Definice. Uspořádanou dvojici $(P, \leq)$, kde $\leq$ je částečné neostré uspořádání na P, nazýváme posetem (zkratka z anglického názvu partially ordered set). Množinu P nazýváme nosičem posetu $(P, \leq)$.

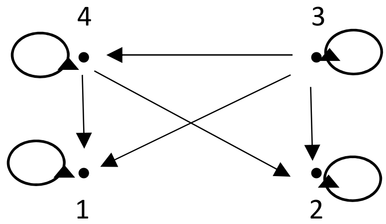
Příklady (odůvodněte jednotlivá tvrzení):

(1) M je množina, $S(M)$ množina všech rozkladů množiny M. Relace „být zjemněním" na $S(M)$ je definovaná takto: $S_1 \leq S_2 \Leftrightarrow$ každý blok z S_1 je podmnožinou nějakého bloku z S_2. $(S(M), \leq)$ je poset.

(2) M je množina, $E(M)$ množina všech ekvivalencí na M. $(E(M), \subseteq)$, kde $\subseteq$ značí relaci „být podmnožinou", je poset.

(3) $(\mathbf{N}, |)$, kde $|$ je relace být „dělitelem", je poset. $(\mathbf{Z}, |)$ poset není.

(4) Uzlový graf na obrázku je grafem posetu:



(5) M je množina reálných funkcí definovaných na <0, 1>. Relaci $\leq$ na M definujme takto: $F \leq G \Leftrightarrow \forall x \in \langle 0, 1\rangle: F(x) \leq G(x)$.

Definice. Nechť $(P, \leq)$ je poset. Relace pokrytí na množině P je definována takto: y pokrývá x (říkáme také, že x je pokryto y, x bezprostředně předchází před y, x je dolní soused y apod.), jestliže platí

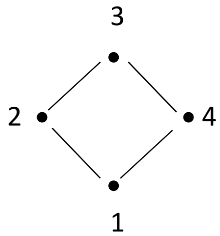
$$x < y \wedge (\forall a \in P: x < a \leq y \Rightarrow a = y).$$

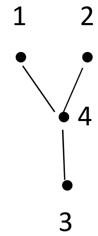
Pomocí relace pokrývání tvoříme tzv. Hasseovy diagramy (viz též class.pedf.cuni.cz/jancarik/download/Pre-algebra5.ppt), tak že z uzlového grafu vypustíme všechny „nadbytečné" hrany (tj. hrany, které plynou přímo z definice posetu).
Hasseův diagram posetu $(P, \leq)$ vytvoříme takto: Každému prvku z P přiřadíme bod (uzel v rovině) podle těchto pravidel:

- Je-li $x < y$, umístíme x níže než y.
- Uzly x, y spojíme hranou, právě když y pokrývá x.

Jsou tedy vypuštěny smyčky a všechny hrany, které vyplývají z tranzitivnosti.

Příklady:



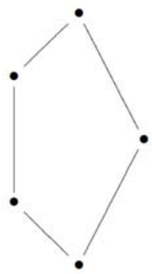


Samostatná práce:

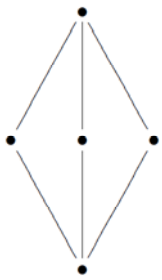
- Pro příklady Hasseových diagramů popište příslušnou relaci výčtem prvků.
- Vytvořte Hasseův diagram pro poset $(P(M), \subseteq)$, kde $P(M)$ je množina všech podmnožin množiny $M = \{a, b, c\}$.

- Jak se změní Hasseův diagram posetu $(P, \leq)$, jestliže v novém posetu použijeme inverzní relaci k $\leq$?

Další příklady

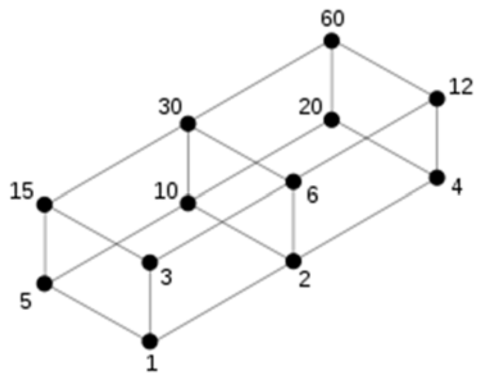


Pětiúhelník



Diamant

Hasseův diagram posetu (A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}, |):



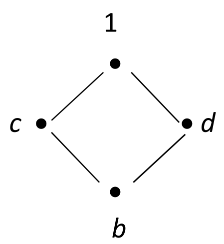
Definice: Nechť $(P, \leq)$ je poset. Poset $(A, \leq_1)$ se nazývá podposet posetu $(P, \leq)$, jestliže $A \subset P$ a zároveň relace $\leq_1$ je zúžení relace $\leq$ na množinu A.

Definice. Nechť $(P_1, \leq_1)$ a $(P_2, \leq_2)$ jsou posety. Zobrazení F: $P_1 \rightarrow P_2$ se nazývá izotonní, jestliže platí: $\forall x, y \in P_1, x \leq_1 y : F(x) \leq_2 F(y)$. Zobrazení F: $P_1 \rightarrow P_2$ se nazývá posetový izomorfismus, jestliže je F vzájemně jednoznačné zobrazení, F je izotonní a F^{-1} je izotonní.

Definice. Nechť $(P, \leq)$ je poset, $a, b \in P$.
$\{x \in P: a < x < b\}$ nazýváme otevřený interval a značíme (a, b);
$\{x \in P: a \leq x \leq b\}$ nazýváme uzavřený interval a značíme $<a, b>$;
$\{x \in P: a < x \leq b\}$, resp. $\{x \in P: a \leq x < b\}$, nazýváme polootevřený (polouzavřený) interval a značíme $(a, b>$, resp. $<a, b)$.

Samostatná práce:

- V posetu



určete, které prvky patří do intervalů $<b, 1>$, $(b, 1>$, $<b, 1)$, $(b, 1)$,

Definice. Nechť $(P, \leq)$ je poset, $M \neq \emptyset$, $M \subset P$, $a \in M$. Prvek a nazveme nejmenším, resp. největším prvkem množiny M, jestliže $\forall x \in M$: $a \leq x$, resp. $\forall x \in M$: $x \leq a$. Pokud $M = P$, mluvíme o nejmenším, resp. největším prvku posetu.

Poznámky:

a) Nejmenší prvek posetu se také nazývá nula a značí 0, největší prvek posetu jednotka a značí 1.
b) Nejmenší a největší prvek množiny musí být porovnatelný se všemi jejími prvky.

Věta: Nechť $(P, \leq)$ je poset, $M \neq \emptyset$, $M \subset P$. Pak v M existuje nejvýše jeden nejmenší a nejvýše jeden největší prvek.

Definice. Nechť $(P, \leq)$ je poset s nulou, resp. jednotkou. Každý horní soused nuly se nazývá atom, každý dolní soused jednotky koatom.

Samostatná práce:

- Vyberte z Hasseových diagramů uvedených výše ty, které (a) mají, resp. nemají nulu, (b) mají resp. nemají jednotku. Pro ty, které mají jednotku, najděte všechny jejich atomy, pro ty, které mají jednotku, všechny jejich koatomy.
- Nakreslete příklad Hasseova diagramu, jestliže příslušný poset nemá ani nulu ani jednotku.

Definice. Poset $(P, \leq)$ se nazývá dobře uspořádaná množina, jestliže má každá jeho neprázdná podmnožina nejmenší prvek.

Definice. Nechť $(P, \leq)$ je poset, $M \neq \emptyset$, $M \subset P$, $m \in M$. Prvek m nazveme minimálním, resp. maximálním prvkem z M , jestliže v M neexistuje prvek $x < m$, resp. $m < x$. Pokud $M = P$, mluvíme o minimálním, resp. maximálním prvku posetu.

Poznámky:

a) Množina může mít víc než jeden minimální, resp. maximální prvek.
b) Má-li množina nejmenší, resp. největší prvek, je tento prvek minimální, resp. maximální.

Definice. Nechť $(P, \leq)$ je poset, $M \subset P$, $d \in P$. Prvek d nazveme dolní závorou množiny M, jestliže $\forall x \in M$: $d \leq x$. Jestliže v množině dolních závor množiny M existuje největší prvek, pak se nazývá infimum množiny M.

Definice. Nechť $(P, \leq)$ je poset, $M \subset P$, $h \in P$. Prvek h nazveme horní závorou množiny M, jestliže $\forall x \in M$: $x \leq h$. Jestliže v množině horních závor množiny M existuje nejmenší prvek, pak se nazývá supremum množiny M.

Samostatná práce:

- Zapište definice infima a suprema množiny M pomocí matematických symbolů.

Příklady (odůvodněte jednotlivá tvrzení):

(1) Poset (**N**, $|$), M = {12, 8, 20}. Dolní závory jsou 1, 2, 4 (společní dělitelé), inf {12, 8, 20} = 4 (největší společný dělitel), horní závory jsou 120, 240, 360, …, 2 400, … (společné násobky), sup {12, 8, 20} = 120 (nejmenší společný násobek).

(2) Poset ($P(M)$, $\subseteq$), $X \subset P(M)$. inf $X = \bigcap_{A \in X} A$, sup $X = \bigcup_{A \in X} A$.

Věta: Nechť (P, $\leq$) je poset, $M \neq \emptyset$, $M \subset P$. Pak existuje nejvýše jedno infimum a nejvýše jedno supremum množiny M.

Samostatná práce:

- Dokažte předchozí větu.