definován.

3, 1.15. Poznámka. Násobení matic není komutativní. Oba součiny $\underline{A}\,\underline{B}$ i $\underline{B}\,\underline{A}$ jsou definovány, právě když $\underline{A}$ je typu (m,n) a $\underline{B}$ je typu (n,m). Je-li $m \neq n$, nemůže nastat rovnost $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A}$. Ani pro čtvercové matice neplatí obecně $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A}$.

3, 1.16. Definice. Matice $\underline{A}$, $\underline{B}$, pro které platí $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A}$, se nazývají *záměnné*.

3, 1.17. Definice. Nechť $\underline{A}$ je čtvercová matice n-tého řádu nad tělesem T. Matici $\underline{B}$, pro níž platí

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = \underline{E}$$

nazýváme inverzní maticí k matici $\underline{A}$ a značíme ji $\underline{A}^{-1}$.

3, 1.18. Věta.
a) K dané matici existuje nejvýše jedna inverzní matice,
b) $\underline{E}^{-1} = \underline{E}$,
c) $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$,
d) $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{A}^{-1}\underline{B}^{-1}$,
jakmile je alespoň jedna strana příslušné rovnosti definována;
e) jestliže pro matice $\underline{A}$, $\underline{B}$ platí $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{E}$, jsou matice $\underline{A}$, $\underline{B}$ navzájem inverzní.

3, 1.19. Definice. *Regulární maticí* nazýváme čtvercovou matici n-tého řádu, jejíž hodnost je rovna n. V opačném případě hovoříme o *singulární matici.*

3, 1.20. Věta. Nechť $\underline{A}$, $\underline{B}$ jsou čtvercové matice n-tého řádu nad týmž tělesem T. Pak platí:
a) Je-li alespoň jedna z matic $\underline{A}$, $\underline{B}$ singulární, je i součin $\underline{A}\,\underline{B}$ singulární,
b) jsou-li obě matice $\underline{A}$, $\underline{B}$ regulární, je i součin $\underline{A}\,\underline{B}$ regulární.

3, 1.21. Věta. Nechť $\underline{A}$ je čtvercová matice. Pak k ní existuje inverzní matice $\underline{A}^{-1}$, právě když je $\underline{A}$ regulární.

3, 1.22. Poznámka. Metody výpočtu inverzní matice k dané regulární matici uvedeme v kap. 4 a v kap. 7.

3.2 Řešené příklady

3, 2.1. Vypočítejme $3\underline{A} - 2\underline{B}$, jestliže

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 2, & 3 \\ 0, & 1, & -1, & 1 \\ 2, & 2, & 1, & 15 \end{pmatrix}, \ \underline{B} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & -2, & -1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & -1, & -16 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$3\underline{A} = \begin{pmatrix} 3, & -3, & 6, & 9 \\ 0, & 3, & -3, & 3 \\ 6, & 6, & 3, & 45 \end{pmatrix}, 2\underline{B} = \begin{pmatrix} 0, & 2, & -4, & -2 \\ 2, & -2, & 2, & -2 \\ 0, & 2, & -2, & -32 \end{pmatrix},$$

$$3\underline{A} - 2\underline{B} = \begin{pmatrix} 3, & -5, & 10, & 11 \\ -2, & 5, & -5, & 5 \\ 6, & 4, & 5, & 77 \end{pmatrix}.$$

3, 2.2. Vypočítejme matici $\underline{X}$ z maticové rovnice $2\underline{X} - 3\underline{A} = \underline{E}$, kde

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5, & 4 \\ -6, & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Nejprve vyjádříme z rovnice matici $\underline{X}$, pak dosadíme $\underline{A}$:

$$\underline{X} = \frac{1}{2}(\underline{E} + 3\underline{A}).$$

Přitom

$$3\underline{A} = \begin{pmatrix} 15, & 12 \\ -18, & 9 \end{pmatrix}, \ \underline{E} + 3\underline{A} = \begin{pmatrix} 16, & 12 \\ -18, & 10 \end{pmatrix},$$

tedy

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} 8, & 6 \\ -9, & 5 \end{pmatrix}.$$

3, 2.3. Vyjádřeme matici

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -3, & 4, & 9 \\ 6, & 0, & 7 \\ 5, & -11, & 10 \end{pmatrix}$$

jako součet symetrické a antisymetrické matice.
Řešení. Podle pozn. 3, 1.11. platí

$$\underline{A} = \underline{B} + \underline{C}, \ \text{kde } \underline{B} = \frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{A}^T), \ \underline{C} = \frac{1}{2}(\underline{A} - \underline{A}^T).$$

Dostáváme

$$\underline{A}^T = \begin{pmatrix} -3, & 6, & 5 \\ 4, & 0, & -11 \\ 9, & 7, & 10 \end{pmatrix},\ \underline{B} = \begin{pmatrix} -3, & 5, & 7 \\ 5, & 0, & -2 \\ 7, & -2, & 10 \end{pmatrix} \underline{C} = \begin{pmatrix} 0, & -1, & 2 \\ 1, & 0, & 9 \\ -2, & -9, & 0 \end{pmatrix}.$$

3, 2.4. Vypočítejme součin matic $\underline{A}$, $\underline{B}$, je-li

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 3 \\ 0, & 5, & -1 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2, & -1, & 5 \\ 0, & 3, & 3 \\ -2, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} -2, & 1 \\ 2, & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení. a) Matice $\underline{A}$ je typu $(2,3)$, matice $\underline{B}$ typu $(3,1)$, matice $\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B}$ tedy bude typu $(2,1)$. Přitom

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2.(-2) + 1.2 + 3.0 = -2, \\ c_{21} &= 0.(-2) + 5.2 + (-1).0 = 10, \end{aligned} \qquad \text{tedy } \underline{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

b) $\underline{A}$ je typu $(3,3)$, $\underline{B}$ typu $(3,2)$, $\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B}$ bude typu $(3,2)$:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2.1 + (-1).2 + 5.(-1) = -5, \\ c_{12} &= 2.0 + (-1).1 + 5.3 = 14, \\ c_{21} &= 0.1 + 3.2 + 3.(-1) = 3, \\ c_{22} &= 0.0 + 3.1 + 3.3 = 12, \\ c_{31} &= (-2).1 + 0.2 + 1.(-1) = -3, \\ c_{32} &= (-2).0 + 0.1 + 1.3 = 3, \end{aligned} \qquad \text{tedy } \underline{C} = \begin{pmatrix} -5, & 14 \\ 3, & 12 \\ -3, & 3 \end{pmatrix}.$$

c) $\underline{A}$, $\underline{B}$ jsou druhého řádu, $\underline{C}$ bude také druhého řádu:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2.(-2) + 2.2 = 0, \\ c_{12} &= 2.1 + 2.(-1) = 0, \\ c_{21} &= 1.(-2) + 1.2 = 0, \\ c_{22} &= 1.1 + 1.(-1) = 0, \end{aligned} \qquad \text{tedy } \underline{C} = 0.$$

Poznámka. $\underline{A}$, $\underline{B}$ jsou nenulové matice, jejich součin je nulová matice.

3, 2.5. Jsou matice $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0, & 5 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} -3, & 2 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ záměnné?

Řešení. Platí

$$\underline{A}\,\underline{B} = \begin{pmatrix} 0, & 5 \\ -1, & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3, & 2 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.(-3) + 5.1, & 0.2 + 5.0 \\ -1.(-3) + 3.1, & (-1).2 + 3.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5, & 0 \\ 6, & -2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{B}\,\underline{A} = \begin{pmatrix} -3, & 2 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 5 \\ -1, & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3).0 + 2.(-1), & (-3).5 + 2.3 \\ 1.0 + 0.(-1), & 1.5 + 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2, & -9 \\ 0, & 5 \end{pmatrix}.$$

Protože $\underline{A}\,\underline{B} \neq \underline{B}\,\underline{A}$, nejsou matice $\underline{A}$, $\underline{B}$ záměnné.

3, 2.6. Dokažme, že tyto podmínky jsou ekvivalentní:
a) $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A}$;
b) $(\underline{A} + \underline{B})^2 = \underline{A}^2 + 2\underline{A}\,\underline{B} + \underline{B}^2$;
c) $(\underline{A} - \underline{B})(\underline{A} + \underline{B}) = \underline{A}^2 - \underline{B}^2$.
<u>Řešení.</u> Nejprve dokážeme a)$\Leftrightarrow$b):
a)$\Rightarrow$b): $(\underline{A} + \underline{B})(\underline{A} + \underline{B}) = \underline{A}^2 + \underline{A}\,\underline{B} + \underline{B}\,\underline{A} + \underline{B}^2$;
b)$\Rightarrow$a): Z rovnosti $\underline{A}^2 + \underline{A}\,\underline{B} + \underline{B}\,\underline{A} + \underline{B}^2 = \underline{A}^2 + 2\underline{A}\,\underline{B} + \underline{B}^2$ dostáváme

$$\underline{A}\,\underline{B} + \underline{B}\,\underline{A} = \underline{A}\,\underline{B} + \underline{A}\,\underline{B}, \text{ tj. } \underline{B}\,\underline{A} = \underline{A}\,\underline{B}.$$

Analogicky dokážeme a)$\Leftrightarrow$c):
a)$\Rightarrow$c): $(\underline{A} - \underline{B})(\underline{A} + \underline{B}) = \underline{A}^2 - \underline{B}\,\underline{A} + \underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}^2 = \underline{A}^2 - \underline{B}^2$.
c)$\Rightarrow$a): Z rovnosti $\underline{A}^2 - \underline{B}\,\underline{A} + \underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}^2 = \underline{A}^2 - \underline{B}^2$ dostáváme

$$-\underline{B}\,\underline{A} + \underline{A}\,\underline{B} = \underline{O}, \text{ tj. } \underline{B}\,\underline{A} = \underline{A}\,\underline{B}.$$

Kapitola 4

Soustavy lineárních rovnic

4.1 Základní pojmy

4, 1.1. Definice. *Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých* nad tělesem T nazýváme soustavu

$$\begin{array}{rrrrr} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \ldots+ & a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \ldots+ & a_{2n}x_n = & b_2, \\ \ldots, & & & & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \ldots+ & a_{mn}x_n = & b_m, \end{array} \qquad (*)$$

kde $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m$ jsou prvky z T. Symboly x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, se nazývají *neznámé*, prvky a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *koeficienty* u neznámých, prvky b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, *pravé strany rovnic.*

4, 1.2. Definice. Řekneme, že n-rozměrný aritmetický vektor $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in V_n(T)$, je *řešením i-té rovnice* soustavy $(*)$, jestliže platí

$$a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \ldots + a_{in}r_n = b_i.$$

Řešením soustavy $(*)$ nazýváme každý n-rozměrný aritmetický vektor $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in V_n(T)$, který je řešením všech rovnic soustavy.

4, 1.3. Poznámka. Označíme-li $\underline{A} = (a_{ik})$ matici typu (m, n) tvořenou koeficienty u neznámých, píšeme soustavu $(*)$ maticově ve tvaru

$$\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T,$$

kde $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ je *vektor neznámých*, $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in V_m(T)$ vektor *pravých stran soustavy* $(*)$. Matici $\underline{A}$ nazýváme *maticí soustavy* $(*)$. Matici $\underline{A}_r$

typu $(m, n+1)$, která vznikne z matice $\underline{A}$ tak, že do $(n+1)$-ho sloupce zapíšeme vektor $\underline{b}^T$, tj.

$$\underline{A}_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* $(*)$.

4, 1.4. <u>Frobeniova věta.</u> Soustava $\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T$ má řešení, právě když hodnost matice $\underline{A}$ je rovna hodnosti rozšířené matice $\underline{A}_r$.

4, 1.5. <u>Věta.</u> Nechť hod $\underline{A} =$ hod $\underline{A}_r = h, n$ je počet neznámých.
a) Soustava $\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T$ má jediné řešení, právě když platí $h = n$.
b) Soustava $\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T$ má nekonečně mnoho řešení, právě když platí $h < n$.

4, 1.6. <u>Definice.</u> Soustava $\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T$ se nazývá *homogenní*, resp. *nehomogenní*, je-li $\underline{b} = \underline{o}$, resp. $\underline{b} \neq \underline{o}$.

4, 1.7. <u>Věta.</u> Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, tzv. triviální řešení $\underline{o} = (0, 0, \ldots, 0)$.

4, 1.8. <u>Věta.</u> Pro homogenní soustavu rovnic $\underline{A}\,\underline{x}^T = o^T$ platí: Je-li hod $\underline{A} = h$, má tato soustava $n - h$ lineárně nezávislých řešení. Množina všech řešení obsahuje právě všechny lineární kombinace těchto $n - h$ řešení.

4, 1.9. <u>Věta.</u> Všechna řešení nehomogenní soustavy $\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T$ můžeme vyjádřit jako součet jednoho libovolného řešení této soustavy a všech řešení příslušné homogenní soustavy $\underline{A}\,\underline{x}^T = o^T$.

4, 1.10. <u>Definice.</u> O dvou soustavách lineárních rovnic řekneme, že jsou *ekvivalentní*, jestliže mají stejné množiny řešení.

4, 1.11. <u>Věta.</u> Nechť jsou dány dvě soustavy lineárních rovnic nad týmž tělesem T

$$\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T, \ \underline{C}\,\underline{x}^T = d^T$$

takové, že rozšířená matice $\underline{C}_r$ vznikla elementárními řádkovými úpravami z matice $\underline{A}_r$. Pak jsou obě soustavy ekvivalentní.

4, 1.12. <u>Poznámka.</u> Při konkrétním výpočtu je někdy účelné provést jednoduche úpravy i se sloupci. <u>Pozor !</u> Vyměníme-li však i-tý slopec matice $\underline{A}$ s jejím j-tým sloupcem, vymění se ve vektoru řešení jeho i-tý a j-tý člen. Vynásobení i-tého sloupce nenulovým prvkem $\alpha \in T$ představuje vynásobení i-tého členu řešení prvkem α^{-1}. Poslední slopec matice $\underline{A}_r$ nesmíme při elementárních sloupcových úpravách používat.

4, 1.13. Gaussova eliminační metoda řešení soustav. Řešme soustavu $\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T$. Matici $\underline{A}_r$ převedeme elementárními řádkovými úpravami (příp. jednoduchými úpravami se sloupci - viz 4,1.12) na ekvivalentní zobecněnou trojúhelníkovou matici $\underline{C}_r$. Úlohu nalézt všechna řešení soustavy $\underline{A}\,\underline{x}^T = b^T$ jsme tak převedli na úlohu řešit soustavu s rozšířenou maticí $\underline{C}_r$, kde

$$\underline{C}_r = \left(\begin{array}{ccccccc|c} p_{11}, & p_{12}, & \dots, & p_{1h}, & \dots, & p_{1n} & & q_1 \\ 0, & p_{22}, & \dots, & p_{2h}, & \dots, & p_{2n} & & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & p_{hh}, & \dots, & p_{hn} & & q_h \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0 & & q_{h+1} \end{array}\right).$$

Je-li $q_{h+1} \neq 0$, nemá soustava řešení, je-li $q_{h+1} = 0$, můžeme libovolně volit $n-h$ neznámých a pomocí nich vypočítat zbývajících h neznámých.

4, 1.14. Postup při výpočtu inverzní matice . Matici $\underline{A}$ převedeme ekvivalentními řádkovými úpravami na jednotkovou matici a zároveň tytéž úpravy provádíme s jednotkovou maticí stejného řádu. Na konci procesu získáme z $\underline{A}$ jednotkovou matici $\underline{E}$ a z jednotkové matice $\underline{E}$ matici $\underline{A}^{-1}$. Schematicky zapsáno:

$$(\underline{A}\,|\,\underline{E}) \sim (\underline{E}\,|\,\underline{A}^{-1}).$$

4, 1.15. Poznámka . Popsané úpravy "dvojmatice" $(\underline{A}\,|\,\underline{E})$ vedoucí k inverzní matici provádíme pouze s řádky matice. Sloupce zde totiž znamenají koeficienty u neznámých v soustavách rovnic, jejichž pravé strany jsou aritmetické vektory s jedním prvkem rovným jednotkovému prvku z T a ostatní nulovému prvku z T. Změnami sloupců bychom změnili význam neznámých - viz 4, 1.12.

4.2 Řešené příklady

4, 2.1. Nalezněme všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rrrrr} x_1- & x_2+ & x_3- & 2x_4 = & 0, \\ & x_2+ & 2x_3- & x_4 = & -1, \\ 2x_1+ & x_2- & x_3- & 3x_4 = & 1, \\ -x_1- & x_2+ & & 2x_4 = & 0. \end{array}$$

Řešení . Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Na rozšířenou matici soustavy $\underline{A}_r$ provedeme postupně vhodné elementární řádkové úpravy:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & -1, & 1, & -2 & 0 \\ 0, & 1, & 2, & -1 & -1 \\ 2, & 1, & -1, & -3 & 1 \\ -1, & -1, & 0, & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & -1, & 1, & -2 & 0 \\ 0, & 1, & 2, & -1 & -1 \\ 0, & 3, & -3, & 1 & 1 \\ 0, & -2, & 1, & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & -1, & 1, & -2 & 0 \\ 0, & 1, & 2, & -1 & -1 \\ 0, & 0, & -9, & 4 & 4 \\ 0, & 0, & 5, & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & -1, & 1, & -2 & 0 \\ 0, & 1, & 2, & -1 & -1 \\ 0, & 0, & -9, & 4 & 4 \\ 0, & 0, & 0, & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Protože hod $\underline{A}$ = hod $\underline{A}_r = 4$, $n = 4$, má soustava právě jedno řešení. Ekvivalentní soustava je

$$\begin{array}{rrrrr} x_1- & x_2+ & x_3- & 2x_4 = & 0, \\ & x_2+ & 2x_3- & x_4 = & -1, \\ & - & 9x_3- & 4x_4 = & 4, \\ & & & x_4 = & 1, \end{array}$$

odkud postupně dostaneme (výpočet začínáme od čtvrté rovnice)

$$x_4 = 1,\ x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = 2.$$

Jediným řešením je vektor

$$\underline{r} = (2, 0, 0, 1).$$

4, 2.2. Nalezněme všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1+ & 2x_2- & x_3+ & & 2x_5 = & 4, \\ & x_2+ & x_3- & x_4 & = & 1, \\ x_1+ & 4x_2+ & x_3- & 2x_4+ & 2x_5 = & 60. \end{array}$$

<u>Řešení .</u> Postupujeme analogicky jako v příkl. 4, 2.1:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1, & 2, & -1, & 0, & 2 & 4 \\ 0, & 1, & 1, & -1, & 0 & 1 \\ 1, & 4, & 1, & -2, & 2 & 60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1, & 2, & -1, & 0, & 2 & 4 \\ 0, & 1, & 1, & -1, & 0 & 1 \\ 0, & 2, & 2, & -2, & 0 & 56 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1, & 2, & -1, & 0, & 2 & 4 \\ 0, & 1, & 1, & -1, & 0 & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 & 56 \end{array}\right).$$

Protože hod $\underline{A} = 2$, hod $\underline{A}_r = 3$ nemá soustava řešení.

4, 2.3. Nalezněme všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1- & x_2 & + & 2x_4- & x_5 = & 1, \\ & x_2- & x_3- & x_4+ & 2x_5 = & 1, \\ x_1+ & x_2- & 2x_3- & + & 3x_5 = & 3, \\ -x_1+ & 2x_2- & x_3- & 3x_4+ & 3x_5 = & 0, \end{array}$$

<u>Řešení .</u>

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1, & -1, & 0, & 2, & -1 & 1 \\ 0, & 1, & -1, & -1, & 2 & 1 \\ 1, & 1, & -2, & 0, & 3 & 3 \\ -1, & 2, & -1, & -3, & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1, & -1, & 0, & 2, & -1 & 1 \\ 0, & 1, & -1, & -1, & 2 & 1 \\ 0, & 2, & -2, & -2, & 4 & 2 \\ 0, & 1, & -1, & -1, & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Čtvrtý řádek je roven druhému, třetí řádek je dvojnásobek druhého, proto je hod $\underline{A}$ = hod $\underline{A}_r = 2$, $n = 5$. Soustava má nekonečně mnoho řešení, $5 - 2 = 3$ neznámé jsou volitelné. Označme např.

$$x_3 = t,\ x_4 = u,\ x_5 = v.$$

Z druhé rovnice ekvivalentní soustavy

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1- & x_2+ & & 2x_4- & x_5 = & 1, \\ & x_2- & x_3- & x_4- & 2x_5 = & 1 \end{array}$$

pak dostaneme

$$\text{tj.}\ \begin{array}{l} x_2 - t - u + 2v = 1, \\ x_2 = 1 + t + u - 2v, \end{array}$$

a z první rovnice

$$x_1 = 2 + t - u - v.$$

Libovolné řešení soustavy můžeme tedy psát ve tvaru

$$\underline{r} = (2 + t - u - v, 1 + t + u - 2v, t, u, v).$$

tj.

$$\underline{r} = (2, 1, 0, 0, 0) + \underline{t} = (1, 1, 1, 0, 0) + \underline{u} = (-1, 1, 0, 1, 0) + \underline{v} = (-1, -2, 0, 0, 1), t, u, v \in \mathbf{R}.$$

4, 2.4. Řešme soustavu nehomogenních lineárních rovnic danou rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 1, & a, & 2 & -7 \\ a+3, & 6, & -3 & 3 \end{array}\right)$$

a proveďme diskusi řešení vzhledem k parametru $a \in \mathbf{R}$.
Řešení . Matice soustavy obsahuje parametr a. Je výhodné vyměnit první a třetí sloupec (ve třetím sloupci se nevyskytuje parametr a). Na výměnu sloupců pak nesmíme zapomenout při řešení matice.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 2, & a, & 1 & -7 \\ -3, & 6, & a+3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 0, & a+2, & -1 & -15 \\ 0, & 3, & a+6 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 0, & 3, & a+6 & 15 \\ 0, & a+2, & -1 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -1, & 1 & 4 \\ 0, & 3, & a+6 & 15 \\ 0, & 0, & 3+(a+6)(a+2) & 45+15a+30 \end{array}\right).$$

Pro hodnost matic $\underline{A}$ a $\underline{A}_r$ je zřejmě rozhodující třetí řádek poslední matice. Platí:

$$\operatorname{hod}\underline{A} = 2 \Leftrightarrow 3 + (a+6)(a+2) = 0, \text{tj.}\, a^2 + 8a + 15 = 0;$$

kořeny této kvadratické rovnice jsou

$$a_1 = -5, a_2 = -3.$$

Pro $a \in \mathbf{R}$, $a_1 \neq -5$, $a_2 \neq -3$, je $\operatorname{hod}\underline{A} = 3$. Vypočítáme $\operatorname{hod}\underline{A}_r$:
a) Pro $a = -5$ je $45 + 15a + 30 = 15(a+5) = 0$, tj. $\operatorname{hod}\underline{A}_r = 2$.
b) Pro $a = -3$ je $15(a+5) \neq 0$, tedy $\operatorname{hod}\underline{A}_r = 3$.
c) Pro $a \neq -5$, $a \neq -3$ je $\operatorname{hod}\underline{A}_r = 3$.
Ad a). Platí $\operatorname{hod}\underline{A} = \operatorname{hod}\underline{A}_r = 2$, $n = 3$, soustava má tedy nekonečně mnoho řešení, jedna neznámé je volitelná. Řešení má obecně tvar (nesmíme zapomenout na záměnu sloupců)

$$\underline{r} = (t, 5 - \frac{1}{3}t, 9 - \frac{4}{3}t),\ t \in \mathbf{R}.$$

Ad b). Protože $\operatorname{hod}\underline{A} = 2$, $\operatorname{hod}\underline{A}_r = 3$, nemá soustava řešení.
Ad c). Platí $\operatorname{hod}\underline{A} = \operatorname{hod}\underline{A}_r = 3$, $n = 3$, soustava má právě jedno řešení

$$\underline{r} = (\frac{15}{a+3}, -\frac{15}{a+3}, \frac{4a-18}{a+3}).$$

4, 2.5. Rozhodněme, zda je matice

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & -3 \\ 2, & 2, & 1 \\ 4, & 0, & -1 \end{pmatrix}$$

regulární. V kladném případě vypočítejme matici $\underline{A}^{-1}$.
<u>Řešení .</u> Postupujeme podle 4, 1.14. V průběhu výpočtu získáme i hodnost matice $\underline{A}$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 2, & 2, & 1 & 0, & 1, & 0 \\ 4, & 0, & -1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2, & 2, & 1 & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 4, & 0, & -1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2, & 2, & 1 & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -4, & -3 & 0, & -2, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2, & 2, & 1 & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -15 & 4, & -2, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 30, & 30, & 0 & 4, & 13, & 1 \\ 0, & -5, & 0 & -1, & -2, & 1 \\ 0, & 0, & -15 & 4, & -2, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 30, & 0, & 0 & -2, & 1, & 7 \\ 0, & -5, & 0 & -1, & -2, & 1 \\ 0, & 0, & -15 & 4, & -2, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0 & -1/15, & 1/30, & 7/30 \\ 0, & 1, & 0 & 1/5, & 2/5, & -1/5 \\ 0, & 0, & 1 & -4/15, & -2/15, & -1/15 \end{array}\right).$$

Z předposlední matice je vidět, že $\underline{A}$ je regulární matice (hod $\underline{A} = 3$). Z poslední matice dostáváme

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -2, & 1, & 7 \\ 6, & 12, & -6 \\ -8, & 4, & -2 \end{pmatrix}$$

Zkouška:

$$\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0, & 1, & -3 \\ 2, & 2, & 1 \\ 4, & 0, & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2, & 1, & 7 \\ 6, & 12, & -6 \\ -8, & 4, & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 30, & 0, & 0 \\ 0, & 30, & 0 \\ 0, & 0, & 30 \end{pmatrix} = \underline{E}.$$

4, 2.6. Nalezněte matici $\underline{X}$, pro kterou platí $\underline{A}\,\underline{X}\,\underline{B} = \underline{C}$, kde

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1, & -2 \\ -2, & 3 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}, \underline{C} = \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení . V maticové rovnici je povoleno přičíst (odečíst) k oběma stranám tutéž matici, obě strany násobit prvkem $\alpha \in T, \alpha \neq 0$. Při násobení a vytýkání matic nesmíme zapomenout, že násobení matic není komutativní. V našem příkladě dostáváme postupně:

$$\underline{X}\,\underline{B} = \underline{A}^{-1}\,\underline{C},$$
$$\underline{X} = \underline{A}^{-1}\,\underline{C}\,\underline{B}^{-1},$$

pokud $\underline{A}^{-1}$, $\underline{B}^{-1}$ existují.

Elementárními řádkovými úpravami dostaneme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1, & -2 & 1, & 0 \\ -2, & 3 & 0, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1, & -2 & 1, & 0 \\ 0, & -1 & 2, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1, & 0 & -3, & -2 \\ 0, & -1 & 2, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1, & 0 & -3, & -2 \\ 0, & 1 & -2, & -1 \end{array}\right), \text{ tedy } \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3, & -2 \\ -2, & -1 \end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1, & 0 & 1, & 0 \\ 2, & 1 & 0, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1, & 0 & 1, & 0 \\ 0, & 1 & -2, & 1 \end{array}\right), \text{ tedy } \underline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2, & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakonec vypočítáme součin

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} -3, & -2 \\ -2, & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5, & -8 \\ 3, & -5 \end{pmatrix}.$$

Zkouška:

$$\begin{pmatrix} 1, & -2 \\ -2, & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5, & -8 \\ 3, & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}.$$

4, 2.7. Nalezněte matici $\underline{X}$, pro kterou platí $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B} + \underline{X}\,\underline{A}$, kde

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2, & 5 \\ 0, & 4 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení . Na rozdíl od příkl. 4, 2.6 zde nelze vyjádřit matici $\underline{X}$ přímo, protože rovnice je ekvivalentní rovnici

$$\underline{A}\,\underline{X} - \underline{X}\,\underline{A} = \underline{B},$$

Z níž nelze matici $\underline{X}$ vytknout. Proto označíme

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix}$$

a budeme hledat x_1, x_2, x_3, x_4 tak, aby platilo

$$\begin{pmatrix} 2, & 5 \\ 0, & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2, & 5 \\ 0, & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{pmatrix} 5x_3, & -5x_1 - 2x_2 + 5x_4 \\ 2x_3, & -5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato rovnost bude splněna, jestliže budou x_1, x_2, x_3, x_4 vyhovovat soustavě rovnic

$$\begin{array}{rrrrl} & & 5x_3 & & = 0, \\ -5x_1 - & 2x_2 & + & 5x_4 & = 1, \\ & & 6x_3 & & = 0, \\ & - & 5x_3 & & = 0. \end{array}$$

Řešme tuto soustavu Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0, & 0, & 5, & 0 & 0 \\ -5, & -2, & 0, & 5 & 1 \\ 0, & 0, & 6, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & -5, & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -5, & -2, & 0, & 5 & 1 \\ 0, & 0, & 5, & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Protože hodnost matice soustavy i rozšířené matice soustavy je 2, má soustava nekonečně mnoho řešení; dvě neznámé můžeme volit libovolně. Z poslední rovnice je

$$x_3 = 0,$$

tedy, zvolíme-li např. $x_1 = s, x_2 = t$, bude

$$5x_4 = 1 + 5s + 2t,$$

tj.

$$x_4 = \frac{1}{5} + s + \frac{2}{5}t.$$

Tedy

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} s, & t \\ 0, & \frac{1}{5} + s + \frac{2}{5}t \end{pmatrix}, s, t \in \mathbf{R}.$$

Zkouška

$$\underline{A}\,\underline{X} = \begin{pmatrix} 2s, & 5s + 4t + 1 \\ 0, & \frac{4}{5} + 4s + \frac{8}{5}t \end{pmatrix} = \underline{B} + \underline{X}\,\underline{A}.$$

Kapitola 5

Vektorový prostor

5.1 Základní pojmy

5, 1.1. Definice. Nechť T je těleso, V množina. Uspořádanou trojici $(V, +, .)$, kde $+$ je vnitřní operace na V (tj. zobrazení $V \times V \to V$), . vnější operace na V nad T (tj. zobrazení $T \times V \to V$), nazveme *vektorovým prostorem nad tělesem* T, jestliže:
a) $(V, +)$ je komutativní grupa,
b) vnější operace . splňuje tyto podmínky:
 b1) $\forall \alpha \in T \, \forall a, b \in V : \alpha.(a + b) = \alpha.a + \alpha.b$,
 b2) $\forall \alpha, \beta \in T \, \forall a \in V : (\alpha + \beta).a = \alpha.a + \beta.a$,
 b3) $\forall \alpha, \beta \in T \, \forall a \in V : (\alpha\beta).a = \alpha.(\beta.a)$,
 b4) $\forall a \in T : 1.a = a$ (1 je jednotkový prvek v T).
Prvky z množiny V nazýváme *vektory*, prvky z tělesa T *skaláry*.

5, 1.2. Poznámka. Aritmetický vektorový prostor $V_n(T)$ (kap. 1) je vektorový prostor nad T podle def. 5, 1.1.

5, 1.3. Označení. Protože $(V, +)$ je grupa, existuje *nulový vektor*, označíme ho o, a ke každému $a \in V$ existuje *opačný vektor*, označíme ho $-a$. Místo vektorový prostor $(V, +, .)$ budeme psát pouze $V(T)$, příp. V, pokud nebude moci dojít k nedorozumění. Místo $a + (-b)$ budeme stručně psát $a - b$. Je-li $V = \{o\}$, nazýváme vektorový prostor $(\{o\}, +, .)$ nad tělesem T *nulovým vektorovým prostorem* a píšeme $\{o\}$, v ostatních případech mluvíme o *nenulových vektorových prostorech*.

5, 1.4. Věta. Ve vektorovém prostoru $V(T)$ platí:
a) $\forall a \in V : 0.a = o$ (0 je nulový skalár),
b) $\forall \alpha \in T : \alpha.o = o$,
c) $\forall \alpha \in T \, \forall a \in V : \alpha.a = o \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee a = o)$,

d) $\forall a \in V : -a = (-1).a$.

5, 1.5. Definice. Nechť W je neprázdná podmnožina vektorového prostoru $(V, +, .)$. Uspořádanou trojici $(W, +, .)$ nazveme *(vektorovým) podprostorem* prostoru $V(T)$, jestliže platí:
a) $\forall a, b \in W : a + b \in W$,
b) $\forall \alpha \in T \, \forall a \in W : \alpha.a \in W$.

5, 1.6. Poznámka. Uspořádaná trojice $(W, +, .)$ s operacemi $+, .$ stejnými jako ve $(V, +, .)$ tvoří vektorový prostor.

5, 1.7. Věta. Nechť U, V jsou podprostory vektorového prostoru $V(T)$. Pak $U \cap V$ je také podprostor prostoru $V(T)$.

5, 1.8. Definice. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou vektory z $V(T)$. Řekneme, že vektor a je *lineární kombinací* vektorů $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jestliže existují $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ tak, že

$$a = \alpha_1.a_1 + \alpha_2.a_2 + \ldots + \alpha_n.a_n.$$

Skaláry $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nazýváme *koeficienty* této lineární kombinace.

5, 1.9. Věta. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou vektory z vektorového prostoru $V(T)$. Pak množina

$$M = \{\alpha_1.a_1 + \alpha_2.a_2 + \ldots + \alpha_n.a_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T\}$$

tvoří podprostor prostoru $V(T)$.

5, 1.10. Definice. Množinu M z věty 5, 1.9 nazýváme *podprostorem generovaným vektory* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (*lineárním obalem* vektorů $a_1, a_2, \ldots, a_n$) a značíme $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. O množině $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ říkáme, že *generuje* množinu M nebo že je to *množina generátorů* podprostoru M.

5, 1.11. Věta. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou vektory z vektorového prostoru $V_n(T)$, $M = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Provedeme-li na skupinu vektorů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ některou z následujících změn, dostaneme novou skupinu vektorů, která generuje stejný podprostor M:
a) změna pořadí vektorů,
b) nahrazení libovolného vektoru z M jeho α-násobkem, kde $\alpha \in T, \alpha \neq 0$,
c) nahrazení libovolného vektoru z M jeho součtem s lineární kombinací ostatních vektorů z M,
d) vynechání vektoru, který je lineární kombinací ostatních vektorů,
e) přidání vektoru, který je lineární kombinací vektorů z M.

5, 1.12. Věta. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou vektory z vektorového prostoru $V_n(T)$. Vektor $b \in V$ je lineární kombinací vektorů $a_1, a_2, \ldots, a_n$, právě když

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n, b] = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

5, 1.13. Úmluva.
a) Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou vektory z vektorového prostoru $V(T)$. Jestliže jsou všechny koeficienty lineární $\alpha_1.a_1 + \alpha_2.a_2 + \ldots + \alpha_n.a_n$ rovny nulovému skaláru, nazveme danou lineární kombinaci *triviální.* V opačném případě mluvíme o *netriviální lineární kombinaci.*
b) Jestliže platí

$$\alpha_1.a_1 + \alpha_2.a_2 + \ldots + \alpha_n.a_n = o,$$

nazýváme tuto lineární kombinaci *nulovou.*

Poznámka. Definice a věty týkající se lineární závislosti a nezávislosti jsou zobecněním příslušné teorie z kap. 1.

5, 1.14. Definice. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou vektory z vektorového prostoru $V(T)$. Jestliže existuje nulová netriviální kombinace vektorů $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nazýváme tyto vektory *lineárně závislými*, v opačném případě *lineárně nezávislými.*

5, 1.15. Věta. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou vektory z vektorového prostoru $V(T)$. Pak platí:
a) Je-li $n = 1$, je vektor a_1 lineárně závislý, právě když $a_1 = o$.
b) Je-li $n > 1$, jsou vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lineárně závislé, právě když existuje index i, $1 \leq i \leq n$, takový, že vektor a_1 je lineární kombinací ostatních vektorů.

5, 1.16. Steinitzova věta. Nechť vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n$ generují vektorový prostor $V(T)$. Nechť vektory $b_1, b_2, \ldots, b_k$ z $V(T)$ jsou lineárně nezávislé. Pak platí:
a) $k \leq n$,
b) existuje $n-k$ vektorů a_1 z $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, které spolu s vektory $b_1, b_2, \ldots, b_k$ generují $V(T)$.

5, 1.17. Definice. Vektorový prostor $V(T)$ nazveme *konečněrozměrným*, jestliže existují vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V(T)$ takové, že $V(T) = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Vektorový prostor, který není konečněrozměrný, se nazývá *nekonečněrozměrný.*

5, 1.18. Definice. Nechť $V(T)$ je konečněrozměrný prostor. Podmnožinu $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset V(T)$ nazveme *bází* vektorového prostoru $V(T)$, jestliže platí:
a) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou lineárně nezávislé,
b) $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = V(T)$.

5, 1.19. Věta. Nechť $V(T)$ je konečněrozměrný vektorový prostor. Potom všechny báze prostoru $V(T)$ mají stejný počet prvků.

5, 1.20. Definice. Nechť $V(T)$ je konečněrozměrný vektorový prostor. *Dimenzí* nenulového prostoru $V(T)$ nazýváme počet prvků některé jeho báze. Dimenze nulového vektorového prostoru je 0. Dimenze nekonečněrozměrného vektorového prostoru je ∞. Dimenzi vektorového prostoru $V(T)$ značíme dim $V(T)$.

5, 1.21. Věta. Nechť dim $V(T) = n$. Pak platí:
a) Jsou-li $b_1, b_2, \dots, b_k \in V(T)$ lineárně nezávislé vektory, lze je doplnit na bázi prostoru $V(T)$,
b) vektory $a_1, a_2, \dots, a_n \in V(T)$ tvoří bázi $V(T)$, právě když jsou lineárně nezávislé,
c) vektory $a_1, a_2, \dots, a_n \in V(T)$ tvoří bázi $V(T)$, právě když generují $V(T)$,
d) vektory $a_1, a_2, \dots, a_n \in V(T)$ tvoří bázi $V(T)$, právě když vektor $b \in V(T)$ lze vyjádřit právě jedním způsobem jako lineární kombinaci vektorů $a_1, a_2, \dots, a_n$,
e) vektory $a_1, a_2, \dots, a_m$, kde $m > n$, jsou lineárně závislé.

5, 1.22. Definice. Označme $\mathcal{B}$ skupinu vektorů $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ v tomto pořadí a nechť $\mathcal{B}$ je báze vektorového prostoru $V(T)$, $a \in V(T)$. Uspořádanou n-tici skalárů $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ takovou, že platí

$$a = \alpha_1.a_1 + \alpha_2.a_2 + \ldots + \alpha_n.a_n,$$

nazýváme *souřadnicemi vektoru a vzhledem k bázi* $\mathcal{B}$. Píšeme

$$\underline{a}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Poznámka. Kdykoliv budeme v dalším výkladu hovořit o souřadnicích vektoru vzhledem k bázi, budeme mít vždy na mysli uspořádanou n-tici vektorů. Nebude-li třeba souřadnice vektoru a vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ vypisovat, budeme psát pouze $\underline{a}_{\mathcal{B}}$.

5, 1.23. Věta. Nechť U, W jsou podprostory vektorového prostoru $V(T)$. Potom množina $U + W = \{a + b\,; a \in U, b \in W\}$ je podprostorem vektorového prostoru $V(T)$.

5, 1.24. Definice.
a) Nechť U, W jsou podprostrory vektorového prostoru $V(T)$. Podprostor $U + W$ nazýváme *lineárním součtem* podprostorů U, W.
b) Nechť $U \cap W = \{o\}$. Potom lineární součet $U + W$ nazýváme *direktním součtem* podprostorů U, W a píšeme $U \oplus W$.

5, 1.25. Věta. Nechť

$$U = [a_1, a_2, \dots, a_n],\ W = [b_1, b_2, \dots, b_k]$$

jsou podprostory vektorového prostoru $V(T)$. Pak platí:

$$U + W = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_k].$$

5, 1.26. Věta. Nechť U, W jsou podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru $V(T)$. Pak platí:

$$\dim U + \dim W = \dim (U + W) + \dim (U \cap W).$$

5, 1.27. Věta. Nechť U, W, Z jsou podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru $V(T)$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:
a) $Z = U \oplus W$,
b) $Z = U + W$ a $\dim Z = \dim U + \dim W$,
c) je-li $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ báze U, $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ báze W, pak je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ báze Z,
d) $U, V \subset Z$, $U \cap V = \{o\}$ a $\dim Z = \dim U + \dim V$.

5.2 Řešené příklady

5, 2.1. Zjistěme, která z následujících množin tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$:
a) V_1 je množina všech reálných funkcí definovaných na intervalu I;
b) V_2 je množina všech funkcí tvaru $y = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbf{R}$, definovaných v $\mathbf{R}$;
c) V_3 je množina všech reálných funkcí definovaných na intervalu I a procházejících bodem $[2, 1]$. Ve všech případech jsou operace + a . definovány těmito předpisy:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha . f(x),\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Řešení . Ve všech případech musíme ověřit, zda jsou splněny podmínky z def. 5, 1.1.
a) Nulovým vektorem je funkce o definovaná předpisem

$$o(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in I;\ \text{přitom } o \in V_1;$$

opačným vektorem k vektoru f je funkce $-f$ definovaná předpisem

$$(-f)(x) = -f(x) \text{ pro všechna } x \in I;\ \text{přitom } -f \in V_1;$$

sčítání funkcí definovaných na I je zřejmě vždy definované, asociativní a komutativní, tvoří tedy daná množina s operací + komutativní grupu. Vlastnosti b1) až b4) jsou zřejmě splněny také. $(V_1, +, .)$ tedy tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.
b) Analogicky se ukáže, že $(V_2, +, .)$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.
c) Operace + není neomezeně definovaná. Je-li totiž $f, g \in V_3(\mathbf{R})$, platí pro $f + g$:

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 1 + 1 = 2 \neq 1,$$

tedy $f + g \notin V_3$. $(V_3, +, .)$ tedy netvoří vektorový prostor.

5, 2.2. Zjistěme, která z následujících množin s uvedenými operacemi +, . tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{R}$:
a) množina orientovaných úseček v rovině s počátečním bodem umístěným do

společného bodu O, se sčítáním vektorů a násobením reálným číslem definovaným způsobem známým ze střední školy;
b) množina $\mathbf{R}^+$ všech kladných reálných čísel s operacemi $\oplus$, $\odot$ definovanými předpisy $a \oplus b = ab,\ \alpha \odot a = a^\alpha,\ a, b \in \mathbf{R}^+,\ \alpha \in \mathbf{R}$.
Řešení . V obou případech se ukáže, že se jedná o vektorový prostor:
a) Nulovým vektorem je orientovaná úsečka, jejíž počáteční i koncový bod splývají s bodem O; opačný vektor k orientované úsečce s koncovým bodem B je orientovaná úsečka s koncovým bodem C, kde C je bod souměrně sdružený k bodu B podle O.
b) Nejprve ukážeme, že $(\mathbf{R}^+, \oplus)$ je komutativní grupa $(a, b, c \in \mathbf{R}^+)$:

$$\begin{gathered} a \oplus b = ab = ba = b \oplus a, \\ (a \oplus b) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (b \oplus c), \\ a \oplus 1 = a.1 = a \quad (1 \text{ je nulový vektor}), \\ a \oplus \tfrac{1}{a} = a.\tfrac{1}{a} = 1 \quad (\text{opačný vektor k } a \text{ je } \tfrac{1}{a}); \end{gathered}$$

dále ověříme vlastnosti b1) až b4) $(\alpha, \beta \in \mathbf{R},\ a, b \in \mathbf{R}^+)$:

$$\begin{gathered} \alpha \odot (a \oplus b) = (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha = (\alpha \odot a) \oplus (\alpha \odot b), \\ (\alpha + \beta) \odot a = a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta = (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a), \\ (\alpha\beta) \odot a = a^{\alpha\beta} = (a^\alpha)^\beta = \beta \odot (\alpha \odot a), \\ 1 \odot a = a^1 = a. \end{gathered}$$

5, 2.3. Rozhodněme, která z následujících množin tvoří podprostor vektorového prostoru $V_3(\mathbf{R})$:
a) $W_1 = \{(x, y, 0) \in V_3(\mathbf{R})\}$;
b) $W_2 = \{(x, y, x) \in V_3(\mathbf{R})\}$;
c) $W_3 = \{(x, y, 1) \in V_3(\mathbf{R})\}$.
Řešení . Musíme ověřit podmínky def. 5, 1.5.
a)
$(0, 0, 0) \in W_1 \Rightarrow W_1 \neq \emptyset$,
$(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in W_1$,
$\alpha(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, 0) \in W_1,\ \alpha \in \mathbf{R}$,
tedy W_1 tvoří podprostor vektorového prostoru $V_3(\mathbf{R})$.
b)
$(0, 0, 0) \in W_2 \Rightarrow W_2 \neq \emptyset$,
$(x_1, y_1, x_1) + (x_2, y_2, x_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2) \in W_2$,
$\alpha(x, y, x) = (\alpha x, \alpha y, \alpha x) \in W_2,\ \alpha \in \mathbf{R}$,
tedy W_2 tvoří podprostor vektorového prostoru $V_3(\mathbf{R})$.
c)
$(0, 0, 1) \in W_3 \Rightarrow W_3 \neq \emptyset$,
$(x_1, y_1, 1) + (x_2, y_2, 1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2) \notin W_3$,
tedy W_3 není podprostor vektorového prostoru $V_3(\mathbf{R})$.

5, 2.4. Rozhodněme, zda matice

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \ \underline{B} = \begin{pmatrix} -1, & -1 \\ 0, & 0 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}, \ \underline{C} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně závislé nebo nezávislé ve vektorovém prostoru $M_{32}(\mathbf{R})$ matic typu (3,2) nad $\mathbf{R}$, kde je definován součet matic a α-násobek matice, $\alpha \in \mathbf{R}$, podle kap. 3.
Řešení . Aby matice $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ byly v $M_{32}(\mathbf{R})$ lineárně nezávislé, musí být rovnost

$$\alpha\underline{A} + \beta\underline{B} + \gamma\underline{C} = \underline{O}, \ \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R},$$

splněna právě jen pro $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Po dosazení máme rovnost

$$\alpha \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1, & -1 \\ 0, & 0 \\ 2, & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix},$$

tedy

$$\alpha \begin{pmatrix} \alpha - \beta, & -\beta \\ 2\alpha + \gamma, & \alpha + \gamma \\ 2\beta + \gamma, & \beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato rovnost bude splněna, právě když α, β, γ budou vyhovovat soustavě rovnic

$$\begin{array}{rcrl} \alpha & - & \beta = & 0, \\ & - & \beta = & 0, \\ 2\alpha & + & \gamma = & 0, \\ \alpha & + & \gamma = & 0, \\ 2\beta & + & \gamma = & 0, \\ \beta & + & \gamma = & 0, \end{array}$$

která má jediné řešení $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Matice jsou tedy v $M_{32}(\mathbf{R})$ lineárně nezávislé.

5, 2.5. Nechť jsou vektory $a, b, c, d \in V(T)$ lineárně nezávislé. Rozhodněme o lineární nezávislosti
a) vektoru a;
b) vektorů $a + b + d$, b, $a + b$, $c - a$.
Řešení .
a) Protože vektory a, b, c, d jsou lineárně nezávislé, musí být všechny různé od nulového vektoru. Tedy $a \neq o$ a podle věty 5, 1.15 a) je lineárně nezávislý.
b) Utvořme nulovou lineární kombinaci vektorů $a + b + d$, b, $a + b$, $c - a$:

$$\alpha(a + b + d) + \beta b + \gamma(a + b) + \delta(c - a) = o, \ \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in T,$$

tj.

$$(\alpha + \gamma - \delta)a + (\alpha + \beta + \gamma)b + \delta c + \alpha d = o.$$

Protože a, b, c, d jsou lineárně nezávislé vektory, musí platit

$$\begin{array}{lllllll} \alpha + & & \gamma - & \delta = & 0, \\ \alpha + & \beta + & \gamma & = & 0, \\ & & & \delta = & 0, \\ \alpha & & & = & 0. \end{array}$$

Odtud dostáváme $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, tedy $a+b+d$, b, $a+b$, $c-a$ jsou lineárně nezávislé.

5, 2.6. Rozhodněme, zda polynomické funkce f_1, f_2, f_3, f_4 definované v $\mathbf{R}$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé v prostoru všech reálných polynomických funkcí definovaných v $\mathbf{R}$, jestliže

$$f_1(x) = x^5 + x^4,\ f_2(x) = x^5 - 3x^3,\ f_3(x) = x^5 + 2x^2,\ f_4(x) = x^5 - x.$$

Řešení . Opět sestavíme nulovou lineární kombinaci $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4 = o$ (o je nulová funkce, viz příkl. 5, 2.1), tj.

$$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) + \delta f_4(x) = o \ \text{ pro všechna } x \in \mathbf{R}.$$

Po dosazení a úpravě dostáváme rovnici

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^5 + \alpha x^4 - 3\beta x^3 + 2\gamma x^2 - \delta x = 0,\ x \in \mathbf{R}.$$

Tato rovnost je splněna, rovnají-li se koeficienty u příslušných mocnin x na obou stranách rovnice, tj.

$$\begin{array}{rcccccccccl} x^5: & \alpha & + & \beta & + & \gamma & + & \delta & = & 0, \\ x^4: & \alpha & & & & & & & = & 0, \\ x^3: & & - & 3\beta & & & & & = & 0, \\ x^2: & & & & & 2\gamma & & & = & 0, \\ x^1: & & & & & & - & \delta & = & 0, \end{array}$$

odkud $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Funkce jsou lineárně nezávislé.

5, 2.7. Zjistěme, zda funkce $f(x) = 2 + x - x^2$ patří do podprostoru $[f_1, f_2]$, $f_1(x) = 1 - 2x^2$, $f_2(x) = 1 - x$, vektorového prostoru všech reálných polynomických funkcí definovaných v $\mathbf{R}$.
Řešení . Funkce $f \in [f_1, f_2]$, jestliže existují $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tak, že

$$f = \alpha f_1 + \beta f_2,$$

tj.

$$2 + x - x^2 = \alpha(1 - 2x^2) + \beta(1 - x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Tato rovnost bude splněna pro α, β která vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{array}{rcccccr} x^2: & - & 2\alpha & & & = & -1, \\ x^1: & & & - & \beta & = & 1, \\ x^0: & & \alpha & + & \beta & = & 2. \end{array}$$

Z prvních dvou rovnic dostáváme $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -1$, pro tato α, β však třetí rovnice splněna není. Čísla α, β vyhovující naší podmínce tedy neexistují a $f \notin [f_1, f_2]$.

5, 2.8. Zjistěme, zda vektory

$$\underline{a}_1 = (1, 0, 2, 5),\ \underline{a}_2 = (2, 3, 1, 1),\ \underline{a}_3 = (5, -1, 0, 2),\ \underline{a}_4 = (1, 1, 1, 1)$$

tvoří bázi aritmetického vektorového prostoru $V_4(\mathbf{R})$.
Řešení . Máme zjistit, zda libovolný vektor $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ z $V_4(\mathbf{R})$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$, tj. zda existují $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ tak, že

$$\underline{x} = \alpha \underline{a}_1 + \beta \underline{a}_2 + \gamma \underline{a}_3 + \delta \underline{a}_4,$$

tj.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, 0, 2, 5) + \beta(2, 3, 1, 1) + \gamma(5, -1, 0, 2) + \delta(1, 1, 1, 1).$$

Po úpravě dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrl} \alpha & + & 2\beta & + & 5\gamma & + & \delta = & x_1, \\ & & 3\beta & - & \gamma & + & \delta = & x_2, \\ 2\alpha & + & \beta & & & + & \delta = & x_3, \\ 5\alpha & + & \beta & + & 2\gamma & + & \delta = & x_4. \end{array}$$

Řešme ji Gaussovou eliminační metodou (viz 4, 1.13), např.

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 1, & 2, & 5, & 1 & x_1 \\ 0, & 3, & -1, & 1 & x_2 \\ 2, & 1, & 0, & 1 & x_3 \\ 5, & 1, & 2, & 1 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|l} 1, & 2, & 5, & 1 & x_1 \\ 0, & 3, & -1, & 1 & x_2 \\ 0, & -3, & -10, & -1 & x_3 - 2x_1 \\ 0, & -9, & -23, & -4 & x_4 - 5x_1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|l} 1, & 2, & 5, & 1 & x_1 \\ 0, & 3, & -1, & 1 & x_2 \\ 0, & 0, & -11, & 0 & x_2 + x_3 - 2x_1 \\ 0, & 0, & 7, & -1 & x_4 + x_1 - 3x_3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|l} 1, & 2, & 1, & 5 & x_1 \\ 0, & 3, & 1, & -1 & x_2 \\ 0, & 0, & -1, & 7 & x_4 + x_1 - 3x_3 \\ 0, & 0, & 0, & -11 & x_2 + x_3 - 2x_1 \end{array}\right)$$

Hodnost matice soustavy i matice rozšířené je 4 pro libovolná $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$, soustava má proto vždy řešení. Vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ generují $V_4(\mathbf{R})$. Současně jsme ukázali, že jsou lineárně nezávislé, a proto $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$ tvoří bázi $V_4(\mathbf{R})$.

5, 2.9. Určeme dimenzi $[f_1, f_2, f_3, f_4]$ ve vektorovém prostoru všech reálných polynomických funkcí definovaných v $\mathbf{R}$, jestliže

$$f_1(x) = x^6 + x^4,\ f_2(x) = x^6 + 3x^4 - x,\ f_3(x) = x^6 - 2x^4 + x,\ f_4(x) = x^6 - 4x^4 + 2x.$$

Řešení . Funkce f_1, f_2, f_3, f_4 generují $[f_1, f_2, f_3, f_4]$. Musíme z nich vybrat maximální počet lineárně nezávislých funkcí. Nechť platí rovnost

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4 = o,\ \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$$

tj.

$$\alpha(x^6+x^4)+\beta(x^6+3x^4-x)+\gamma(x^6-2x^4+x)+\delta(x^6-4x^4+2x) = 0 \text{ pro všechna } x \in \mathbf{R}.$$

Po úpravě dostáváme

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^6 + (\alpha+3\beta-2\gamma-4\delta)x^4 + (-\beta+\gamma+2\delta)x = 0,$$

odkud

$$\begin{array}{rcrcrcrl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & + & \delta = & 0, \\ \alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & - & 4\delta = & 0, \\ & - & \beta & + & \gamma & + & 2\delta = & 0. \end{array}$$

Řešme tuto homogenní soustavu rovnic:

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 3, & -2, & -4 \\ 0, & -1, & 1, & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & -3, & -5 \\ 0, & -1, & 1, & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & -3, & -5 \\ 0, & 0, & -1, & -1 \end{pmatrix}$$

Tato soustava má netriviální řešení, např.

$$\alpha = -1,\ \beta = 1,\ \gamma = -1,\ \delta = 1.$$

Platí tedy

$$-f_1 + f_2 - f_3 + f_4 = o,$$

tj.

$$f_1 = f_2 - f_3 + f_4 \text{ a } [f_1, f_2, f_3, f_4] = [f_2, f_3, f_4].$$

Analogicky bychom ukázali, že funkce f_2, f_3, f_4 jsou už lineárně nezávislé, tedy $\{f_2, f_3, f_4\}$ tvoří bázi lineárního obalu $[f_1, f_2, f_3, f_4]$. Dimenze prostoru je tedy 3.

5, 2.10. Vektory $\underline{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\underline{a}_2 = (1, 2, 3)$ doplňme na bázi prostoru $V_3(\mathbf{R})$.
Řešení . Použijeme Steinitzovu větu 5, 1.16. Vektory standardní báze $\{\underline{e}_1 = (1, 0, 0), \underline{e}_2 = (0, 1, 0), \underline{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ generují $V_3(\mathbf{R})$, vektory $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ jsou zřejmě lineárně nezávislé. Proto lze z vektorů $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ vybrat jeden, kterým doplníme množinu $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ na bázi. Vyjdeme z množiny $M = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, o které víme, že generuje $V_3(\mathbf{R})$, a postupem analogickým jako v příkl. 5, 2.9 z ní vytvoříme bázi prostoru $V_3(\mathbf{R})$ obsahující vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2$. Nejprve zjistíme, které lineární kombinace vektorů $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ jsou nulové:

$$\begin{array}{rcl} \alpha\underline{a}_1 + \beta\underline{a}_2 + \gamma\underline{e}_1 + \delta\underline{e}_2 + \epsilon\underline{e}_3 & = & \underline{o}, \\ (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\beta+\delta, \alpha+3\beta+\epsilon) & = & (0, 0, 0), \end{array}$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & & & & & = & 0, \\ \alpha & + & 2\beta & + & & & \delta & & & = & 0, \\ \alpha & + & 3\beta & + & & & & & \epsilon & = & 0. \end{array}$$

Upravme matici soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 3, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -1, & 1, & 0 \\ 0, & 2, & -1, & 0, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & -2, & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice soustavy má hodnost 3, počet neznámých je 5, soustava má nekonečně mnoho řešení; dvě neznámé můžeme volit libovolně. Položme $\epsilon = 1, \delta = 0$. Dostaneme $\gamma = -1, \beta = -1, \alpha = 2$, tedy

$$2\underline{a}_1 - \underline{a}_2 - \underline{e}_1 + \underline{e}_3 = \underline{o},$$

odkud

$$\underline{e}_3 = -2\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{e}_1.$$

Vektor $\underline{e}_3$ můžeme podle věty 5, 1.11 d) z množiny M vynechat. Položme nyní $\epsilon = 0, \delta = 1$. Dostaneme $\gamma = 2, \beta = 1, \alpha = -3$, tedy

$$-3\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 = \underline{o},$$

odkud

$$\underline{e}_2 = 3\underline{a}_1 - \underline{a}_2 - 2\underline{e}_1.$$

Z množiny M můžeme tedy vynechat i vektor $\underline{e}_2$. Snadno ukážeme, že vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{e}_1$ jsou lineárně nezávislé. Protože $[\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{e}_1] = V_3(\mathbf{R})$, tvoří podle věty 5, 1.21 množina $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{e}_1\}$ bázi prostoru $V_3(\mathbf{R})$.

5, 2.11. Nechť $\underline{J}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Označme $\mathcal{B}_1 = \{\underline{J}_1, \underline{J}_2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\underline{A}_1, \underline{A}_2\}$.
a) Ověřme, zda $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ jsou báze vektorového prostoru $M_{21}(\mathbf{R})$ matic typu $(2,1)$ nad $\mathbf{R}$;
b) V kladném případě nalezněme souřadnice matice $\underline{U}_{\mathcal{B}_2} = (2, -3)$ v bázi $\mathcal{B}_1$.
Řešení .
a) $\mathcal{B}_1$ je zřejmě skupina lineárně nezávislých matic, která generuje $M_{21}(\mathbf{R})$, proto tvoří bázi. Protože $\mathcal{B}_2$ obsahuje dva prvky, stačí podle věty 5, 1.21 b) ověřit, zda jsou matice $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ lineárně nezávislé. Nechť

$$\alpha\underline{A}_1 + \beta\underline{A}_2 = \underline{O},\ \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

tj.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

po úpravě

$$\begin{pmatrix} -2\alpha+\beta \\ 3\alpha-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soustava rovnic

$$\begin{array}{rcrcl} -2\alpha & + & \beta & = & 0, \\ 3\alpha & - & 2\beta & = & 0 \end{array}$$

má pouze triviální řešení $\alpha=\beta=0$, matice $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ jsou tedy lineárně nezávislé a $\mathcal{B}_2$ tvoří bázi.
b) Protože $\underline{U}_{\mathcal{B}_2} = (2,-3)$, platí podle def. 5, 1.22

$$\underline{U} = 2\underline{A}_1 - 3\underline{A}_2,$$

tj.

$$\underline{U} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme

$$\underline{U} = -7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -7\underline{J}_1 + 9\underline{J}_2.$$

tedy

$$\underline{U}_{\mathcal{B}_1} = (-7, 9).$$

5, 2.12. V prostoru $V_4(\mathbf{R})$ jsou dány podprostory

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4);\ x_1+x_2-2x_3+x_4=0\}, \\ W & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4);\ 3x_1+2x_2-x_4=0\}. \end{array}$$

Určeme aspoň jednu bázi $U\cap W$ a určeme jeho dimenzi.
Řešení . Vektor (x_1,x_2,x_3,x_4) patří do $U\cap W$, právě když patří současně do U i do V, tj. když platí současně

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & & & x_4 & = & 0. \end{array}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, dvě neznámé jsou volitelné. Zvolme např. $x_1=s, x_2=t,\ s,t\in\mathbf{R}$. Pak

$$x_4 = 3s+2t, x_3 = 2s+\frac{3}{2}t.$$

Tedy

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = s(1,0,2,3) + t(0,1,\frac{3}{2},2),\ s,t\in\mathbf{R}.$$

Podprostor $U\cap W$ je tedy generován lineárně nezávislými vektory $\underline{a}=(1,0,2,3)$, $\underline{b}=(0,1,\frac{3}{2},2)$, je tedy $\{\underline{a},\underline{b}\}$ jeho báze a dim $(U\cap W)=2$.

5, 2.13. Určeme $\dim(U+W)$ pro podprostory U, W z příkl. 5, 2.12.
Řešení . Podle věty 5, 1.26 platí

$$\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W).$$

Z příkl. 5, 2.12 víme, že $\dim(U \cap W) = 2$. Určeme $\dim U$ a $\dim W$. Podle věty 4, 1.8 je dimenze prostoru řešení rovnice

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

rova 3 (počet neznámých je 4, hodnost matice soustavy 1), tedy $\dim U = 3$. Analogicky $\dim W = 3$. Proto

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

5, 2.14. Zjistěme, zda je aritmetický vektorový prostor $V_3(\mathbf{R})$ lineárním, příp. direktním součtem svých podprostorů U, W, jestliže
a) $U = [(1,1,1)],\ W = [(1,0,2),(1,4,3),(3,4,2)]$;
b) $U = [(1,2,3)],\ W = [(0,2,1),(1,1,1),(2,0,1)]$.
Řešení .
a) Podle věty 5, 1.25 platí

$$U + W = [(1,1,1),(1,0,2),(1,4,3),(3,4,2)].$$

Určeme $\dim(U+W)$, tj. maximální počet lineárně nezávislých vektorů z uvedené množiny generátorů (hodnost matice, jejíž řádky tvoří dané vektory, viz kap. 2):

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 2 \\ 1, & 4, & 3 \\ 3, & 4, & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 5 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\dim(U+W) = 3$, a proto $V_3(\mathbf{R}) = U + W$. Platí $\dim U = 1$, $\dim W = 3$, tedy

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 1,$$

proto $V_3(\mathbf{R})$ není rovno $U \oplus W$.
b) Postupujeme analogicky jako v a):

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 0, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 2, & 0, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & 1 \\ 1, & 2, & 3 \\ 2, & 0, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & -2, & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & -3 \end{pmatrix},$$

tedy $\dim(U+W) = 3$ a $U + W = V_3(\mathbf{R})$. Zřejmě $\dim U = 1$. Určeme ještě $\dim W$:

$$\begin{pmatrix} 0, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 2, & 0, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & 1 \\ 0, & -2, & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & 1 \end{pmatrix},$$

tedy $\dim W = 2$. Odtud

$$\dim (U \cap W) = 1 + 2 - 3 = 0,$$

proto $V_3(\mathbf{R}) = U \oplus W$.

Kapitola 6

Vektorové prostory se skalárním součinem (Euklidovské vektorové prostory)

6.1 Základní pojmy

6, 1.1. Definice. Vektorový prostor $(E, +, .)$ nad $\mathbf{R}$ nazýváme *euklidovským vektorovým prostorem*, jestliže existuje zobrazení $g : E \times E \to \mathbf{R}$ takové, že pro libovolné vektory $a, b, c \in E$ a libovolné reálné číslo α platí:
a) $g(a, b) = g(b, a)$,
b) $g(a + b, c) = g(a, c) + g(b, c)$,
c) $g(\alpha a, c) = \alpha g(a, c)$,
d) $g(a, a) \geq 0$, $g(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = o$.
Zobrazení g nazýváme *skalárním součinem*.

6, 1.2. Úmluva.
a) Euklidovský vektorový prostor $(E, +, .)$ se skalárním součinem g budeme v dalším textu značit (E, g). Někdy budeme při zápisu skalárního součinu vynechávat znak g a místo $g(a, b)$ budeme psát pouze (a, b).
b) Snadno se ověří, že v aritmetickém vektorovém prostoru $V_n(\mathbf{R})$ je předpisem

$$g(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n,$$

kde $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, definován skalární součin. Tento součin budeme v dalším textu značit $\underline{a}\,\underline{b}$. Nebude-li v prostoru $V_n(\mathbf{R})$ zaveden jiný skalární součin, budeme pracovat vždy se skalárním součinem $\underline{a}\,\underline{b}$.

6, 1.3. Definice. Nechť (E, g) je euklidovský vektorový prostor, $a, b \in E$. *Délkou (velikostí, normou)* vektoru a nazýváme reálné číslo

$$||a|| = \sqrt{g(a, a)}.$$

Velikost φ *úhlu mezi vektory* a, b definujeme takto:

$$\begin{array}{ll} \cos\varphi = \frac{g(a,b)}{||a||\,||b||} & \text{pro } a \neq o,\ b \neq o, \varphi \in \langle 0, \pi \rangle\,, \\ \cos\varphi = 0 & \text{pro } a = o \text{ nebo } b = o. \end{array}$$

jestliže platí $\cos\varphi = 0$, nazýváme vektory a, b *kolmými (ortogonálními)* a píšeme $a \perp b$.

6, 1.4. Věta. V euklidovském vektorovém prostoru (E, g) platí ($a, b \in E$, $\alpha \in \mathbf{R}$):
a) $||\alpha a|| = |\alpha|\,||a||$,
b) $||a|| \geq 0$, $||a|| = 0 \Leftrightarrow a = o$,
c) $|g(a, b)| \leq ||a||\,||b||$ (*Schwartzova nerovnost*),
d) $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$ (*trojúhelníková nerovnost*).

6, 1.5. Definice. Nechť (E, g) je euklidovský vektorový prostor, M podmnožina E. *Ortogonálním doplňkem množiny* M nazýváme množinu

$$M^{\perp} = \{a \in E; \forall b \in M : a \perp b\}.$$

6, 1.6. Věta. Nechť (E, g) je euklidovský vektorový prostor, M, N podmnožiny a U, V podprostory vektorového prostoru E. Potom:
a) $M^{\perp}$ je podprostor vektorového prostoru E,
b) je-li $M \subset N$, je $N^{\perp} \subset M^{\perp}$,
c) $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$.

6, 1.7. Definice. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou vektory z euklidovského vektorového prostoru (E, g). Vektory $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nazýváme *ortogonálními*, jestliže $a_i \perp a_j$ pro všechna $i \neq j$. Vektory $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nazýváme *ortonormálními*, jestliže jsou navzájem ortogonální a $||a_i|| = 1$, $1 \leq i \leq k$.

6, 1.8. Věta.
a) Nenulové navzájem ortogonální vektory v euklidovském vektorovém prostoru jsou lineárně nezávislé.
b) Nechť a, b jsou vektory v euklidovském prostoru (E, g). Pak

$$a \perp b \Leftrightarrow ||a + b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2 \textit{ Pythagorova věta.}$$

6, 1.9. Definice. Nechť (E, g) je n-rozměrný euklidovský vektorový prostor, $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ jeho báze. Jsou-li vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n$ navzájem ortogonální, resp. ortonormální, nazýváme $\mathcal{B}$ *ortogonální*, resp. *ortonormální bází.*

6, 1.10. Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces. Je to postup, který umožňuje v lineárním obalu lineárně nezávislých vektorů $a_1, a_2, \dots, a_m$ ($m \geq 2$) v prostoru (E, g) najít navzájem ortogonální nenulové vektory $b_1, b_2, \dots, b_m$.

1. krok. Položíme $b_1 = a_1$ ($b_1 \neq o$, protože $a_1, a_2, \dots, a_m$ jsou lineárně nezávislé).

2. krok. Hledáme vektor b_2 ve tvaru $b_2 = a_2 + \alpha_{21} b_1$ (odtud víme, že $b_2 \neq o$) a koeficient $\alpha_{21} \in \mathbf{R}$ určíme z podmínky

$$0 = g(b_2, b_1) = g(a_2, b_1) + \alpha_{21} g(b_1, b_1).$$

Protože $(b_1, b_1) \neq 0$, dostaneme odtud

$$\alpha_{21} = -\frac{g(a_2, b_1)}{g(b_1, b_1)}.$$

k-tý krok. Máme již nenulové ortogonální vektory $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$, které patří do $[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}]$. Vektor b_k hledáme ve tvaru $b_k = a_k + \alpha_{k1} b_1 + \ldots + \alpha_{k,k-1} b_{k-1}$ (odtud $b_k \neq o$) a koeficienty $\alpha_{ki} \in \mathbf{R}$ určíme z podmínek

$$g(b_k, b_i) = 0,\ i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Vektory $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$ jsou ortogonální (tedy $g(b_i, b_j) = 0$ pro $i \neq j$) a nenulové vektory, proto dostáváme

$$0 = g(b_k, b_i) = g(a_k, b_i) + \alpha_{ki} g(b_i, b_i),$$

odtud

$$\alpha_{ki} = -\frac{g(a_k, b_i)}{g(b_i, b_i)},\ i = 1, 2, \dots, k-1.$$

6, 1.11. Věta. Nechť U je podprostor konečněrozměrného euklidovského vektorového prosoru. Pak v U existuje ortonormální báze.

6, 1.12. Věta. Nechť U je podprostor konečněrozměrného euklidovského vektorového prosoru (E, g). Pak pro libovolný vektor $a \in E$ existuje právě jeden vektor $b \in U$ a vektor $c \in U^\perp$ tak, že $a + b = c$.

6, 1.13. Definice. Vektor b z věty 6, 1.12 se nazývá *ortogonální průmět vektoru a do podprostoru U*.

6, 1.14. Věta. Nechť U, V jsou podprostory konečněrozměrného euklidovského vektorového prosoru (E, g). Pak platí:

a) $E = U \oplus U^\perp$ (direktní součet podprostorů, viz kap. 5),

b) $(U^\perp)^\perp = U$,

c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

6, 1.15. Věta. Nechť (E, g) je n-rozměrný euklidovský vektorovský prostor, $\mathcal{B}$ jeho báze. Nechť b, c jsou libovolné vektory z E, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)_{\mathcal{B}}$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)_{\mathcal{B}}$. Pak platí:

$$g(b, c) = b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_n c_n \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ je ortonormální.}$$

6.2 Řešené příklady

6, 2.1. Zjistěme, zda následující zobrazení g je skalární součin v příslušném vektorovém prostoru:
a) $g : V_4(\mathbf{R}) \times V_4(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $g(\underline{a},\underline{b}) = 2a_1b_1 + a_2b_2 + 3a_3b_3 + a_4b_4$, kde $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3,a_4)$, $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3,b_4)$;
b) $g : V_3(\mathbf{R}) \times V_3(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $g(\underline{a},\underline{b}) = 3a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_3b_3$, kde $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$;
c) $g : C\langle a,b\rangle \times C\langle a,b\rangle \to \mathbf{R}$, $g(f_1,f_2) = \int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)\ \mathrm{d}x$.

Řešení . Musíme ověřit podmínky kladené na zobrazení g v 6, 1.1.
a)

$$\begin{aligned}
g(\underline{a},\underline{b}) &= 2a_1b_1 + a_2b_2 + 3a_3b_3 + a_4b_4 = \\
&= 2b_1a_1 + b_2a_2 + 3b_3a_3 + b_4a_4 = g(\underline{b},\underline{a}),\\
g(\underline{a}+\underline{b},\underline{c}) &= 2(a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2 + 3(a_3+b_3)c_3 + (a_4+b_4)c_4 = \\
&= (2a_1c_1 + a_2c_2 + 3a_3c_3 + a_4c_4) + (2b_1c_1 + b_2c_2 + 3b_3c_3 + b_4c_4) = \\
&= g(\underline{a},\underline{c}) + g(\underline{b},\underline{c}),\\
g(\alpha\underline{a},\underline{c}) &= 2(\alpha a_1)c_1 + (\alpha a_2)c_2 + 3(\alpha a_3)c_3 + (\alpha a_4)c_4 = \\
&= \alpha(2a_1c_1 + a_2c_2 + 3a_3c_3 + a_4c_4) = \alpha g(\underline{a},\underline{c}),\\
g(\underline{a},\underline{a}) &= 4a_1^2 + a_2^2 + 9a_3^2 + a_4^2 \geq 0,\\
g(\underline{a},\underline{a}) &= 0 \Leftrightarrow \underline{a} = (0,0,0,0);
\end{aligned}$$

g je skalární součin.
b)

$$\begin{aligned}
g(\underline{a},\underline{b}) &= 3a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_3b_3,\\
g(\underline{b},\underline{a}) &= 3b_1a_1 + 2b_1a_2 + b_2a_1 + 3b_3a_3,
\end{aligned}$$

tedy $g(\underline{a},\underline{b}) \neq g(\underline{b},\underline{a})$; g není skalární součin.
c)

$$\begin{aligned}
g(f_1,f_2) &= \int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_a^b f_2(x)f_1(x)\ \mathrm{d}x = g(f_2,f_1),\\
g(f_1+f_2,f_3) &= \int\limits_a^b [f_1(x)+f_2(x)]f_3(x)\ \mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_a^b f_1(x)f_3(x)\ \mathrm{d}x + \int\limits_a^b f_2(x)f_3(x)\ \mathrm{d}x = g(f_1,f_3) + g(f_2,f_3),\\
g(\alpha f_1,f_2) &= \int\limits_a^b [\alpha f_1(x)]f_2(x)\ \mathrm{d}x = \alpha\int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)\ \mathrm{d}x = \alpha g(f_1,f_2),\\
g(f,f) &= \int\limits_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x \geq 0,\\
g(f,f) &= 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in \langle a,b\rangle\text{, tj. } f = 0;
\end{aligned}$$

g je skalární součin.

6, 2.2. V euklidovském vektorovém prostoru $V_2(\mathbf{R})$ nalezněme všechny vektory $\underline{x}$ kolmé k vektoru $\underline{a} = (2, 3)$.
Řešení . Označme $\underline{x} = (x_1, x_2)$. Potom má platit

$$\underline{x}\ \underline{a} = 2x_1 + 3x_2 = 0, \text{ tj. } x_2 = -\frac{2}{3}x_1.$$

Hledané vektory jsou tedy tvaru

$$\underline{x} = (x_1, -\frac{2}{3}x_1),\ x_1 \in \mathbf{R},\ \text{neboli } \underline{x} = k(3, -2),\ k \in \mathbf{R}.$$

6, 2.3. V euklidovském vektorovém prostoru $V_4(\mathbf{R})$ vypočítejme délku vektoru $\underline{a} = (5, -1, 0, \sqrt{23})$.
Řešení . Podle def. 6, 1.3 je

$$||\underline{a}|| = \sqrt{(\underline{a}\ \underline{a})} = \sqrt{(25 + 1 + 0 + 23)} = \sqrt{49} = 7.$$

6, 2.4. V euklidovském vektorovém prostoru $V_5(\mathbf{R})$ vypočítejme úhel vektorů $\underline{a} = (1, -1, 0, 2, 1)$, $\underline{b} = (1, 1, -4, 3, 1)$.
Řešení . Pro úhel φ vektorů $\underline{a}$, $\underline{b}$ platí podle def. 6, 1.3

$$\cos\varphi = \frac{\underline{a}\ \underline{b}}{||\underline{a}||\ ||\underline{b}||} = \frac{1 - 1 + 0 + 6 + 1}{\sqrt{(1 + 1 + 0 + 4 + 1)}\sqrt{(1 + 1 + 16 + 9 + 1)}} = \frac{1}{2}, \text{ tj. } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

6, 2.5. Ve $V_3(\mathbf{R})$ zvolme vektory $\underline{a} = (-1, 2, 1)$, $\underline{b} = (3, -2, 2)$. Určeme $g(\underline{.}, \underline{b})$, $||\underline{a}||$, $||\underline{b}||$ a rozhodněme, zda vektory $\underline{a}$, $\underline{b}$ jsou ortogonální, jestliže
a) $g(\underline{a}, \underline{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;
b) $g(\underline{a}, \underline{b}) = 10a_1b_1 + 3a_1b_2 + 3a_2b_1 + 2a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_3b_3$.
Řešení .
a) $g(\underline{a}, \underline{b}) = -3 - 4 + 2 = -5$,

$$||\underline{a}|| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6},\ ||\underline{b}|| = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}.$$

b) Musíme ověřit, že g je skutečně skalární součin. První tři podmínky 6, 1.1 jsou zřejmé, poslední plyne z tohoto výpočtu:

$$\begin{aligned} g(\underline{a}, \underline{a}) &= 10a_1^2 + 6a_1a_2 + 2a_2^2 + 2a_2a_3 + a_3^2 = \\ &= \left(\sqrt{10}a_1 + \tfrac{3}{\sqrt{10}}a_2\right)^2 + (a_2 + a_3)^2 + 2a_2^2 - \tfrac{9}{10}a_2^2 - a_2^2 = \\ &= \left(\sqrt{10}a_1 + \tfrac{3}{\sqrt{10}}a_2\right)^2 + (a_2 + a_3)^2 + \tfrac{1}{10}a_2^2. \end{aligned}$$

Je tedy g skalární součin. Platí

$$g(\underline{a}, \underline{b}) = -30 + 6 + 18 - 8 + 4 - 2 + 2 = -10,$$

$$||\underline{a}|| = \sqrt{10 - 12 + 8 + 4 + 1} = \sqrt{11},$$
$$||\underline{b}|| = \sqrt{90 - 36 + 8 - 8 + 4} = \sqrt{58}.$$

Vektory nejsou ortogonální ani v jednom případě.

6, 2.6. V euklidovském vektorovém prostoru $V_4(\mathbf{R})$ nalezněme ortonormální bázi podprostoru

$$U = [(1, -2, 2, 0), (1, -2, 2, 3), (-1, 1, 0, 0)].$$

Řešení . Použijeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces, viz 6, 1.10. Snadno se ukáže, že vektory $\underline{a}_1 = (1, -2, 2, 0)$, $\underline{a}_2 = (1, -2, 2, 3)$, $\underline{a}_3 = (-1, 1, 0, 0)$ jsou lineárně nezávislé. Tvoří tedy bázi podprostoru U. Jeho dimenze je 3. Hledáme nejprve ortogonální bázi $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$.
1. krok. Položíme $\underline{b}_1 = \underline{a}_1 = (1, -2, 2, 0)$.
2. krok. Hledáme vektor $\underline{b}_2 = \underline{a}_2 + \alpha_{21}\underline{b}_1$ s podmínkou $\underline{b}_2\underline{b}_1 = 0$:
$\underline{b}_2 = (1, -2, 2, 3) + \alpha_{21}(1, -2, 2, 0) = (1 + \alpha_{21}, -2 - 2\alpha_{21}, 2 + 2\alpha_{21}, 3)$,
$\underline{b}_2\underline{b}_1 = (1 + \alpha_{21}) \,.\, 1 + (-2 - 2\alpha_{21}) \,.\, (-2) + (2 + 2\alpha_{21}) \,.\, 2 + 3 \,.\, 0 = 9\alpha_{21} + 9 = 0$, tj. $\alpha_{21} = -1$.
Dostali jsme vektor $\underline{b}_2 = \underline{a}_2 - \underline{b}_1 = (0, 0, 0, 3)$.
3. krok. Hledáme vektor $\underline{b}_3 = \underline{a}_3 + \alpha_{31}\underline{b}_1 + \alpha_{32}\underline{b}_2$ s podmínkami $\underline{b}_3\underline{b}_1 = 0$, $\underline{b}_3\underline{b}_2 = 0$: Analogicky jako ve 2. kroku vypočítáme, že
$\underline{b}_3 = (-1 + \alpha_{31}, 1 - 2\alpha_{31}, 2\alpha_{31}, 3\alpha_{32})$,
$\underline{b}_3\underline{b}_1 = (-1 + \alpha_{31}) \,.\, 1 + (1 - 2\alpha_{31}) \,.\, (-2) + 2\alpha_{31} \,.\, 2 + 3\alpha_{32} \,.\, 0 = -3 + 9\alpha_{31} = 0$, tj. $\alpha_{31} = \frac{1}{3}$,
$\underline{b}_3\underline{b}_2 = (-1+\alpha_{31}) \,.\, 0+(1-2\alpha_{31}) \,.\, 0+2\alpha_{31} \,.\, 0+3\alpha_{32} \,.\, 3 = 9\alpha_{32} = 0$, tj. $\alpha_{32} = 0$.
Dostali jsme vektor $\underline{b}_3 = \underline{a}_3 + \frac{1}{3}\underline{b}_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$.
Jedna ortogonální báze $\mathcal{B}$ je tedy

$$\left\{(1, -2, 2, 0), (0, 0, 0, 3), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)\right\}.$$

Jak získáme z ortogonální báze $\mathcal{B}$ ortonormální bázi $\mathcal{D}$? Stačí každý vektor $\underline{b}_i$ násobit číslem $1/||\underline{b}_i||$ a výsledné vektory $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$ budou mít délku 1. Protože $||\underline{b}_1|| = 3$, $||\underline{b}_2|| = 3$, $||\underline{b}_3|| = 1$, je hledaná ortonormální báze

$$\mathcal{D} = \left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), (0, 0, 0, 1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)\right\}.$$

6, 2.7. V euklidovském vektorovém prostoru $V_4(\mathbf{R})$ máme dány vektory $\underline{a}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\underline{a}_2 = (-1, -3, 0, 2)$. Nechť $W = [\underline{a}_1, \underline{a}_2]$. Nalezněme ortogonální báze prostorů W a $W^{\perp}$.
Řešení . Nejprve hledáme ortogonální bázi $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ podprostoru W Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem. Dostaneme

$$\underline{c}_1 = \underline{a}_1 = (1, 0, 1, 0), \;\; \underline{c}_2 = \underline{a}_2 + \frac{1}{2}\underline{c}_1 = \left(-\frac{1}{2}, -3, \frac{1}{2}, 2\right).$$

Bázi $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ doplníme na ortogonální bázi prostoru $V_4(\mathbf{R})$. Můžeme postupovat např. tak, že vektory $\underline{c}_1, \underline{c}_2$ doplníme na bázi prostoru $V_4(\mathbf{R})$ a na tu opět provedeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces. Je však výhodné postupovat i jinak.

Najdeme libovolný nenulový vektor $\underline{c}_3$ takový, aby $\underline{c}_3 \perp \underline{c}_1$, $\underline{c}_3 \perp \underline{c}_2$. Označme $\underline{c}_3 = (c_{31}, c_{32}, c_{33}, c_{34})$. Pro čísla c_{3i} dostaneme z podmínek kolmosti soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrl} c_{31}+ & & c_{33} & & = 0, \\ -\frac{1}{2}c_{31}- & 3c_{32}+ & \frac{1}{2}c_{33}+ & 2c_{34} & = 0. \end{array}$$

To je homogenní soustava dvou rovnic pro čtyři neznámé, za $\underline{c}_3$ zvolíme libovolné její řešení, např. $\underline{c}_3 = (0, 2, 0, 3)$. Podobně z podmínek $\underline{c}_4 \perp \underline{c}_1$, $\underline{c}_4 \perp \underline{c}_2$, $\underline{c}_4 \perp \underline{c}_3$ dostaneme homogenní soustavu tří rovnic pro čtyři neznámé c_{4i}:

$$\begin{array}{rrrrl} c_{41}+ & & c_{43} & & = 0, \\ -\frac{1}{2}c_{41}- & 3c_{42}+ & \frac{1}{2}c_{43}+ & 2c_{44} & = 0, \\ & 2c_{42}+ & & 3c_{44} & = 0. \end{array}$$

Můžeme volit např. $\underline{c}_4 = (13, -3, -13, 2)$. Ortogonální bází prostoru $W^\perp$ je tedy např. $\{\underline{c}_3, \underline{c}_4\}$, tj.

$$\{(0, 2, 0, 3), (13, -3, -13, 2)\}.$$

6, 2.8. V euklidovském vektorovém prostoru $V_4(\mathbf{R})$ jsou dány podprostory $U = [(1, 3, 3, 5), (1, 3, -5, -3), (1, -5, 3, -3)]$, $W = [(1, -1, -1, 1)]$. Dokažme, že $W = U^\perp$ a nalezněme ortogonální průmět vektoru $\underline{b} = (2, -5, 3, 4)$ do U.
Řešení . Snadno nahlédneme, že generátory podprostoru U jsou lineárně nezávislé, tvoří proto bázi prostoru U. Dále platí

$$\begin{array}{rcccl} (1, -1, -1, 1)(1, 3, 3, 5) & = & 1 - 3 - 3 + 5 & = & 0, \\ (1, -1, -1, 1)(1, 3, -5, -3) & = & 1 - 3 + 5 - 3 & = & 0, \\ (1, -1, -1, 1)(1, -5, 3, -3) & = & 1 + 5 - 3 - 3 & = & 0, \end{array}$$

je tedy $W = U^\perp$ (důkaz faktu, že k tomu, aby všechny vektory z W byly kolmé ke všem vektorům z U, stačí, aby tato vlastnost byla splněna pro vektory bází obou podprostorů, ponecháváme jako snadné cvičení čtenáři).

Protože $V_4(\mathbf{R}) = U \oplus U^\perp$, tvoří množina $\mathcal{B} = \{(1, 3, 3, 5), (1, 3, -5, -3), (1, -5, 3, -3), (1, -1, -1, 1)\}$ bázi prostoru $V_4(\mathbf{R})$. Nalezneme souřadnice vektoru $\underline{b}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$. Označme hledané souřadnice $(b_1, b_2, b_3, b_4)_{\mathcal{B}}$. Čísla b_i musí zřejmě vyhovovat soustavě rovnic, jejíž rozšířená matice je

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & 1, & 1, & 1 & 2 \\ 3, & 3, & -5, & -1 & -5 \\ 3, & -5, & 3, & -1 & 3 \\ 5, & -3, & -3, & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme tuto soustavu např. na ekvivalentní soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 1, & 1, & 1 & 2 \\ 0, & 8, & 0, & 4 & 3 \\ 0, & 0, & 8, & 0 & 3 \\ 0, & 0, & 0, & 1 & 2 \end{array}\right),$$

odkud postupně vypočítáme $\underline{b}_{\mathcal{B}} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, 2\right)$. Tedy $\underline{b} = \underline{c} + \underline{d}$, kde $\underline{c} = \frac{1}{4}(1,3,3,5) - \frac{5}{8}(1,3,-5,-3) + \frac{3}{8}(1,-5,3,-3) \in U$, $\underline{d} = 2(1,-1,-1,1) \in W = U^{\perp}$. Ortogonální průmět vektoru $\underline{B}$ do podprostoru U je proto vektor $\underline{c} = (0,-3,5,2)$.

Kapitola 7

Permutace, determinanty a jejich užití

7.1 Základní pojmy

7, 1.1. Definice. Buď n přirozené číslo. *Pořadím prvků* $1, 2, \dots, n$ rozumíme každou uspořádanou n-tici $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ prvků $1, 2, \dots, n$, kde se každý z prvků $1, 2, \dots, n$ vyskytuje právě jednou.

7, 1.2. Definice. *Inverzí v pořadí* $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ rozumíme každou dvojici čísel i_r, i_s takovou, že $r < s$ a zároveň $i_r > i_s$ (tj. větší číslo se v pořadí vyskytuje před menším číslem).

7, 1.3. Definice. *Permutací* π množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ rozumíme každou bijekci množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Permutaci π zapisujeme pomocí matice typu $(2, n)$ tvaru

$$\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_n \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_n \end{pmatrix},$$

ve které první řádek nazýváme *pořadím vzorů*, druhý řádek *pořadím obrazů* a pro každé $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $\pi(i_x) = j_x$. Množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ značíme S_n. Inverzní zobrazení π^{-1} k permutaci π nazýváme *inverzní permutací* k permutaci π. Říkáme, že *permutace je v základním tvaru*, jestliže pořadí vzorů je $(1, 2, \dots, n)$.

Poznámka. Inverzní permutaci π^{-1} k permutaci π získáme snadno záměnou pořadí vzorů a pořadí obrazů, tj. výměnou řádků v odpovídající matici.

7, 1.4. Definice. *Znaménkem permutace* π rozumíme celé číslo $(-1)^{k+m}$, kde k je počet všech inverzí v pořadí vzorů a m počet všech inverzí v pořadí obrazů. Znaménko permutace π značíme $\operatorname{sign} \pi$.

Poznámka. Znaménka permutací π a π^{-1} jsou stejná.

7, 1.5. Definice. *Transpozicí prvků* $r < s$ menších než n rozumíme permutaci ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & r-1, & r, & r+1, & \dots, & s-1, & s, & s+1, & \dots, & n \\ 1, & 2, & \dots, & r-1, & s, & r+1, & \dots, & s-1, & r, & s+1, & \dots, & n \end{pmatrix},$$

ve které se každý prvek různý od r, s zobrazuje sám na sebe, r se zobrazí na s a s na r.

Poznámka. Znaménko každé transpozice je vždy rovno -1. Každou permutaci lze vždy zapsat jako složení konečného počtu transpozic.

7, 1.6. Věta. Pro libovolné dvě permutace π, η množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ platí $\operatorname{sign}(\pi \circ \eta) = \operatorname{sign}\pi \,.\, \operatorname{sign}\eta$.

7, 1.7. Definice. Buď $\underline{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice n-tého řádu nad tělesem T. Determinantem matice $\underline{A}$ rozumíme prvek $\det \underline{A}$ z tělesa T, pro který platí:

$$\det \underline{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_n \end{pmatrix} a_{1s_1}\, a_{2s_2} \dots a_{ns_n},$$

kde $\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_n \end{pmatrix}$. Jsou-li $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ řádkové (resp. sloupcové) vektory matice $\underline{A}$, píšeme místo $\det \underline{A}$ též $\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$.

Poznámka.
a) Determinant matice $\underline{A}$ je součet součinů; v každém součinu se vyskytuje z každého řádku i sloupce právě jeden prvek. Na druhé straně každý prvek řádku či sloupce se vyskytuje aspoň v jednom sčítanci.
b) Platí $\det \underline{A} = \det \underline{A}^T$.

7, 1.8. Věta. Determinant trojúhelníkovité čtvercové matice $\underline{A}$ je roven součinu prvků na diagonále.

7, 1.9. Věta. Vznikne-li matice $\underline{B}$ ze čtvercové matice $\underline{A}$ n-tého řádu výměnou dvou řádků, resp. sloupců, potom $\det \underline{B} = -\det \underline{A}$.

Poznámka. Determinant čtvercové matice $\underline{A}$, která má stejné aspoň dva řádky, resp. sloupce, je vždy roven nule.

7, 1.10. Definice. *Minorem (subdeterminantem)* M_{ij} z čtvercové matice $\underline{A}$ příslušným prvku a_{ij} rozumíme determinant matice, která vznikne z matice $\underline{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

7, 1.11. Definice. Je-li $\underline{A}$ čtvercová matice, a_{ij} libovolný její prvek, potom *algebraickým doplňkem* A_{ij} *prvku* a_{ij} rozumíme prvek

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

7, 1.12. Věta (o rozvoji determinantu podle i-tého řádku, resp. j-tého sloupce).

$$\det \underline{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

7, 1.13. Věta (o součtu determinantů).

$$\begin{aligned} &\det\,(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_i + \underline{b}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n) = \\ &\qquad = \det\,(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n) + \det\,(\underline{a}_1, \dots, \underline{b}_i, \dots, \underline{a}_n). \end{aligned}$$

7, 1.14. Věta (o vytýkání konstanty ze řádků).

$$\begin{aligned} &\det\,(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{i-1}, \alpha\underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n) = \\ &\qquad = \alpha \,.\, \det\,(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n). \end{aligned}$$

7, 1.15. Věta (o součinu dvou determinantů). Buďte $\underline{A}\,\underline{B}$ čtvercové matice téhož řádu n. Potom platí:

$$\det\,(\underline{A}\,\underline{B}) = \det \underline{A} \,.\, \det \underline{B}.$$

7, 1.16. Věta. Hodnota determinantu se nezmění, jestliže k danému řádku, resp. sloupci přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků, resp. sloupců.

7, 1.17. Důsledek. Determinant regulární matice je vždy různý od nuly, determinant singulární matice je vždy roven nule.

7, 1.18. Věta (Cramerovo pravidlo). Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots + & a_{1n}x_n = & c_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots + & a_{2n}x_n = & c_2, \\ \quad\dots, & & & & \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \dots + & a_{nn}x_n = & c_n, \end{array}$$

ve které je matice soustavy $\underline{A}$ regulární. Potom soustava má jediné řešení $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, pro která platí:

Označíme-li sloupcové vektory matice $\underline{A}$ po řadě $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a je-li $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, potom pro každou složku x_i řešení $\underline{x}$ je

$$x_i = \frac{\det\,(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{i-1}, \underline{c}, \underline{b}_{i+1}, \ldots, \underline{b}_n)}{\det\,(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n)}.$$

7, 1.19. Věta (o výpočtu inverzní matice pomocí determinantů). Nechť $\underline{A}$ je regulární matice n-tého řádu. Potom pro inverzní matici $\underline{A}^{-1} = (x_{ij})$ (n-tého řádu) platí (A_{ij} viz def. 7, 1.11):

$$x_{ij} = \frac{A_{ij}}{\det\,\underline{A}}.$$

7.2 Řešené příklady

7, 2.1. Určeme počet všech inverzí v pořadí:

$$(2, 7, 3, 8, 4, 6, 1, 5).$$

Řešení . Při hledání inverzí (viz def. 7, 1.2) musíme volit takový způsob řešení, abychom na žádnou inverzi nezapomněli. Budeme postupovat odleva: Číslo 2 je první, inverzi může tvořit pouze s číslem 1 a to je napravo (1 inverze). Číslo 7 je druhé největší, inverzi proto kromě čísla 8 tvoří s každým dalším, které je od něho napravo (5 inverzí). Číslo 3 tvoří inverzi pouze s číslem 1 (1 inverze). Číslo 8 je největší, proto tvoří inverzi se všemi čísly napravo (4 inverze). Za číslem 4 jsou čísla 6, 1, 5 a číslo 4 tvoří inverzi pouze s číslem 1 (1 inverze). Napravo od čísla 6 jsou čísla 1, 5 a obě s 6 tvoří inverze (2 inverze). Číslo 1 je nejmenší, žádnou inverzi nemůže tvořit (0 inverzí). Za číslem 5 už napravo žádné další číslo není, poslední číslo inverze tvořit nemůže. Celkový počet inverzí je proto

$$1 + 5 + 1 + 4 + 1 + 2 + 0 = 14.$$

7, 2.2. Buď k libovolné přirozené číslo. Určeme počet inverzí v pořadí

$$(2k, 2k-2, \ldots, 2, 2k+1, 2k-1, \ldots, 1).$$

Řešení . Pořadí obsahuje sestupnou řadu sudých čísel, za kterou následuje sestupná řada lichých čísel. Libovolné sudé číslo tvoří inverze se všemi menšími sudými čísly v první skupině a se všemi menšími čísly lichými - tedy každé menší číslo je určitě napravo od uvažovaného sudého čísla a tvoří s ním inverzi. Libovolné liché číslo utvoří inverze pouze s lichými menšími čísly, která leží napravo od něj. Proto celkový počet inverzí určíme ve dvou skupinách - zvlášť u sudých a zvlášť u lichých čísel.
a)

Číslo	Počet inverzí, které tvoří
$2k$	$2k-1$
$2k-2$	$2k-3$
$\dots$	$\dots$
4	3
2	1

Počet inverzí tvořených sudými čísly je dán součtem k sčítanců $1+3+\dots+(2k-1)=\frac{2k.k}{2}=k^2$.
b)

Číslo	Počet inverzí, které tvoří
$2k+1$	k
$2k-1$	$k-1$
$\dots$	$\dots$
5	2
3	1

Počet inverzí tvořených lichými čísly je dán součtem k sčítanců $1+2+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.
Počet inverzí v daném pořadí je tedy $k^2+\frac{k(k+1)}{2}$.

7, 2.3. Určeme znaménko permutace $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 6, & 7, & 5, & 1, & 4 \\ 3, & 4, & 5, & 1, & 7, & 6, & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení . Můžeme postupovat dvěma způsoby. Buď určíme počet inverzí v pořadí vzorů a v pořadí obrazů, nebo nejprve zapíšeme permutaci v základním tvaru. Ukážeme oba způsoby.
a)

Inverze v pořadí vzorů

Číslo	Počet inverzí
2	1
3	1
6	3
7	3
5	2
1	0
Celkem	10

Inverze v pořadí obrazů

Číslo	Počet inverzí
3	2
4	2
5	2
1	0
7	2
6	1
Celkem	9

Znaménko permutace je $(-1)^{10+9}=-1$.
b) Permutace zapišme v základním tvaru: $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 6, & 3, & 4, & 2, & 7, & 5, & 1 \end{pmatrix}$. Pořadí vzorů nemá žádnou inverzi, stačí proto určit počet inverzí v pořadí obrazů:

Číslo	Počet inverzí
6	5
3	2
4	2
2	1
7	2
5	1

Celkem je v pořadí obrazů 13 inverzí a znaménko permutace je $(-1)^{13} = -1$.

7, 2.4. Určeme, s jakým znaménkem se v determinantu 7. řádu vyskytuje člen $a_{13}a_{24}a_{35}a_{46}a_{57}a_{61}a_{72}$.
Řešení . Znaménko členu je dáno znaménkem permutace

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 1, & 2 \end{pmatrix},$$

která je v základním tvaru. Stačí proto určit počet inverzí v pořadí obrazů - těch je celkem 10. Proto znaménko této permutace i příslušného sčítance v determinantu je 1.

7, 2.5. Vypočítejme podle definice determinant matice $\underline{A}$ 4. řádu nad $\mathbf{R}$, jestliže

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 2, & 3 \\ 0, & 4, & 5, & 6 \\ 7, & 8, & 9, & 10 \end{pmatrix}.$$

Řešení . Determinant 4. řádu obsahuje celkem 4! sčítanců. Protože však matice má velký počet nul, budeme hledat pouze ty sčítance, které nebudou rovny nule. V prvním řádku je nenulové pouze číslo 1 v posledním sloupci. Proto další činitel sčítance v determinantu už nemůže být z posledního sloupce. Ze druhého řádku proto můžeme do součinu vzít pouze číslo 2, aby výsledek mohl být různý od nuly. Ve třetím řádku už nemůžeme použít prvky z posledních dvou sloupců - můžeme proto násobit buď nulou, nebo čtyřkou. Protože chceme získat nenulový sčítanec determinantu, musíme vybrat číslo 4 ze druhého sloupce. V posledním řádku pak zbývá pouze možnost násobit číslem 7. Z úvah vyplývá, že pouze jediný sčítanec v determinantu je různý od nuly. Je jím sčítanec

$$\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 4, & 3, & 2, & 1 \end{pmatrix} .\ 1\ .\ 2\ .\ 4\ .\ 7 \ = \ 56 \text{ (počet inverzí je 6).}$$

7, 2.6. Vypočítejme determinant matice $\underline{A}$, jestliže

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1, & 3, & 5 \\ 5, & 3, & 1 \\ 2, & 0, & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení . Determinant můžeme počítat buď z definice, nebo pomocí dovolených úprav.
a) Výpočet podle definice:

$$\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix} . 1 . 3 . 4 + \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 1, & 2 \end{pmatrix} . 5 . 5 . 0 +$$

$$+ \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix} . 3 . 1 . 2 + \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix} . 5 . 3 . 2 +$$

$$+ \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix} . 3 . 5 . 4 + \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix} . 1 . 1 . 0 =$$

$$= 12 + 0 + 6 - 30 - 60 - 0 = -72.$$

b) Výpočet pomocí dovolených úprav (volba dovolených úprav závisí značně na zkušenosti řešitele): Cílem je vytvořit ve sloupci či řádku větší počet nul a snížit řád determinantu pomocí věty o rozvoji determinantu (věta 7, 1.12).

$$\begin{vmatrix} 1, & 3, & 5 \\ 5, & 3, & 1 \\ 2, & 0, & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 3, & 5 \\ 4, & 0, & -4 \\ 2, & 0, & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} . 3 . \begin{vmatrix} 4, & -4 \\ 2, & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} . 0. \begin{vmatrix} 1, & 5 \\ 2, & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} . 0 . \begin{vmatrix} 1, & 5 \\ 4, & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) . 4 . 2 . \begin{vmatrix} 1, & -1 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = -24 . [2 - (-1)] = -72.$$

Při výpočtu byly provedeny tyto úpravy: přičtení lineární kombinace ostatních řádků k druhému (determinant se nezmění), rozvoj deteminantu podle druhého sloupce, vytknutí čísla 4 z prvního a čísla 2 z druhého řádku.

7, 2.7. Vypočítejme determinant 4. řádu $\begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 1, & 4, & 1, & 4 \\ 1, & 8, & -1, & -8 \\ 1, & 16, & 1, & 16 \end{vmatrix}$.

Řešení . Determinant vypočítáme tak, že pomocí úprav a rozvoje převedeme úlohu na výpočet determinantu nižšího řádu. Upozorňujeme však, že výběr úprav může být i jiný, neboť záleží na cíli úprav a zkušenosti řešitele. Zvolíme takové úpravy, abychom v prvním sloupci získali co největší počet nul. Toho můžeme dosáhnout např. tak, že první řádek odečteme od všech ostatních. Zde však budeme postupovat tak, že od daného řádku odečteme vždy řádek předchozí:

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 1, & 4, & 1, & 4 \\ 1, & 8, & -1, & -8 \\ 1, & 16, & 1, & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 1, & 4, & 1, & 4 \\ 1, & 8, & -1, & -8 \\ 0, & 8, & 2, & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 1, & 4, & 1, & 4 \\ 0, & 4, & -2, & -12 \\ 0, & 8, & 2, & 24 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 0, & 2, & 2, & 6 \\ 0, & 4, & -2, & -12 \\ 0, & 8, & 2, & 24 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \; . \; 1 \; . \; \begin{vmatrix} 2, & 2, & 6 \\ 4, & -2, & -12 \\ 8, & 2, & 24 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} 2, & 2, & 6 \\ 4, & -2, & -12 \\ 8, & 2, & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6, & 0, & -6 \\ 4, & -2, & -12 \\ 12, & 0, & 12 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(-2) \; . \; \begin{vmatrix} 6, & -6 \\ 12, & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \; . \; 6 \; . \; 12 \; . \; \begin{vmatrix} 1, & -1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = (-144) \; . \; (1+1) = -288.$$

Můžeme postupovat i po sloupcích (přičteme druhý ke čtvrtému, první odečteme od třetího) a dále dle úvahy tak, aby se výpočet co nejvíce zjednodušil:

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 1, & 4, & 1, & 4 \\ 1, & 8, & -1, & -8 \\ 1, & 16, & 1, & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 0, & 0 \\ 1, & 4, & 2, & 8 \\ 1, & 8, & 0, & 0 \\ 1, & 16, & 2, & 32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 0, & 0 \\ 1, & 4, & 2, & 8 \\ 1, & 8, & 0, & 0 \\ 0, & 12, & 0, & 24 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+3} \; . \; 2 \; . \; \begin{vmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 1, & 8, & 0 \\ 0, & 12, & 24 \end{vmatrix} = (-2) \; . \; (-1)^{3+3} \; . \; 24 \; . \; \begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-48) \; . \; (8-2) = -288.$$

7, 2.8. Vypočítejme determinant n-tého řádu

$$\begin{vmatrix} a, & b, & b, & \dots, & b \\ b, & a, & b, & \dots, & b \\ b, & b, & a, & \dots, & b \\ \hdotsfor{5} \\ b, & b, & b, & \dots, & a \end{vmatrix}$$

($n \geq 2$ je přirozené číslo, a, b jsou reálná čísla).
Řešení . Je-li $a = b$, má determinant alespoň dva řádky stejné, a proto je roven nule. Předpokládejme tedy, že $a \neq b$. Podle věty o rozvoji determinantu 7, 1.12 je náš determinant roven determinantu $(n+1)$-ho řádu (přidaný řádek umožní odečíst většinu čísel b)

$$\begin{vmatrix} 1, & b, & b, & \dots, & b \\ 0, & a, & b, & \dots, & b \\ 0, & b, & a, & \dots, & b \\ \hdotsfor{5} \\ 0, & b, & b, & \dots, & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & b, & b, & \dots, & b \\ -1, & a-b, & 0, & \dots, & 0 \\ -1, & 0, & a-b, & \dots, & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ -1, & 0, & 0, & \dots, & a-b \end{vmatrix}$$

Nyní můžeme k prvnímu sloupci přičíst lineární kombinaci ostatních sloupců s koeficienty $\frac{1}{a-b}$ (tím bude v determinantu v prvním sloupci nenulový pouze jediný prvek a pod diagonálou samé nuly):

$$\begin{vmatrix} 1+n\frac{b}{a-b}, & b, & b, & \dots, & b \\ 0, & a-b, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & a-b, & \dots, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & a-b \end{vmatrix} = \left(1+n\frac{b}{a-b}\right)(a-b)^n.$$

(Výpočet lze provést i bez rozšíření původního determinantu.)

7, 2.9. Vypočítejme determinant n-tého řádu $\begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1, & n \\ 1, & 1, & \dots, & n, & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1, & n, & \dots, & 1, & 1 \\ n, & 1, & \dots, & 1, & 1 \end{vmatrix}$.

Řešení . Postupujeme např. tak, že k prvnímu řádku přičteme lineární kombinaci ostatních s koeficientem 1 u každého řádku:

$$\begin{vmatrix} 2n-1, & 2n-1, & \dots, & 2n-1, & 2n-1 \\ 1, & 1, & \dots, & n, & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1, & n, & \dots, & 1, & 1 \\ n, & 1, & \dots, & 1, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2n-1)\begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & \dots, & n, & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1, & n, & \dots, & 1, & 1 \\ n, & 1, & \dots, & 1, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & \dots, & n-1, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0, & n-1, & \dots, & 0, & 0 \\ n-1, & 0, & \dots, & 0, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n-1, & n \\ n, & n-1, & \dots, & 2, & 1 \end{pmatrix} . (n-1)^{n-1}(2n-1) =$$

$$= (2n-1)(n-1)^{n-1}(-1)^{n(n-1)/2}$$

Totéž lze získat přímo odečtením prvního řádku od ostatních a přičtením prvních $n-1$ sloupců k poslednímu:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1, & n \\ 0, & 0, & \dots, & n-1, & 1-n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0, & n-1, & \dots, & 0, & 1-n \\ n-1, & 0, & \dots, & 0, & 1-n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1, & 2n+1 \\ 0, & 0, & \dots, & n-1, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0, & n-1, & \dots, & 0, & 0 \\ n-1, & 0, & \dots, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

7, 2.10. Vypočítejme determinant $(2n)$-tého řádu

$$\begin{vmatrix}
1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 4n \\
0, & 3, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 4n-2, & 0 \\
0, & 0, & 5, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 4n-4, & 0, & 0 \\
\hdotsfor{10} \\
0, & 0, & 0, & \ldots, & 2n-1, & 2n+2, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & \ldots, & 2n, & 2n+1, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\
\hdotsfor{10} \\
0, & 0, & 6, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 4n-5, & 0, & 0 \\
0, & 4, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 4n-3, & 0 \\
2, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 4n-1
\end{vmatrix}.$$

Řešení . Determinant má určitou „symetrii“. Při bližším pozorování zjistíme, že se jen nepatrně liší první řádek od posledního, druhý od předposledního atd. Pokusme se proto vždy odečíst i-tý řádek shora od i-tého řádku zdola (prvních n řádků se nezmění):

$$\begin{vmatrix}
1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 4n \\
0, & 3, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 4n-2, & 0 \\
0, & 0, & 5, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 4n-4, & 0, & 0 \\
\hdotsfor{10} \\
0, & 0, & 0, & \ldots, & 2n-1, & 2n+2, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & -1, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\
\hdotsfor{10} \\
0, & 0, & 1, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & -1, & 0, & 0 \\
0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & -1, & 0 \\
1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & -1
\end{vmatrix}.$$

Po této úpravě se nabízí využití obdobné úpravy pro sloupce. Přičtení j-tého sloupce zprava k j-tému sloupci zleva povede k tomu, že pod diagonálo budou už samé nuly:

$$\begin{vmatrix}
4n+1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 4n \\
0, & 4n+1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 4n-2, & 0 \\
0, & 0, & 4n+1, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 4n-4, & 0, & 0 \\
\hdotsfor{10} \\
0, & 0, & 0, & \ldots, & 4n+1, & 2n+2, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & -1, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\
\hdotsfor{10} \\
0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & -1, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & -1, & 0 \\
0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & -1
\end{vmatrix}.$$

Protože pod diagonálou jsou nuly, je determinant roven součinu prvků na diagonále: $(4n+1)^n(-1)^n$.

7, 2.11. *(Rekurentní metoda výpočtu determinantů.)* Vypočítejme determinant D_n n-tého řádu pro libovolné $n \in \mathbf{N}$, jestliže

$$D_n = \begin{vmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & 3, & 1 \\ 0, & 0, & \dots, & 3, & 1, & 4 \\ 0, & 0, & \dots, & 1, & 4, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3, & 1, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 4, & \dots, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

<u>Řešení .</u> V prvním řádku jsou pouze dva nenulové prvky. Je proto výhodné použít větu o rozvoji determinantu podle 1. řádku (věta 7, 1.12 pro $i = 1$):

$$D_n = 3 \;.\; (-1)^{1+n-1} \begin{vmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 3, & 4 \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 3, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, & 3, & 1, & 4, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3, & 1, & \dots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 4, & \dots, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+1 \;.\; (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & 3, & 1 \\ 0, & 0, & \dots, & 3, & 1, & 4 \\ 0, & 0, & \dots, & 1, & 4, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3, & 1, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 4, & \dots, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Oba determinanty jsou $(n-1)$-řádu. Druhý z nich je stejného typu jako původní determinant - můžeme ho proto označit D_{n-1}. První determinant lze rozvinout podle posledního sloupce. Dostaneme:

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 3, & 4 \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 3, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, & 3, & 1, & 4, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3, & 1, & \dots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 4, & \dots, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 4 \;.\; (-1)^{1+n-1} \begin{vmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & 3, & 1 \\ 0, & 0, & \dots, & 3, & 1, & 4 \\ 0, & 0, & \dots, & 1, & 4, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3, & 1, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 4, & \dots, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \;.\; (-1)^n D_{n-2}.$$

Dosadíme-li do rovnice pro D_n, dostáváme *rekurentní formuli*

$$D_n = 3 \;.\; (-1)^n \;.\; 4 \;.\; (-1)^n D_{n-2} + (-1)^{n+1} D_{n-1} = 12 D_{n-2} + (-1)^{n+1} D_{n-1}.$$

Jestliže si uvědomíme, že $D_1 = 1$, $D_2 = 11$, potom $D_3 = 12 D_1 + (-1)^2 D_2 = 23$ (a lze počítat dále D_4, D_5 atd.).

7, 2.12. Pomocí Cramerova pravidla nalezněme řešení soustavy

$$\begin{aligned} x &+ 3y + 5z = -1, \\ 2x &- 3y + 4z = -5, \\ 5x &+ 3y + z = 7. \end{aligned}$$

Řešení . Aby bylo možné řešit soustavu pomocí Cramerova pravidla, musí být determinant D soustavy různý od nuly.

$$D = \begin{vmatrix} 1, & 3, & 5 \\ 2, & -3, & 4 \\ 5, & 3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 3, & 5 \\ 3, & 0, & 9 \\ 4, & 0, & -4 \end{vmatrix} = 3 \ . \ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3, & 9 \\ 4, & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \ . \ 3 \ . \ 4 \ . \begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 1, & -1 \end{vmatrix} = (-36) \ . \ (-1-3) = 144$$

Můžeme tedy použít Cramerovo pravidlo a soustava bude mít jediné řešení (x, y, z). Pro neznámou x musíme nejprve vypočítat determinant D_x, ve kterém je první sloupec matice soustavy nahrazen sloupcem pravých stran:

$$D_x = \begin{vmatrix} -1, & 3, & 5 \\ -5, & -3, & 4 \\ 7, & 3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1, & 3, & 5 \\ -6, & 0, & 9 \\ 2, & 0, & 5 \end{vmatrix} = 3 \ . \ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -6, & 9 \\ 2, & 5 \end{vmatrix} = 144.$$

Tedy $x = D_x/D = 1$. Obdobně pro výpočet neznámé y nejprve musíme vypočítat determinant D_y, ve kterém je druhý sloupec matice soustavy nahrazen sloupcem prvých stran:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1, & -1, & 5 \\ 2, & -5, & 4 \\ 5, & 7, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 2, & -3, & -6 \\ 5, & 12, & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3, & -6 \\ 12, & -24 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \ . \ 12 \ . \begin{vmatrix} -1, & -2 \\ 1, & -2 \end{vmatrix} = 144.$$

Proto je $y = D_y/D = 1$. Konečně je třeba vypočítat determinant D_z, který vznikne z matice soustvy nahrazením třetího sloupce sloupcem pravých stran:

$$D_z = \begin{vmatrix} 1, & 3, & -1 \\ 2, & -3, & -5 \\ 5, & 3, & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 3, & -1 \\ 3, & 0, & -6 \\ 7, & 0, & 2 \end{vmatrix} = 3 \ . \ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3, & -6 \\ 7, & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-9) \ . \begin{vmatrix} 1, & -2 \\ 7, & 2 \end{vmatrix} = -144.$$

tedy $z = D_z/D = -1$. Soustava má jediné řešení, a to vektor $(1, 1, -1)$.

7, 2.13. Vypočítejme hodnotu neznámé x_1 ze soustavy

$$\begin{array}{lcccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 2, \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 3, \\ \dots, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & nx_n & = & n. \end{array}$$

Řešení . Determinant soustavy je různý od nuly, neboť

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ 1, & 2, & 1, & \dots, & 1 \\ 1, & 1, & 3, & \dots, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & 1, & 1, & \dots, & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & n-1 \end{vmatrix} = (n-1)!.$$

Můžeme tedy použít Cramerovo pravidlo. Determinant D_{x_1} vypočítáme z matice, která vznikne nahrazením prvního sloupce v matici soustavy sloupcem pravých stran:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ 2, & 2, & 1, & \dots, & 1 \\ 3, & 1, & 3, & \dots, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n, & 1, & 1, & \dots, & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 2, & 0, & 2, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1, & 0, & 0, & \dots, & n-1 \end{vmatrix}.$$

Nyní odečteme od prvního sloupce lineární kombinaci $\underline{a}_2 + \underline{a}_3 + \ldots + \underline{a}_n$ ($\underline{a}_i$ označuje i-tý sloupec posledního determinantu); pod diagonálou dostaneme už samé nuly:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1-(n-1), & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & n-1 \end{vmatrix} = (2-n)(n-1)!$$

Proto

$$x_1 = \frac{(2-n)(n-1)!}{(n-1)!} = 2-n.$$

Soustava má jediné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jehož první složka $x_1 = 2-n$.

7, 2.14. Ukažme, že matice $\underline{A}$ je regulární a pomocí determinantů vypočítejme inverzní matici $\underline{A}^{-1}$ k matici $\underline{A}$, jestliže

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1, & 3, & 5 \\ 2, & 3, & 6 \\ 5, & 3, & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení .

$$\begin{vmatrix} 1, & 3, & 5 \\ 2, & 3, & 6 \\ 5, & 3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 3, & 5 \\ 1, & 0, & 1 \\ 4, & 0, & -4 \end{vmatrix} = 3\ .\ (-1)^{1+2}\ .\ 4\ .\ \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{vmatrix} = 24.$$

Pro prvky a_{ij} matice $\underline{A}^{-1}$ platí $a_{ij} = \frac{(-1)^{ij} M_{ji}}{\det \underline{A}}$ (viz 7, 1.19). Musíme tedy určit celkem devět determinantů 2. řádu:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3, & 6 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} = 3 - 18 = -15 \quad \Rightarrow \quad a_{11} = (-1)^{1+1}\left(-\frac{15}{24}\right) = -\frac{5}{8};$$
$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3, & 5 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} = 3 - 15 = -12 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = (-1)^{1+2}\left(-\frac{12}{24}\right) = \frac{1}{2};$$
$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3, & 5 \\ 3, & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3, & 5 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad \Rightarrow \quad a_{13} = (-1)^{1+3}\frac{3}{24} = \frac{1}{8};$$
$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2, & 6 \\ 5, & 1 \end{vmatrix} = 2 - 30 = -28 \quad \Rightarrow \quad a_{21} = (-1)^{2+1}\left(-\frac{28}{24}\right) = \frac{7}{6};$$
$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1, & 5 \\ 5, & 1 \end{vmatrix} = 1 - 25 = -24 \quad \Rightarrow \quad a_{22} = (-1)^{2+2}\left(-\frac{24}{24}\right) = -1;$$
$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1, & 5 \\ 2, & 6 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4 \quad \Rightarrow \quad a_{23} = (-1)^{2+3}\left(-\frac{4}{24}\right) = \frac{1}{6};$$
$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 5, & 3 \end{vmatrix} = 6 - 15 = -9 \quad \Rightarrow \quad a_{31} = (-1)^{3+1}\left(-\frac{9}{24}\right) = -\frac{3}{8};$$
$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 5, & 3 \end{vmatrix} = 3 - 15 = -12 \quad \Rightarrow \quad a_{32} = (-1)^{3+2}\left(-\frac{12}{24}\right) = \frac{1}{2};$$
$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 2, & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3 \quad \Rightarrow \quad a_{33} = (-1)^{3+3}\left(-\frac{3}{24}\right) = -\frac{1}{8};$$

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5/8, & 1/2, & 1/8 \\ 7/6, & -1, & 1/6 \\ -3/8, & 1/2, & -1/8 \end{pmatrix}.$$

Kapitola 8

Lineární zobrazení, izomorfismus vektorových prostorů

8.1 Základní pojmy

8, 1.1. Definice. Nechť $V(T), V'(T)$ jsou vektorové prostory (nad stejným tělesem T). Zobrazení $\varphi : V \to V'$ se nazývá *lineární zobrazení*, jestliže pro libovolné $a, b \in V$, $\alpha \in T$ platí:
a) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ (zobrazení je *aditivní*)
b) $\varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$ (zobrazení je *homogenní*).

8, 1.2. Poznámka. Z def. 8, 1.1 plyne, že obraz lineární kombinace vektorů z V je roven lineární kombinaci jejich obrazů se stejnými koeficienty (odtud název lineární zobrazení).

8, 1.3. Věta. Nechť $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ je báze prostoru $V(T), b_1, b_2, \dots, b_n$ libovolné vektory z $V'(T)$. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ takové, že

$$\varphi(a_1) = b_1, \varphi(a_2) = b_2, \dots, \varphi(a_n) = b_n.$$

8, 1.4. Definice. Nechť $V(T)$ je m-rozměrný vektorový prostor, $V'(T)$ n-rozměrný vektorový prostor, nechť $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ je báze vektoru V, $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ báze vektoru V', $\varphi : V \to V'$ lineární zobrazení. Matici $\underline{A}_{\varphi\mathcal{A}\mathcal{B}}$ typu (m, n), která má v i-tém řádku ($i = 1, 2, \dots, m$) vektor souřadnic obrazu $\varphi(a_i)$ (i-tého vektoru z báze $\mathcal{A}$) v bázi $\mathcal{B}$, nazýváme *maticí zobrazení φ vzhledem k bázím $\mathcal{A}, \mathcal{B}$*.

8, 1.5. Věta. Nechť $V(T)$, $V'(T)$, $V''(T)$ jsou vektorové prostory, $\varphi : V \to V'$, $\psi : V' \to V''$ lineární zobrazení. Pak složené zobrazení $\eta = \varphi \circ \psi : V \to V''$ je lineární zobrazení. Je-li dim $V = m$, dim $V' = n$, dim $V'' = p, \mathcal{A}$ báze prostoru V, $\mathcal{B}$ báze prostoru V', $\mathcal{C}$ báze prostoru V'', je matice $\underline{A}_{\eta,\mathcal{A},\mathcal{C}}$ typu (m,p) a platí

$$\underline{A}_{\eta,\mathcal{A},\mathcal{C}} = \underline{A}_{\varphi,\mathcal{A},\mathcal{B}}\, \underline{A}_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

8, 1.6. Věta. Nechť $\varphi : V(T) \to V'(T)$ je lineární zobrazení. Nechť existuje inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : V| \to V'$. Pak je zobrazení φ_{-1} lineární. Je-li dim $V =$ dim $V' = m$, $\mathcal{A}$ báze prostoru V, $\mathcal{B}$ báze prostoru V', platí pro matici $\underline{A}_{\varphi^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}}$ m-tého řádu

$$\underline{A}_{\varphi^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} = (\underline{A}_{\varphi,\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1}.$$

8, 1.7. Věta. Nechť $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ je báze vektorového prostoru $V(T)$, $\varphi : V(T) \to V'(T)$ lineární zobrazení. Pak platí:
a) Zobrazení φ je injekce, právě když $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_m)$ jsou lineárně nezávislé vektory (ve $V'(T)$).
b) Zobrazení φ je surjekce, právě když $[\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_m)] = V'$.
c) Zobrazení φ je bijekce, právě když $\{\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_m)\}$ je báze prostoru V'.

8, 1.8. Definice. Nechť $\varphi : V(T) \to V'(T)$ je lineární zobrazení. Množina Ker $\varphi = \{a \in V;\, \varphi(a) = o\}$ se nazývá *jádro zobrazení* φ, množina Im $\varphi = \{b \in V';\, \exists\, a \in V : \varphi(a) = b\}$ se nazývá *obraz zobrazení* φ.

8, 1.9. Věta. Ker φ je podprostor prostoru $V(T)$, Im φ je podprostor prostoru $V'(T)$.

8, 1.10. Věta. Nechť $\varphi : V(T) \to V'(T)$ je lineární zobrazení a V je konečněrozměrný prostor. Pak platí:

$$\dim\,(\mathrm{Ker}\ \varphi) + \dim\,(\mathrm{Im}\ \varphi) = \dim V.$$

8, 1.11. Důsledek. Nechť $\varphi : V(T) \to V'(T)$ je lineární zobrazení a V konečněrozměrný prostor. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:
a) φ je prosté,
b) Ker $\varphi = \{o\}$,
c) dim (Im φ) = dim V.

8, 1.12. Definice. Prosté lineární zobrazení φ vektorového prostoru $V(T)$ na vektorový prostor $V'(T)$ se nazývá *izomorfismus*. Vektorové prostory V, V', pro které existuje izomorfismus $\varphi : V \to V'$, se nazývají *izomorfní*.

8, 1.13. Věta. Nechť $V(T)$, $V'(T)$ jsou konečněrozměrné vektorové prostory, dim $V =$ dim V'. Pak jsou prostory V, V' izomorfní.

8.2 Řešené příklady

8, 2.1. Zjistěme, zda zobrazení φ je lineární, jestliže
a) $\varphi : V_2(\mathbf{R}) \to V_1(\mathbf{R}),\ \varphi(\underline{a}) = a_1,\ \underline{a} = (a_1, a_2)$;
b) $\varphi : V_3(\mathbf{R}) \to V_3(\mathbf{R}),\ \varphi(\underline{a}) = (2a_1, 0, a_1 + 3),\ \underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$.
Řešení . Ověříme, zda zobrazení φ má obě vlastnosti z 8, 1.1.
a) Nechť $\underline{a} = (a_1, a_2)$, $\underline{b} = (b_1, b_2)$, $\alpha \in \mathbf{R}$; platí [v dalším textu píšeme $\varphi(a_1, a_2)$ místo $\varphi((a_1, a_2))$]:

$$\begin{aligned}
\varphi(\underline{a} + \underline{b}) &= \varphi(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = a_1 + b_1 = \\
&= \varphi(a_1, a_2) + \varphi(b_1, b_2) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b}), \\
\varphi(\alpha \underline{a}) &= \varphi(\alpha a_1, \alpha a_2) = \alpha a_1 = \alpha \varphi(a_1, a_2) = \alpha \varphi(\underline{a}).
\end{aligned}$$

Zobrazení φ je lineární.
b) Nechť $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\alpha \in \mathbf{R}$; platí:

$$\begin{aligned}
\varphi(\underline{a} + \underline{b}) &= \varphi(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = (2(a_1 + b_1), 0, a_1 + b_1 + 3)\,, \\
\varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b}) &= (2a_1, 0, a_1 + 3) + (2b_1, 0, b_1 + 3) = (2(a_1 + b_1), 0, a_1 + b_1 + 6)\,,
\end{aligned}$$

tj. $\varphi(\underline{a} + \underline{b}) \neq \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b})$. Zobrazení φ není lineární.

8, 2.2. Ukažme, že zobrazení φ vektorového prostoru $V(\mathbf{R})$ všech orientovaných úseček v rovině s počátečním bodem v daném bodě P do $V(\mathbf{R})$, které zobrazuje orientovanou úsečku na její zrcadlový obraz podle dané přímky procházející bodem P, je lineární.
Řešení . Splnění podmínek z def. 8, 1.1 plyne ze shodnosti trojúhelníků (nakreslete si příslušný obrázek).

8, 2.3. Zjistěme, zda existuje lineární zobrazení $\varphi : V_3(\mathbf{R}) \to P_4(\mathbf{R})$ [$P_4(\mathbf{R})$ je vektorový prostor reálných polynomických funkcí stupně nejvýše 4 nad $\mathbf{R}$] takové, že

$$\varphi(1, 2, 3) = x + x^3,\ \varphi(1, 2, 0) = 1 + x^2 + x^4,\ \varphi(1, 0, 0) = x^3.$$

V kladném případě určeme $\varphi(-3, 4, 6)$.
Řešení . Vektory $(1, 2, 3), (1, 2, 0), (1, 0, 0)$ jsou lineárně nezávislé, tvoří tedy bázi $V_3(\mathbf{R})$. Proto podle věty 8, 1.3 zobrazení φ existuje. K určení $\varphi(-3, 4, 6)$ potřebujeme vyjádřit vektor $(-3, 4, 6)$ jako lineární kombinaci vektorů $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 0)$. Hledáme tedy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$ tak, aby

$$(-3, 4, 6) = \alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(1, 2, 0) + \alpha_3(1, 0, 0).$$

Řešením příslušné soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & -3, \\
2\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & & & = & 4, \\
3\alpha_1 & & & & & = & 6
\end{array}$$

dostáváme $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -5$. Protože φ je lineární, je

$$\varphi(-3,4,6) = 2\varphi(1,2,3) - 5\varphi(1,0,0) = 2(x + x^3) - 5x^3 = 2x - 3x^3.$$

8, 2.4. Zobrazení $\varphi : V_3(\mathbf{R}) \to V_2(\mathbf{R})$ je dáno předpisem

$$\varphi(\underline{a}) = (a_1 + a_2, a_3),\ \ \underline{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Zjistěme, zda je toto zobrazení lineární. V kladném případě určeme matici zobrazení φ vzhledem ke standardním bázím

$$\mathcal{A} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},\ \ \mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}.$$

Řešení . Analogicky jako v příkl. 8, 2.1 se ukáže, že φ je lineární zobrazení (důkaz ponecháváme čtenáři jako cvičení). Hledáme matici $\underline{A}_{\varphi\mathcal{A}\mathcal{B}}$. V i-tém řádku této matice bude podle def. 8, 1.4 vektor souřadnic obrazu i-tého vektoru báze $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$:

$$\varphi(1,0,0) = (1,0)_{\mathcal{B}},\ \ \varphi(0,1,0) = (1,0)_{\mathcal{B}},\ \ \varphi(0,0,1) = (0,1)_{\mathcal{B}}.$$

Proto

$$\underline{A}_{\varphi\mathcal{A}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

8, 2.5. Nechť ve vektorovém prostoru $V(\mathbf{T})$ je dána báze $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$, ve vektorovém prostoru $V'(\mathbf{T})$ báze $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Nechť $u_i \in V$, resp. $v_i \in V'$, $i = 1,2,3$ mají tyto souřadnice vzhledem k bázi $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{B}$: $\underline{u}_1 = (1,2,-2)_{\mathcal{A}}$, $\underline{u}_2 = (0,2,1)_{\mathcal{A}}$, $\underline{u}_3 = (1,0,0)_{\mathcal{A}}$, $\underline{v}_1 = (1,-1,1)_{\mathcal{B}}$, $\underline{v}_2 = (-1,1,-3)_{\mathcal{B}}$, $\underline{v}_3 = (-1,1,1)_{\mathcal{B}}$. Nalezněme matici lineárního zobrazení $\varphi : V \to V'$ vzhledem k bázím $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, jestliže

$$\varphi(u_i) = v_i,\ \ i = 1,2,3.$$

Řešení . Snadno se ověří, že vektory u_1, u_2, u_3 jsou lineárně nezávislé, proto je $\{u_1, u_2, u_3\}$ báze prostoru V a zobrazení φ existuje. K sestavení matice $\underline{A}_{\varphi\mathcal{A}\mathcal{B}}$ potřebujeme znát souřadnice vektorů $\varphi(a_i)$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$. Platí

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + 2a_2 - 2a_3, \qquad & v_1 &= b_1 - b_2 + b_3, \\ u_2 &= 2a_2 + a_3, & v_2 &= -b_1 + b_2 - 3b_3, \\ u_3 &= a_1, & v_3 &= -b_1 + b_2 + b_3. \end{aligned}$$

Protože φ je lineární zobrazení a $\varphi(u_i) = v_i$, $i = 1,2,3$, dostáváme soustavu rovnic pro neznámé $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\varphi(a_3)$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} \varphi(a_1) & + & 2\varphi(a_2) & - & 2\varphi(a_3) & = & b_1 & - & b_2 & + & b_3, \\ & & 2\varphi(a_2) & + & \varphi(a_3) & = & -b_1 & + & b_2 & - & 3b_3, \\ \varphi(a_1) & & & & & = & -b_1 & + & b_2 & + & b_3. \end{array}$$

Tato soustava má řešení

$$\begin{array}{rcrrrrrrrcl}
\varphi(a_1) & = & - & b_1 & + & b_2 & + & b_3 & = & (-1,1,1)_{\mathcal{B}}, \\
\varphi(a_2) & = & & & & & - & b_3 & = & (0,0,-1)_{\mathcal{B}}, \\
\varphi(a_3) & = & - & b_1 & + & b_2 & - & b_3 & = & (-1,1,-1)_{\mathcal{B}}.
\end{array}$$

Hledaná matice tedy je

$$\underline{A}_{\varphi\mathcal{A}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & -1 \\ -1, & 1, & -1 \end{pmatrix}.$$

8, 2.6. Zobrazení $\varphi : V_3(\mathbf{R}) \to V_4(\mathbf{R})$ nechť je dáno předpisem

$$\varphi(1,0,0) = (3,1,2,1),\ \varphi(0,1,0) = (2,2,3,1),\ \varphi(0,0,1) = (4,2,1,4).$$

Nalezněme alespoň jednu bázi Ker φ a alespoň jednu bázi Im φ.
Řešení . Aby vektor (a_1,a_2,a_3) ležel v Ker φ, musí pro něj podle def. 8, 1.8 platit

$$\varphi(a_1,a_2,a_3) = (0,0,0,0).$$

Protože

$$(a_1,a_2,a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$$

a φ je lineární, dostáváme odtud

$$\varphi(a_1,a_2,a_3) = a_1\varphi(1,0,0) + a_2\varphi(0,1,0) + a_3\varphi(0,0,1),$$

tj.

$$a_1(3,1,2,1) + a_2(2,2,3,1) + a_3(4,2,1,4) = (0,0,0,0).$$

Po úpravě můžeme tuto rovnici pro aritmetické vektory přepsat na soustavu čtyř rovnic pro tři neznámé

$$\begin{array}{rcrcrcl}
3a_1 & + & 2a_2 & + & 4a_3 & = & 0, \\
a_1 & + & 2a_2 & + & 2a_3 & = & 0, \\
2a_1 & + & 3a_2 & + & a_3 & = & 0, \\
a_1 & + & a_2 & + & 4a_3 & = & 0.
\end{array}$$

Hodnost matice soustavy je 3, proto má soustava pouze triviální řešení $\underline{a} = (0,0,0)$. Tedy Ker $\varphi = \{\underline{o}\}$.

Podle věty 8, 1.10 platí

$$\dim V_3(\mathbf{R}) = \dim\,(\mathrm{Im}\ \varphi) + \dim\,(\mathrm{Ker}\ \varphi),$$

tj.

$$3 = \dim\,(\mathrm{Im}\ \varphi) + 0 \Rightarrow \dim\,(\mathrm{Im}\ \varphi) = 3.$$

Vektory $(3,1,2,1)$, $(2,2,3,1)$, $(4,2,1,4)$ jsou lineárně nezávislé, proto tvoří hledanou bázi prostoru Im φ.

8, 2.7. Nechť $\varphi : V_3(\mathbf{R}) \to V_2(\mathbf{R})$ je lineární zobrazení definované předpisem

$$\varphi(\underline{a}) = (a_1 - a_2, a_1 + a_3),\ \ \underline{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

$\psi : V_2(\mathbf{R}) \to V_4(\mathbf{R})$ lineární zobrazení definované předpisem

$$\psi(\underline{b}) = (0, b_1, b_1 + b_2, b_1 - 2b_2),\ \ \underline{b} = (b_1, b_2).$$

Nalezněme matici složeného zobrazení $\eta = \varphi \circ \psi$ vzhledem ke standardním bázím $\mathcal{A} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ a $\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$.
Řešení . Použijeme větu 8, 1.5. K tomu je výhodné najít matice $\underline{A}_{\varphi\mathcal{A}\mathcal{C}}$, $\underline{A}_{\psi\mathcal{C}\mathcal{B}}$, kde $\mathcal{C} = \{(1,0), (0,1)\}$ je standardní báze prostoru $V_2(\mathbf{R})$. Platí

$$\begin{array}{l} \varphi(1,0,0)_{\mathcal{C}} = (1,1), \\ \varphi(0,1,0)_{\mathcal{C}} = (-1,0), \\ \varphi(0,0,1)_{\mathcal{C}} = (0,1), \end{array} \quad \text{tedy}\ \ \underline{A}_{\varphi\mathcal{A}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogicky

$$\begin{array}{l} \psi(1,0)_{\mathcal{B}} = (0,1,1,1), \\ \psi(0,1)_{\mathcal{B}} = (0,0,1,-2), \end{array} \quad \text{tedy}\ \ \underline{A}_{\psi\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & -2 \end{pmatrix}.$$

Proto

$$\underline{A}_{\eta\mathcal{A}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & -1 \\ 0, & -1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & -2 \end{pmatrix}.$$

8, 2.8. Jsou prostory $V_4(\mathbf{R})$ a $P_3(\mathbf{R})$ (prostor reálných polynomických funkcí stupně nejvýše 3 nad $\mathbf{R}$) izomorfní?
Řešení . Podle věty 8, 1.13 budou prostory $V_4(\mathbf{R})$ a $P_3(\mathbf{R})$ izomorfní, právě když bude $\dim V_4(\mathbf{R}) = \dim P_3(\mathbf{R})$ (oba prostory jsou konečněrozměrné). Víme, že $\dim V_4(\mathbf{R}) = 4$. Nalezněme aspoň jednu bázi prostoru $P_3(\mathbf{R})$. Libovolný polynom $f \in P_3(\mathbf{R})$ má tvar

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ \ a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

Polynomy $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^3$ tedy generují $P_3(\mathbf{R})$. Rovnost $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = o$, tj.

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) + \alpha_4 f_4(x) = 0 \text{ pro všechna } \ x \in \mathbf{R},$$

je zřejmě splněna právě jen pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, polynomy f_1, f_2, f_3, f_4 jsou tedy lineárně nezávislé, proto tvoří bázi prostoru $P_3(\mathbf{R})$. Tedy $\dim P_3(\mathbf{R}) = 4 = \dim V_4(\mathbf{R})$ a oba prostory jsou izomorfní.

8, 2.9. Nalezněme alespoň jeden izomorfismus φ pro prostory $V_4(\mathbf{R})$ a $P_3(\mathbf{R})$ z příkl. 8, 2.8.
Řešení . Podle věty 8, 1.3 existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi : V_4(\mathbf{R}) \to P_3(\mathbf{R})$ definované předpisem

$$\varphi(1,0,0,0) = 1,\ \ \varphi(0,1,0,0) = x,\ \ \varphi(0,0,1,0) = x^2,\ \ \varphi(0,0,0,1) = x^3.$$

Podle věty 8, 1.7 c) je toto zobrazení bijekcí, je to tedy hledaný izomorfismus.