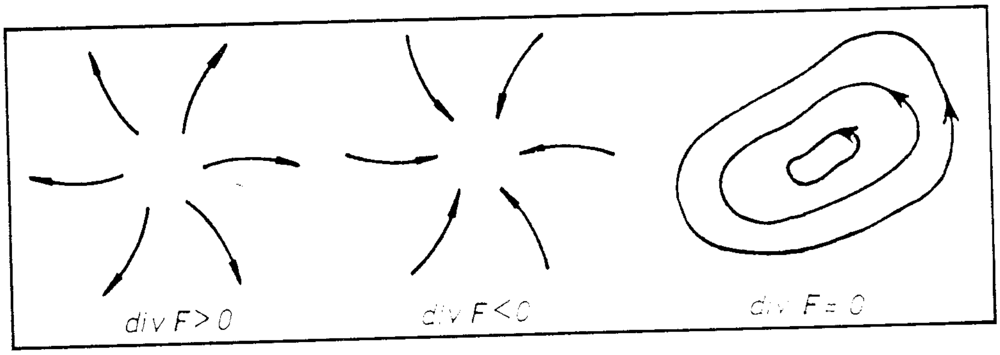
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY
ODDĚLENÍ ZÁKLADNÍ VÝUKY FYZIKY

UČEBNÍ TEXTY ZÁKLADNÍ VÝUKY FYZIKY

SVAZEK 3

PŘEHLED VEKTOROVÉ ANALÝZY

IVAN ŠTOLL, BEDŘICH SEDLÁK



ODDĚLENÍ ZÁKLADNÍ VÝUKY FYZIKY MFF UK

UČEBNÍ TEXTY ZÁKLADNÍ VÝUKY FYZIKY

SVAZEK 3

PŘEHLED VEKTOROVÉ ANALÝZY

Doc. Ing. Ivan Štoll, CSc.
Doc. RNDr. Bedřich Sedlák, CSc.

PRAHA 1987

PŘEDMLUVA

V roce 1985 vyšel 1. svazek doplňkových učebních textů k základní výuce fyziky na MFF UK věnovaný dipólovému záření a výkladu Fourierova rozvoje a Fourierovy transformace spolu s jejich využitím v optice. Záměrem vydání tohoto textu bylo s pomocí Reprografického střediska MFF UK v Praze rychle zaplnit mezeru v učebních textech některých partií základní výuky fyziky. Následoval 2. svazek v roce 1987 k přednášce "Úvod do programování" věnovaný jazyku PASCAL.

Realizace těchto textů se setkala s pochopením a podporou děkana MFF UK Prof. RNDr. Pavla Lukáče, DrSc. a proto vzniká v pořadí 3. svazek určený zvláště pro studenty 1. ročníku fyzikálních oborů. Autoři Doc. Ing. Ivan Štoll, CSc. a Doc. RNDr. Bedřich Sedlák, CSc. v něm podávají přehled vektorové analýzy v rozsahu odpovídajícím jejímu použití v úvodních fyzikálních přednáškách. Je třeba ocenit, že na konci textu je zařazeno i několik příkladů a čtenář má možnost si ověřit, do jaké míry předložený text pochopil.

Rád bych poděkoval především oběma autorům za ochotu, s jakou text připravili. Můj dík patří i pracovníkům Reprografického střediska, zvláště pak jeho vedoucímu s. Burdovi, bez jejichž pomoci by text nemohl tak rychle vzniknout. Věřím, že tento doplňkový text pomůže studentům zvládnout uvedené partie matematiky dříve než umožňuje studijní plán výuky matematiky a tak povede k lepšímu a snazšímu pochopení fyzikální látky.

V Praze dne 15.12.1987

Doc. RNDr. Petr Vostrý, CSc.

O b s a h

str.

a) SKALÁRNÍ A VEKTOROVÉ VELIČINY

Většina fyzikálních veličin jsou buď skaláry nebo vektory. Mnohem řidčeji se ve fyzice vyskytují veličiny jiného charakteru, například tenzory druhého a vyššího řádu. Skalárem nazýváme takovou veličinu, která je určena jen svou velikostí. Chceme-li skalární veličinu sledovat kvantitativně, musíme zvolit její jednotku, která pro ni vytvoří stupnici. Hodnota veličiny je pak dána (obecně reálným) číslem určujícím polohu ve zvolené stupnici. Počítání se skalárními veličinami je tedy z matematického hlediska dáno pravidly počítání s reálnými čísly a nemusí být již blíže vyšetřováno.

Vektor je naproti tomu veličina, u které vedle velikosti je třeba uvažovat směr a orientaci v prostoru (např. rychlost, zrychlení, síla, intenzita pole apod.). Pro plné určení vektorové veličiny je zapotřebí (při zvolené jednotce) udat několik jejích komponent.

Z matematického hlediska definujeme obecně vektor jako prvek množiny (vektorového prostoru), v níž je zaveden součet dvou vektorů $\vec{a}, \vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ a součin vektoru $\vec{a}$ a čísla α: $\vec{d} = \alpha\,\vec{a}$. Výsledky těchto operací jsou opět vektory téhož vektorového prostoru. Dále musí být splněny následující vztahy:

komutativní zákon pro sčítání: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

asociativní zákon pro sčítání: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

asociativní zákon pro násobení číslem: $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

distributivní zákony: $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$, $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

existence nulového vektoru $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $0\vec{a} = \vec{0}$, $\alpha\vec{0} = \vec{0}$

(rovnost $\alpha\vec{a} = \vec{0}$ nastane právě tehdy, když $\alpha = 0$ nebo $\vec{a} = 0$)

existence opačného vektoru $-\vec{a}$ ke každému vektoru $\vec{a}$:

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, $\vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b} - \vec{a} = \vec{x} \Rightarrow \vec{b} = \vec{a} + \vec{x}$,

$-(\alpha\vec{a}) = (-\alpha)\vec{a} = \alpha(-\vec{a})$

násobení číslem 1: $1\vec{a} = \vec{a}$.

Vektorový prostor mohou tvořit například uspořádané n-tice komplexních nebo reálných čísel. Omezíme se na uspořádané trojice reálných čísel; tato čísla budeme nazývat kartézskými souřadnicemi vektorů: $\vec{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$. Dva vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ budeme považovat za rovné právě když bude platit

$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$. Součet dvou vektorů a součin vektoru a čísla zavedeme vztahy

$$\boxed{\vec{a}+\vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)} \tag{1}$$

nulový vektor jako $\vec{0} = (0,0,0)$ a vektor opačný k vektoru $\vec{a}$ jako $(-a_1, -a_2, -a_3)$. Snadno ověříme, že budou splněny výše uvedené požadavky na vektorový prostor.

Takto zavedený vektorový prostor má přímý vztah k bodům trojrozměrného Eukleidova prostoru a má výše uvedenou názornou geometrickou a fyzikální interpretaci. Uspořádaná dvojice bodů o kartézských souřadnicích $A[a_1, a_2, a_3]$, $B[b_1, b_2, b_3]$ nám definuje vektor $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, který lze znázornit orientovanou úsečkou ("šipkou"). Ve smyslu definice rovnosti dvou vektorů všechny stejně dlouhé úsečky téhož směru a orientace určují týž vektor - mluvíme o tak zvaných volných vektorech. Počáteční bod takového vektoru můžeme umístit v prostoru libovolně.

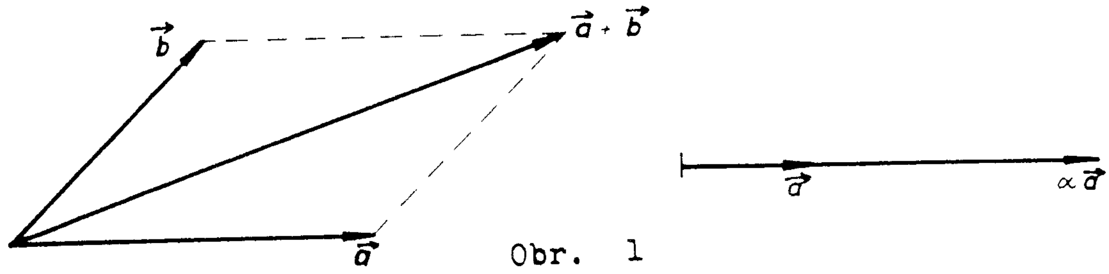
Vztahy mezi vektory můžeme vyjadřovat dvojím způsobem - jednak geometricky, jednak pomocí kartézských souřadnic. Geometrická formulace je přitom obecnější, není závislá na typu zvolených souřadnic a má názorný fyzikální smysl. Zavedeme-li ortonormální vektory kartézské báze, (tj. jednotkové vektory ve směru tří kolmých souřadnicových os) $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$ jako

$$\vec{x}_0 = (1,0,0), \quad \vec{y}_0 = (0,1,0), \quad \vec{z}_0 = (0,0,1), \tag{2}$$

můžeme každý vektor vyjádřit jako součet tří vektorů (složek) mířících ve směru kartézských os x, y, z:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{x}_0 + a_y \vec{y}_0 + a_z \vec{z}_0 . \tag{3}$$

Sčítání dvou vektorů a násobení vektoru reálným číslem zavedené vztahy (1) je geometricky znázorněno na obr. 1.



Obr. 1

b) SOUČINY VEKTORŮ

Eukleidův trojrozměrný vektorový prostor je speciální typ vektorového prostoru, ve kterém je možné zavést další operace, především skalární a vektorový součin.

Skalární součin dvou vektorů $\vec{a}.\vec{b}$ je definován jako číslo; geometricky:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a\,b\cos\gamma} \quad , \tag{4}$$

kde a, b jsou délky úseček obou vektorů a γ je úhel mezi směry obou vektorů;
v kartézských souřadnicích:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \quad . \tag{5}$$

Pro skalární součin platí $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$, $\alpha(\vec{a}.\vec{b}) = (\alpha\vec{a}).\vec{b}$, $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$, avšak obecně $\vec{a}(\vec{b}.\vec{c}) \neq (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$! Skalární součin umožňuje zavést velikost (modul, absolutní hodnotu) vektoru, která má geometrický význam vzdálenosti obou koncových bodů vektoru (délky vektorové úsečky):

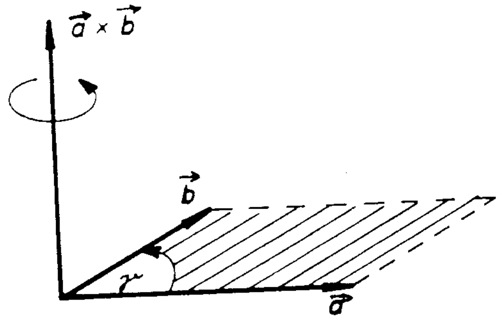
$$\boxed{a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = \sqrt{a^2} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad . \tag{6}$$

Z (4) plyne, že nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ jsou vzájemně kolmé, je-li $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

Vektorový součin dvou vektorů $\vec{a} \times \vec{b}$ je definován jako vektor; geometricky (viz obr. 2):

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = a\,b\sin\gamma} \quad , \tag{7}$$

tj. velikost vektorového součinu je rovna obsahu rovnoběžníka vytvořeného oběma vektory. Směr vektorového součinu je kolmý k rovině obou vektorů a jeho smysl je dán pravidlem pravotočivého šroubu (používáme-li pravé kartézské soustavy, v níž směry os x, y, z tvoří pravotočivý systém);



Obr. 2

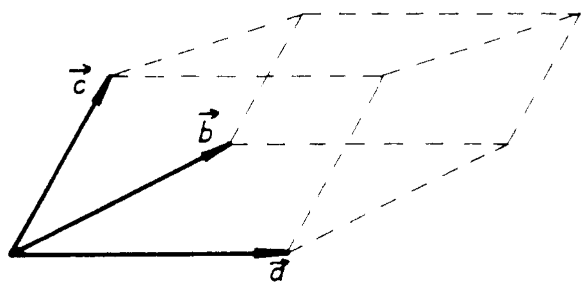
tj. velikost vektorového součinu je rovna obsahu rovnoběžníka vytvořeného oběma vektory. Směr vektorového součinu je kolmý k rovině obou vektorů a jeho smysl je dán pravidlem pravotočivého šroubu (používáme-li pravé kartézské soustavy, v níž směry os x, y, z tvoří pravotočivý systém);

v kartézských souřadnicích:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{x}_0 + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{y}_0 + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{z}_0} \tag{8}$$

Pro vektorový součin platí $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (je antikomutativní) $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b}$, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, avšak obecně $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$! Z (7) plyne, že nenulové vektory $\vec{a}, \vec{b}$ jsou vzájemně rovnoběžné, je-li $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. Proto také $\vec{a} \times \vec{a} = 0$. *)

Smíšený součin tří vektorů $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ je definován jako číslo; geometricky (viz obr. 3) je v absolutní hodnotě roven objemu rovnoběžnostěnu vytvořeného třemi vektory. Znaménko má pak kladné, tvoří-li vektory v daném pořadí pravotočivou soustavu, záporné, tvoří-li levotočivou (opět předpokládáme pravou kartézskou soustavu souřadnic).



Obr. 3

*) Skalární součin se někdy též označuje jako $(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a}\vec{b})$, $\vec{a}\vec{b}$, vektorový součin jako $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{a}\vec{b}]$.

V kartézských souřadnicích

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}} \qquad (9)$$

Zřejmě platí $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, což umožňuje kompaktní zápis smíšeného součinu $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Naproti tomu je třeba dávat pozor na pořadí vektorů, při jejich liché (sudé) permutaci smíšený součin mění (nemění) znaménko. (Sudou respektive lichou permutací se rozumí sudý respektive lichý počet záměn sousedních členů součinu.)

Uvedeme ještě výraz pro dvojitý vektorový součin:

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})} \qquad (10)$$

a některé vícenásobné součiny vektorů:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}) \quad \text{(Lagrangeova identita)}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})]\vec{c} - [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]\vec{d} \qquad (11)$$

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = (\vec{a} \times \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad .$$

Všechny tyto vztahy snadno dokážeme rozepsáním do kartézských souřadnic.

c) TRANSFORMAČNÍ VLASTNOSTI VEKTORŮ

K tomu, abychom orientovanou úsečku nebo uspořádanou trojici čísel mohli považovat za vektor, musí splňovat určité transformační vlastnosti. Mějme trojrozměrný Eukleidův prostor a v něm kartézskou soustavu souřadnic. Přejdeme-li k jiné kartézské soustavě, budou mezi starými a novými kartézskými souřadnicemi bodů tohoto prostoru platit určité transformační vztahy. Důležitým případem jsou tak zvané ortogonální transformace, kdy mezi starými a novými souřadnicemi platí lineární vztahy a vzdálenost dvou bodů zůstává ve staré i nové soustavě táž (je invariantem). K takovým transformacím patří například posunutí nebo pootočení souřadných os. Zvláštním případem takové transformace je inverze os, při níž se změní pouze znaménka souřadnic všech bodů. Při inverzi přechází pravá (pravotočivá) kartézská soustava v levou (levotočivou).

Podle chování při těchto transformacích lze skaláry a vektory dále klasifikovat. Zavádíme tyto definice: *)

Skaláry jsou invarianty a při ortogonálních transformacích se nemění (hmotnost, elektrický náboj, teplota apod.).

Pseudoskaláry se nemění co do velikosti, ale při inverzi mění znaménko.

Vektory pravé neboli polární mají souřadnice, které se transformují stejně jako souřadnice bodů. Souřadnice polárních vektorů při inverzi tedy mění znaménko, ale vektor nemění směr. Pravými (polárními) vektory jsou například rychlost, zrychlení, hybnost, síla, intenzita elektrického pole.

Pseudovektory (vektory nepravé neboli axiální) mají souřadnice, které se transformují jako souřadnice bodů, avšak při inverzi nemění znamení. Pseudovektory mění tedy při inverzi směr. Pseudovektory jsou například moment hybnosti, moment síly, magnetická indukce.

Snadno se přesvědčíme, že skalární součin dvou polárních vektorů i dvou axiálních vektorů je skalár, zatímco skalární součin polárního a axiálního vektoru, smíšený součin tří polárních nebo tří axiálních vektorů jsou pseudoskaláry. Vektorový součin dvou polárních vektorů je pseudovektor (axiální vektor).

d) SKALÁRNÍ A VEKTOROVÁ POLE

Ve fyzice nastává často potřeba přiřadit jednotlivým bodům určité části prostoru skalární či vektorovou veličinu. Může jít například o teplotu v jednotlivých bodech studovaného vzorku, nebo o rychlost proudící kapaliny v jednotlivých bodech trubice. Mluvíme pak o skalárním či vektorovém poli.

Skalární pole přiřazuje každému bodu v určité oblasti prostoru jednoznačně reálné číslo; může být tedy popsáno pomocí funkce. Zvolíme-li pravoúhlou (kartézskou) soustavu souřadnic,

---

*) Lze ukázat, že skaláry i vektory mohlu být považovány za zvláštní případy obecnějších veličin - tenzorů. Ve stručné formě lze úvahy tohoto druhu nalézt v matematickém dodatku učebnice [1].

můžeme polohu každého bodu A vyjádřit jeho polohovým vektorem (rádiusvektorem) $\vec{r}$ s danými souřadnicemi x, y, z, tedy $\vec{r} = (x, y, z)$. Dané skalární pole pak můžeme vyjádřit jako funkci vektoru $\vec{r}$ nebo jako funkci tří proměnných x, y, z.

$$f = f(\vec{r}) = f(x,y,z) \quad . \tag{12}$$

Podobně vektorové pole může být popsáno vektorovou funkcí. Vyjádříme-li sledovanou vektorovou veličinu $\vec{F}$ pomocí jejích složek F_x, F_y, F_z ve zvolené soustavě souřadnic, může být vektorové pole uspořádanou trojicí skalárních funkcí polohového vektoru $\vec{r}$ či jeho souřadnic x, y, z

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x(x,y,z)\vec{x}_0 + F_y(x,y,z)\vec{y}_0 + F_z(x,y,z)\vec{z}_0 \quad . \tag{13}$$

Skalární a vektorová pole, která nezávisí explicitně na čase, se nazývají stacionární. Obecná pole mohou být ovšem časově závislá. Taková pole $f(x,y,z,t)$, $\vec{F}(x,y,z,t)$, která jsou funkcemi čtyř proměnných x,y,z,t, se nazývají nestacionární.

Vlastnosti skalárních a vektorových polí lze s výhodou vyšetřovat metodami matematické analýzy, jejímž základním pojmem je pojem derivace. V případě funkcí více proměnných se používají parciální derivace podle jednotlivých nezávisle proměnných x, y, z. U stacionárního skalárního pole můžeme vytvořit tři první derivace

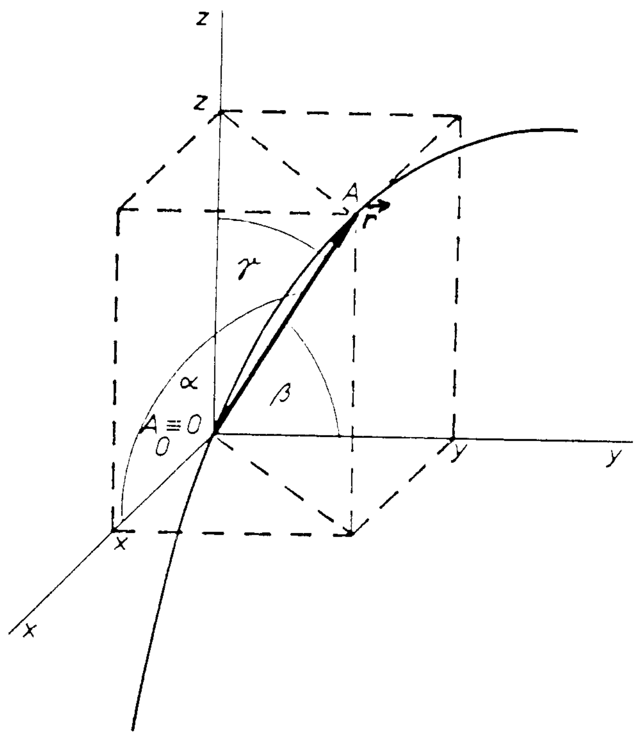
$$\frac{\partial f}{\partial x} \; , \quad \frac{\partial f}{\partial y} \; , \quad \frac{\partial f}{\partial z} \; ,$$

u vektorového pole devět parciálních derivací prvního řádu

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}, \frac{\partial F_x}{\partial y}, \frac{\partial F_x}{\partial z}, \frac{\partial F_y}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial y}, \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_z}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial z} \; .$$

Parciální derivace vyšších řádů dostatečně hladkých funkcí mají důležitou vlastnost. Derivace podle různých proměnných, tzv. smíšené derivace, nezávisí na pořadí derivování. Platí tedy například $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$. V dalších úvahách budeme předpokládat, že všechny potřebné parciální derivace vyšetřovaného pole existují a jsou spojité, takže jsou splněny podmínky pro výše uvedenou rovnost smíšených parciálních derivací.

Často je potřebné vyšetřovat vlastnosti daného pole na určité křivce. Pak je velmi užitečný pojem derivace pole v daném směru. Probíhá-li bod A po nějaké křivce, může být jeho poloha určena délkou oblouku s měřeného od jistého pevného, předem zvoleného referenčního bodu A_0. Položíme-li počátek soustavy souřadnic do bodu A_0 (viz obr. 4), můžeme souřadnice rádiusvektoru $\vec{r}$ vyjádřit pomocí parametru s : $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$. Jestliže rádiusvektor $\vec{r}$ svírá s osami souřadnic úhly α, β, γ, platí $\cos\alpha = x/r$, $\cos\beta = y/r$, $\cos\gamma = z/r$, přičemž směrové kosiny splňují podmínku $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.



Obr. 4

Sledujme nyní situaci, kdy se bod A neomezeně přibližuje po dané křivce k bodu A_0. Rádiusvektor $\vec{r}$ přejde v diferenciálně malý vektor $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ a bude mít směr tečny ke křivce v bodě A_0. Jednotkový tečný vektor $\vec{t}$ v bodě A pak bude možné vyjádřit derivacemi souřadnic podle parametru s

$$\vec{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad . \quad (14)$$

Získaný výsledek není ovlivněn speciální volbou počátku. Přechod k jinému počátku A_0' by znamenal přičíst konstantní vektor $\overrightarrow{A_0A_0'}$, který po derivování podle s dá nulový vektor. Derivacemi (14) může tedy být vyjádřen jednotkový tečný vektor v libovolném bodě křivky.

Mějme nyní skalární pole $f(x,y,z)$. Zvolíme opět počátek souřadnic v bodě A_0 (viz obr 4). Mějme dále bod A, který se bude pohybovat po dané křivce. Skalární pole na této křivce můžeme vyjádřit složenou funkcí $g(s) = f(x(s), y(s), z(s))$, která představuje funkci jediného parametru s. Obyčejnou derivaci funkce $g(s)$ v bodě A_0 lze pak vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(A)-f(A_0)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f[x(s), y(s), z(s)] - f[x(0), y(0), z(0)]}{\Delta s} \tag{15}$$

a použitím pravidel o derivování složených funkcí více proměnných pro ni s ohledem na (14) dostaneme

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{A_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \,. \tag{16}$$

Výsledek (16) představuje tzv. <u>derivaci funkce f ve směru $\vec{t}(s)$</u>. Je přitom lhostejné, po jaké křivce se bod A bude k bodu A_0 přibližovat, pokud všechny tyto křivky budou mít týž tečný vektor $\vec{t}(s)$ v bodě A_0.

Derivaci ve směru (nebo obecněji derivaci podle skalárního parametru s) lze provést i pro vektorové pole. Je přirozené zavést pro ni definici

$$\vec{F}'(s) = \frac{d\vec{F}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{F}(s+\Delta s) - \vec{F}(s)}{\Delta s} \,. \tag{17}$$

Užitím (13) může být tato derivace vyjádřena pomocí derivací jednotlivých složek F_x, F_y, F_z

$$\frac{d\vec{F}(s)}{ds} = \frac{dF_x}{ds}\vec{x}_0 + \frac{dF_y}{ds}\vec{y}_0 + \frac{dF_z}{ds}\vec{z}_0 \,, \tag{17a}$$

takže je dána uspořádanou trojicí derivací skalárních funkcí podle parametru s. Pro derivaci součtů a součinů vektorových polí platí obdobná pravidla jako pro derivování funkcí:

$$(\vec{F}+\vec{G})' = \vec{F}' + \vec{G}', \quad (\vec{F}.\vec{G})' = \vec{F}'.\vec{G} + \vec{F}.\vec{G}', \quad (\vec{F}\times\vec{G})' = \vec{F}'\times\vec{G} + \vec{F}\times\vec{G}'. \qquad (18)$$

Podobně pro součin skalárního a vektorového pole $f\vec{F}$

$$(f\vec{F})' = f'\vec{F} + f\vec{F}' \qquad (18a)$$

Speciálně má-li vektor $\vec{F}$ při změně parametru s konstantní velikost a proměnlivý směr, platí $\vec{F}' \perp \vec{F}$. Zderivováním $|\vec{F}|^2 = (\vec{F}.\vec{F})$ = konst totiž dostaneme $\vec{F}'.\vec{F} + \vec{F}.\vec{F}' = 2\vec{F}.\vec{F}' = 0$ a z vlastnosti skalárního součinu plyne kolmost obou vektorů. Například v mechanice se s takovou situací setkáváme u rovnoměrného kruhového pohybu, kdy vektor dostředivého zrychlení je kolmý k obvodové rychlosti.

V následujících odstavcích budeme vyšetřovat vlastnosti skalárních a vektorových polí pomocí operací gradient, divergence a rotace, které lze vyjádřit pomocí parciálních derivací.

e) GRADIENT SKALÁRNÍHO POLE

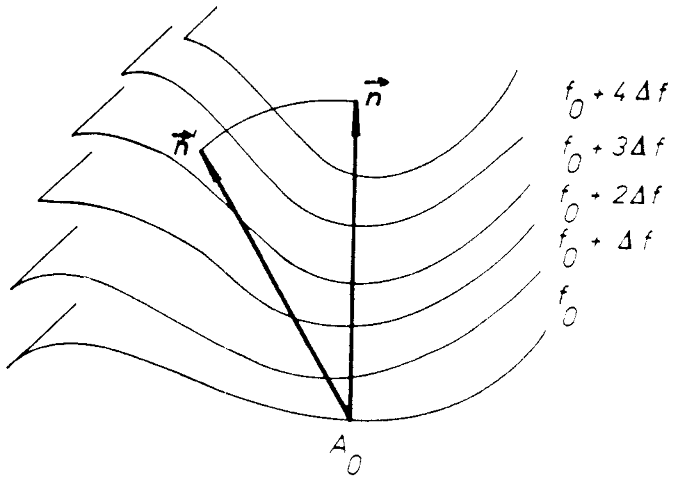
Derivaci daného skalárního pole $f(x, y, z)$ ve směru $\vec{t}(s)$ (16) lze vyjádřit jako skalární součin vektoru

$$\boxed{\text{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)} \quad , \qquad (19)$$

nazývaný gradientem pole $f(x, y, z)$ a jednotkového vektoru $\vec{t}(s)$ v daném směru. Tedy

$$\frac{df}{ds} = (\text{grad}\, f \,.\, \vec{t}(s)) \quad . \qquad (20)$$

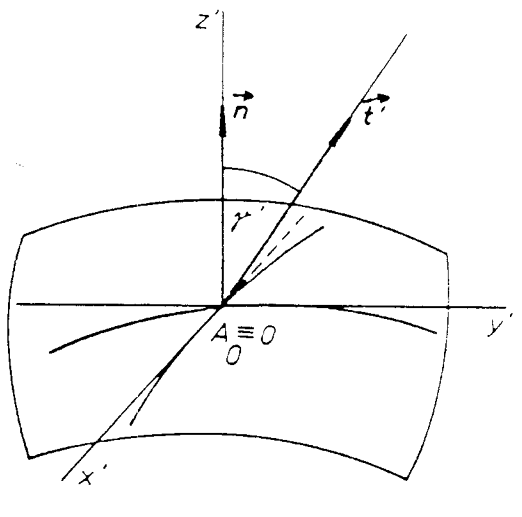
Geometrické místo bodů s danou konstantní hodnotou veličiny f, které je určeno rovnicí $f(x, y, z)$ = konst, se nazývá <u>ekvipotenciální plochou</u> daného pole. Jedna z těchto ploch bude procházet i bodem A_0. V tomto bodě lze pak vztyčit normálu k ekvipotenciální ploše a stanovit jednotkový normálový vektor $\vec{n}$. Skalární pole nám tak v každém bodě definuje určitý význačný směr. Je snadné se přesvědčit (viz obr. 5), že směr normály k ekvipotenciální ploše je zároveň směrem největší změny (největšího zhuštění) ekvipotenciálních ploch. V normálovém směru protne totiž jednotkový vektor největší počet těchto ploch.



Obr. 5

V dvojrozměrném případě zemského povrchu můžeme za skalární pole považovat pole výšek, ekvipotenciálním plochám odpovídají vrstevnice a normála k nim udává směr maximálního stoupání.

Zvolme na okamžik souřadnou osu z' ve směru normály $\vec{n}$ a druhé dvě osy x', y' k ní kolmé (obr. 6). Současně mějme libovolný směr daný jednotkovým vektorem $\vec{t}' = (\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$.



Obr. 6

Derivace v tomto směru bude podle (16) rovna

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x'} \cos\alpha' + \frac{\partial f}{\partial y'} \cos\beta' + \frac{\partial f}{\partial z'} \cos\gamma' \quad . \tag{16a}$$

Osy x' a y' jsou však tečnami ke křivkám, které leží v ekvipotenciální ploše, a proto $\partial f/\partial x' = \partial f/\partial y' = 0$. Vztah (16a) se tak redukuje na

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial z'} \cos\gamma' \quad . \tag{21}$$

Maximální hodnotu nabývá tedy derivace ve směru z', kdy $\cos\gamma' = 1$. Derivace v daném obecném směru je pak projekcí derivace v normálovém směru $\partial f/\partial z'$ do daného směru. Zejména odtud plyne, že projekce derivace $\partial f/\partial z'$ do libovolně zvolených souřadných os x, y, z jsou rovny $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$.

V souladu s výrazem (19) můžeme tedy zavést tuto definici: Gradient skalárního pole f v daném bodě je vektor o velikosti derivace ve směru normály k ekvipotenciální ploše a má směr této normály:

$$\boxed{\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \frac{df}{dn} \vec{n}_0} \quad . \tag{22}$$

Je zřejmé, že vektor gradientu míří vždy směrem vzrůstu funkce f.

Ve vektorové analýze zavádíme Hamiltonův operátor nabla *) symbolem ∇, který představuje formální vektor

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad . \tag{23}$$

Výraz (19) zapisujeme pak ve tvaru

$$\operatorname{grad} f = \nabla f \quad , \tag{24}$$

přičemž musíme mít na paměti, že tento výraz představuje vektor.

---

*) Exotický název nabla je odvozen od názvu fénického hudebního nástroje příbuzného loutně.

Operace (24) přiřazuje tedy skalárnímu poli f jednoznačně vektorové pole $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \nabla f \quad , \tag{25}$$

říkáme, že f je skalárním potenciálem $\vec{F}$. Zpětné přiřazení není již jednoznačné; pole f a $f + c$, kde c je konstantní skalární pole, mají týž gradient. Gradient je možno vytvořit ke každému skalárnímu poli (pokud příslušné parciální derivace existují). Naproti tomu ne každé vektorové pole je možno vyjádřit ve tvaru (25). Ta, u nichž to je možné, nazýváme potenciálními.

Pro počítání s gradienty platí tato zřejmá pravidla:

$$\nabla c = 0, \quad \nabla(c f) = c \nabla f, \quad \nabla(f_1 + f_2) = \nabla f_1 + \nabla f_2$$
$$\nabla(f_1 f_2) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1 \quad . \tag{26}$$

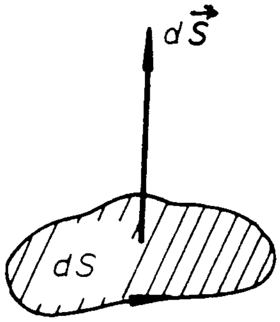
f) DIVERGENCE VEKTOROVÉHO POLE

Mějme vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$. Definujeme tok pole $\vec{F}$ plochou S jako plošný integrál

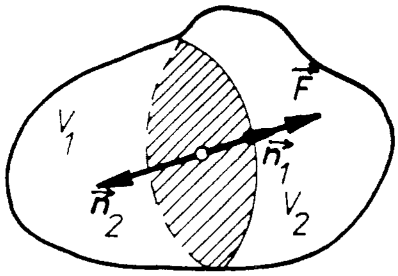
$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad . \tag{27}$$

Zde $d\vec{S}$ je diferenciální element plochy, jemuž jsme přiřadili směr vektoru normály. Tuto normálu je ovšem třeba orientovat; můžeme to udělat například tak, že stanovíme směr pohybu po obvodu plošky dS a použijeme pravidla provotočivého šroubu (obr. 7). Jde-li o tok uzavřenou plochou S, která ohraničuje objem V, budeme považovat za kladný směr normály ten, který směřuje ven z objemu V a tok budeme označovat

$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad . \tag{28}$$



Obr. 7



Obr. 8

Rozdělíme nyní objem V přepážkami na N menších objemů V_i. Určíme toky pole Φ_i plochami S_i ohraničujícími tyto dílčí objemy a budeme je sčítat. Ukazuje se, že toky vnitřními přepážkami se v tomto součtu vzájemně vyruší. Při sčítání toků hranicí dvou sousedních objemů objeví se totiž vždy dvakrát, jednou s kladným a jednou se záporným znaménkem (viz obr. 8). Sumární tok bude proto roven právě původnímu toku plochou S:

$$\sum_{i=1}^{N} \Phi_i = \sum_{i=1}^{N} \oint_{S_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{S}_i = \Phi \tag{29}$$

Zmenšujeme-li objemy V_i, zůstává jejich součet V konstantní; stejně tak se zmenšují i toky Φ_i a jejich součet Φ zůstává konstantní. Nabízí se tedy možnost vytvořit podíl těchto dvou neomezeně se zmenšujících veličin a zkoumat vlastnosti jeho limity.

Zvolíme v prostoru bod A o souřadnicích x, y, z a obklopíme jej malým objemem ΔV. Tok plochou ohraničující tento objem označíme $\Delta\Phi$. Budeme nyní dělit tento objem na stále menší části libobolným způsobem a vyčleníme posloupnost těch částí $\Delta V_i^{(A)}$, které obsahují bod A. Označíme

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V_i^{(A)} \to 0} \frac{\Delta \Phi_i^{(A)}}{\Delta V_i^{(A)}}} \tag{30}$$

Pokud limita na pravé straně (30) existuje a nezávisí na způsobu dělení objemu ΔV, představuje nám tok pole $\vec{F}$ v bodě A vztažený k jednotce objemu a nazýváme jej divergencí pole $\vec{F}$ v bodě A.

Vraťme se nyní k objemu V ohraničenému plochou S a upravme vztah (29) takto:

$$\Phi = \oint_S \vec{F} . d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} \Delta \Phi_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta \Phi_i}{\Delta V_i} \Delta V_i \qquad (31)$$

Pokračujme přitom v neomezeném dělení dílčích objemů ΔV_i dalšími přepážkami. Pro každý bod objemu V se souřadnicemi x, y, z tak vytvoříme posloupnost neomezeně se zmenšujících objemů tento bod stále obsahujících. V limitě přejde tedy podíl $\Delta \Phi_i / \Delta V_i$ v divergenci div $\vec{F}$ a sumu na pravé straně (31) můžeme nahradit integrálem přes objem V:

$$\boxed{\oint_S \vec{F} . d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{F}\, dV} \quad . \qquad (32)$$

<u>Tok vektorového pole $\vec{F}$ uzavřenou plochou je roven celkové divergenci v objemu uzavřeném touto plochou.</u> Vztah (32) umožňuje přejít od objemového integrálu k plošnému integrálu přes ohraničující plochu, nazývá se větou <u>Gaussovou-Ostrogradského</u> a je jednou ze základních vět vektorové analýzy.

Geometrická definice divergence jako skaláru div $\vec{F}$ je sice obecná a názorná, ale neumožňuje provádět přímý výpočet. Vyjádříme ji proto v kartézských souřadnicích. Uvažujme elementární objem ve tvaru kvádru o hranách $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ rovnoběžných s příslušnými kartézskými osami (viz obr. 9). Nechť jeho levý dolní zadní vrchol má souřadnice x, y, z. Tok dvojicí rovnoběžných podstav tohoto kvádru (například horní a dolní) bude

$$\Delta \Phi_{12} = \Delta \Phi_2 + \Delta \Phi_1 = F_z(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y -$$

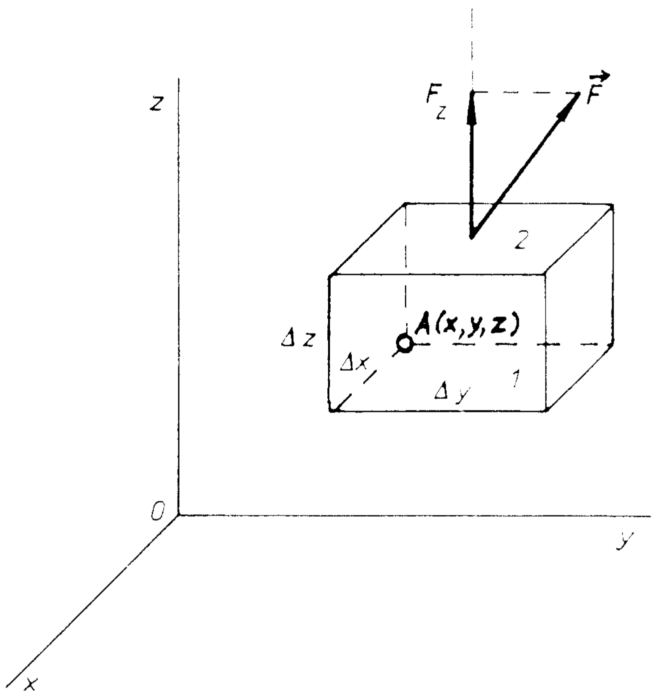
$$- F_z(x, y, z) \Delta x \Delta y = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (33)$$

Celkový tok povrchem kvádru

$$\Delta \Phi = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta V \ , \quad \Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \ , \qquad (34)$$

a tedy

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{F}} \quad . \tag{35}$$



Obr. 9

Operátor nabla ∇ umožňuje vyjádřit divergenci vektorového pole $\vec{F}$ kompaktním způsobem jako skalární součin tohoto operátoru a vektoru $\vec{F}$; pořadí obou symbolů ovšem nelze zaměnit. Volba elementárního objemu ve tvaru kvádru neomezuje obecnost, neboť objem libovolného tvaru můžeme s libovolnou přesností pomocí takových malých kvádrů sestavit.

Vztah

$$\boxed{f = \operatorname{div}\vec{F}} \tag{36}$$

přiřazuje vektorovému poli $\vec{F}$ jednoznačně skalární pole f. Zpětné přiřazení není již jednoznačné; pole $\vec{F}$ a $\vec{F}+\vec{F}'$, kde $\operatorname{div}\vec{F}' = 0$, mají touž divergenci.

Pro počítání s divergencí platí tato zřejmá pravidla:

$$\nabla\cdot\vec{c}=0\,,\quad \nabla\cdot(c\vec{F})=c\,\nabla\cdot\vec{F},\quad \nabla\cdot(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=\nabla\cdot\vec{F}_1+\nabla\cdot\vec{F}_2$$

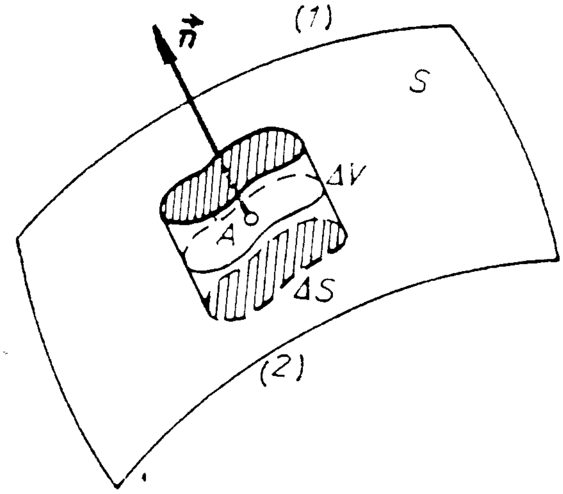
$$\nabla\cdot(f\vec{F})=f\,\nabla\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\nabla f \tag{37}$$

Uvažme zvláštní případ, kdy objem ΔV těsně přimyká s obou stran k nějaké ploše (například ploše nespojitosti pole) a má tvar části vrstvy o zanedbatelné tloušťce (obr. 10). Tok $\Delta\Phi$ bude pak roven součtu toků normálových složek pole oběma podstavami takového objemu:

$$\Delta\Phi=(F_{1n}-F_{2n})\,\Delta S\quad . \tag{38}$$

Směr normály k ploše jsme zvolili za kladný, míří-li z oblasti (2) do oblasti (1). Provedeme-li úvahu o limitním zmenšování plochy ΔS v okolí bodu A na ploše, můžeme definovat tak zvanou plošnou divergenci vztahem

$$\mathrm{Div}\,\vec{F}=F_{1n}-F_{2n}=\vec{n}\cdot(\vec{F}_1-\vec{F}_2)\quad . \tag{39}$$



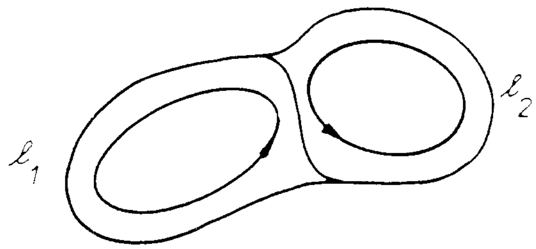
Obr. 10

g) ROTACE VEKTOROVÉHO POLE

Mějme vektorové pole $\vec{F}(x,y,z)$. Definujeme cirkulaci pole podél uzavřené křivky l jako křivkový integrál

$$\boxed{\Gamma = \oint_l \vec{F}\cdot d\vec{l}} \tag{40}$$

Zde $d\vec{l}$ je diferenciální vektorový element křivky ve směru tečny. Jeho orientace je dána dohodou o smyslu obcházení křivky, například proti směru hodinových ručiček. Uzavřená křivka l tvoří hranici plochy S ; tato plocha není ovšem určena jednoznačně (na rozdíl od objemu V uvnitř uzavřené plochy). Na ploše obehnané křivkou l můžeme opět vést dělící křivky, vytvářet soustavu dílčích ploch, počítat cirkulaci podél jejich hranic a sčítat je. Ukazuje se, že příspěvky k cirkulacím podél společných hranic dvou sousedních ploch se vzájemně vyruší. Zachováme-li totiž jednotný smysl obcházení křivek, budeme takovou společnou hranici obcházet vždy v opačném směru (viz obr. 11).



Obr. 11

Sumární cirkulace bude tedy rovna právě původní cirkulaci podél křivky :

$$\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i = \sum_{i=1}^{N} \oint_{l_i} \vec{F}_i\cdot d\vec{l}_i = \Gamma \tag{41}$$

Zvolíme-li v prostoru bod A o souřadnicích x,y,z, vedeme tímto bodem rovinu libovolné orientace a vymezíme v této rovině uzavřenou křivku malých rozměrů obklopující bod A . Plochu omezenou touto křivkou označíme ΔS , cirkulaci podél této křivky $\Delta\Gamma$.

Budeme nyní dělit tuto plošku na menší části a vyčleníme posloupnost plošek obsahujících bod A . Budeme uvažovat limitu

$$\lim_{\Delta S_i^{(A)} \to 0} \frac{\Delta \Gamma_i^{(A)}}{\Delta S_i^{(A)}} \tag{42}$$

pokud taková limita existuje a nezávisí na způsobu dělení plošky ΔS. Tato limita bude však přesto závislá na volbě orientace roviny procházející bodem A , neboli na směru normály k elementární plošce, na jejíž hranici cirkulaci určujeme. Můžeme tedy (podobně jako u definice gradientu) považovat tuto limitu za projekci určitého vektoru rot $\vec{F}$ do směru normály k plošce:

$$\boxed{(\mathrm{rot}\,\vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S_i^{(A)} \to 0} \frac{\Delta \Gamma_i^{(A)}}{\Delta S_i^{(A)}}} \quad . \tag{43}$$

Velikost vektoru $\vec{F}$ představuje tedy cirkulaci pole $\vec{F}$ v bodě **A** vztaženou k jednotce plochy v bodě **A** .
Směr vektoru rot $\vec{F}$ je ten, v němž limita (42) nabývá maximální hodnoty. *) Vektor rot A nazýváme <u>rotací pole</u> F v bodě A.

Vraťme se nyní k obecné uzavřené křivce l obepínající plochu S . Upravíme vztah (41) na

$$\Gamma = \oint \vec{F} . d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} \Delta \Gamma_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta \Gamma_i}{\Delta S_i} \Delta S_i \tag{44}$$

---

*) V anglosaské literatuře se užívá pro rotaci názvu a označení curl $\vec{F}$. Poznamenejme ještě, že rotaci lze zavést též stejným limitním pochodem jako u divergence, a to vztahem

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta S_i} \quad , \text{ kde } \quad \vec{G} = \oint d\vec{S} \times \vec{F} \quad .$$

Pro každý bod A na ploše S můžeme vytvořit posloupnost neomezeně se zmenšujících dílčích plošek tento bod stále obsahujících. V limitě přejde tedy podíl $\Delta\Gamma_i/\Delta S_i$ v rot $\vec{F}.\vec{n}$ a sumu na pravé straně (44) můžeme nahradit integrálem přes plochu S:

$$\boxed{\oint_l \vec{F}.d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{F}.d\vec{S}} \quad . \tag{45}$$

Cirkulace vektorového pole podél uzavřené křivky je rovna celkovému toku pole libovolnou plochou, pro níž křivka l představuje hranici. Vztah (45) umožňuje přejít od plošného integrálu ke křivkovému integrálu podél hranice, nazývá se větou Stokesovou a je jednou ze základních vět vektorové analýzy.

Geometrická definice rotace jako vektoru rot $\vec{F}$ je sice obecná a názorná, ale neumožňuje provádět přímý výpočet. Vyjádříme jej proto v kartézských souřadnicích. Uvažujme elementární plošku ve tvaru obdélníka o stranách Δx, Δy rovnoběžných s příslušnými kartézskými osami (viz obr. 12). Nechť jeho levý zadní vrchol má souřadnice x, y, z. Příspěvek k cirkulaci podél dvojice rovnoběžných stran (například levé a pravé) bude

$$\Delta\Gamma_{12} = \Delta\Gamma_1 + \Delta\Gamma_2 = F_x(x,y,z)\Delta x - F_x(x, y+\Delta y, z)\Delta x = -\frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta x\Delta y \tag{46}$$

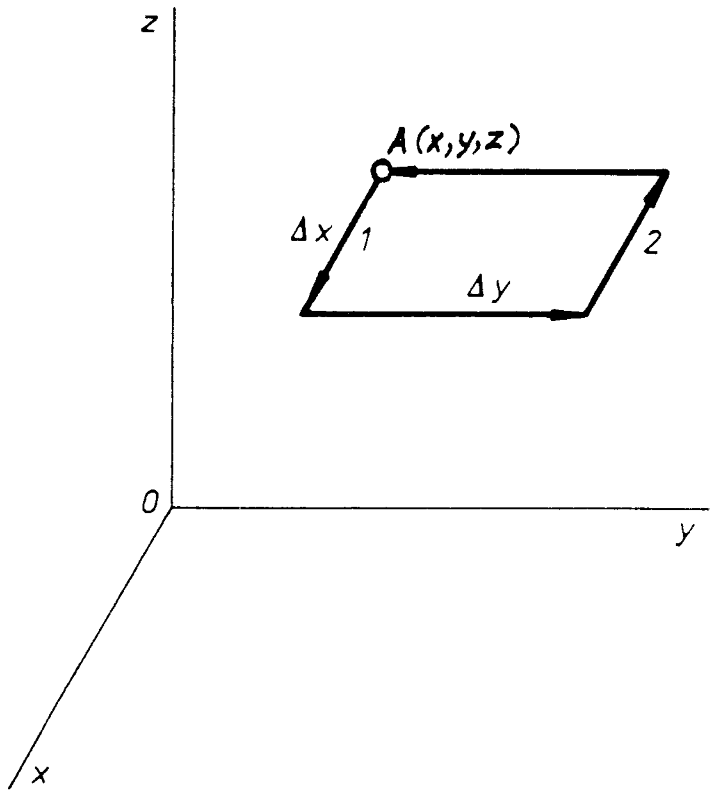
Celková cirkulace podél obvodu obdélníka

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta S \quad , \qquad \Delta S = \Delta x\Delta y \quad , \tag{47}$$

a tedy

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \nabla\times\vec{F}} \tag{48}$$

Operátor nabla ∇ umožňuje vyjádřit rotaci vektorového pole $\vec{F}$ kompaktním způsobem jako vektorový součin tohoto operátoru a vektoru $\vec{F}$; pořadí symbolů nelze ovšem měnit. Volba elementární



Obr. 12

plošky ve tvaru obdélníka opět neomezuje obecnost výsledku.

Vztah

$$\vec{G} = \mathrm{rot}\,\vec{F} \qquad (49)$$

přiřazuje vektorovému poli $\vec{F}$ jednoznačně jiné vektorové pole $\vec{G}$. Zpětné přiřazení není již jednoznačné; pole $\vec{F}$ a $\vec{F}+\vec{G}$, kde rot $\vec{F}' = 0$ mají touž rotaci.

Pro počítání s rotacemi platí tato zřejmá pravidla:

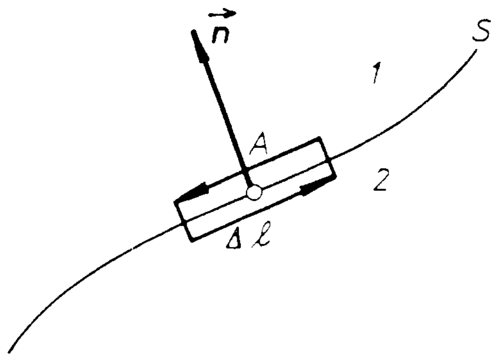
$$\nabla\times\vec{C}=0,\quad \nabla\times(c\vec{F}) = c\nabla\times\vec{F},\quad \nabla\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=\nabla\times\vec{F}_1+\nabla\times\vec{F}_2$$
$$\nabla\times(f\vec{F}) = f\,\nabla\times\vec{F}+\nabla f\times\vec{F} \qquad (50)$$

Uvažme zvláštní případ, kdy elementární křivka l těsně přimyká s obou stran k nějaké ploše (například ploše nespojitosti pole) takže její úseky ve směru kolmém k této ploše jsou zanedbatelně krátké (obr. 13). Cirkulace bude pak rovna součtu integrálů podél obou tečných větví:

$$\Delta\Gamma = (F_{1t} - F_{2t})\,\Delta\ell \quad . \tag{51}$$

Provedeme-li úvahu o limitním zkracování větví $\Delta\ell$ v okolí bodu A na ploše, můžeme definovat tak zvanou plošnou rotaci vztahem

$$\boxed{\mathrm{Rot}\,\vec{F} = \vec{n} \times (\vec{F}_1 - \vec{F}_2)\,, \qquad |\mathrm{Rot}\,\vec{F}| = F_{1t} - F_{2t}} \;. \tag{52}$$



Obr. 13

h) OPERÁTORY $(\vec{a}\cdot\nabla)$ a Δ

Položme si otázku, jak vyjádřit divergenci a rotaci vektorového součinu nebo gradient skalárního součinu dvou vektorových polí. K tomu účelu zavedeme další operátor $(\vec{a}\cdot\nabla)$ předpisem

$$\boxed{(\vec{a}\cdot\nabla) = a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}} \;. \tag{53}$$

Tento operátor "$(\vec{a}$. grad)" může působit jak na skalární tak na vektorové pole:

$$(\vec{a}.\nabla)f = a_x\frac{\partial f}{\partial x} + a_y\frac{\partial f}{\partial y} + a_z\frac{\partial f}{\partial z} = \vec{a}\cdot\nabla f$$

$$(\vec{a}.\nabla)\vec{F} = a_x\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} + a_y\frac{\partial\vec{F}}{\partial y} + a_z\frac{\partial\vec{F}}{\partial z} =$$

$$= \left(a_x\frac{\partial F_x}{\partial x} + a_y\frac{\partial F_x}{\partial y} + a_z\frac{\partial F_x}{\partial z},\ \ldots\right) \tag{54}$$

Bude-li $\vec{s}$ jednotkový vektor, potom výraz $(\vec{s}\cdot\nabla)f$ je projekcí gradientu skalárního pole f do směru $\vec{s}$ a je tedy totožný s derivací pole v tomto směru. Podobně bychom mohli interpretovat výraz $(\vec{s}\cdot\nabla)\vec{F}$ jako derivaci vektorového pole ve směru $\vec{s}$.

Nyní můžeme vyjádřit divergenci a rotaci vektorového součinu a gradient skalárního součinu dvou vektorových polí:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathrm{div}\,(\vec{F}_1\times\vec{F}_2) \equiv \nabla\cdot(\vec{F}_1\times\vec{F}_2) = \vec{F}_2\cdot(\nabla\times\vec{F}_1) - \vec{F}_1\cdot(\nabla\times\vec{F}_2)\\
&\mathrm{rot}\,(\vec{F}_1\times\vec{F}_2) \equiv \nabla\times(\vec{F}_1\times\vec{F}_2) = (\vec{F}_2\nabla)\vec{F}_1 - (\vec{F}_1\nabla)\vec{F}_2 + \vec{F}_1\nabla\cdot\vec{F}_2 - \vec{F}_2\nabla\cdot\vec{F}_1\\
&\mathrm{grad}\,(\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2) \equiv \nabla(\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2) = (\vec{F}_1\cdot\nabla)\vec{F}_2 + (\vec{F}_2\nabla)\vec{F}_1 + \vec{F}_1\times(\nabla\times\vec{F}_2) + \vec{F}_2\times(\nabla\times\vec{F}_1)
\end{aligned}}\ . \tag{55}$$

O platnosti těchto poněkud komplikovanějších, avšak velmi užitečných vzorců se můžeme přesvědčit alespoň rozepsáním příslušných výrazů v kartézských souřadnicích.

Uvědomíme-li si, že operátory "div" a "rot" mohou působit pouze na vektorová pole a operátor "grad" pouze na skalární pole, můžeme z těchto operátorů sestavit pět kombinací operátorů druhého řádu:

"rot grad", "div rot", "div grad", "grad div" a "rot rot" .

Vyjádřením v kartézských souřadnicích se snadno přesvědčíme, že vždy platí rot grad f = 0 a div rot $\vec{F}$ = 0. Hlubší význam těchto vztahů bude objasněn v následujícím odstavci. Operátor "div grad" $\equiv \Delta$ nazýváme Laplaceovým operátorem delta a formálně odpovídá čtverci operátoru nabla:

$$\boxed{\Delta \equiv \nabla\cdot\nabla \equiv \nabla^2} \tag{56}$$

V kartézských souřadnicích má zřejmě tvar

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \tag{57}$$

Laplaceův operátor podobně jako operátor $(\vec{a}\cdot\nabla)$ může působit jak na skalární tak i na vektorová pole.

Pro dvojnásobnou operaci rotace platí vztah

$$\boxed{\text{rot rot } \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \Delta\vec{F}, \text{ jinak } \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla . \vec{F}) - \Delta\vec{F},} \tag{58}$$

který je obdobou vektorové identity (10).

i) VEKTOROVÁ POLE POTENCIÁLNÍ A SOLENOIDÁLNÍ

Vektorové pole, které je možno vyjádřit jako gradient nějakého skalárního pole:

$$\vec{F} = \text{grad } f = \nabla f \tag{59}$$

se nazývá potenciálním (bezvírovým). Uvažme křivkový integrál $\int_A^B \vec{F}.d\vec{l}$ po nějaké křivce mezi body A, B. Je-li $\vec{F}$ silové pole, pak tento integrál představuje práci vykonanou silou po této dráze. Dosadíme-li za $\vec{F}$ (59), můžeme skalární součin v integrálu upravit na

$$\vec{F}.d\vec{l} = \text{grad } f . d\vec{l} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df \quad . \tag{60}$$

Tento výraz představuje totální deferenciál funkce $f(x,y,z)$ a křivkový integrál je možno vypočítat jako rozdíl hodnot funkce v koncových bodech:

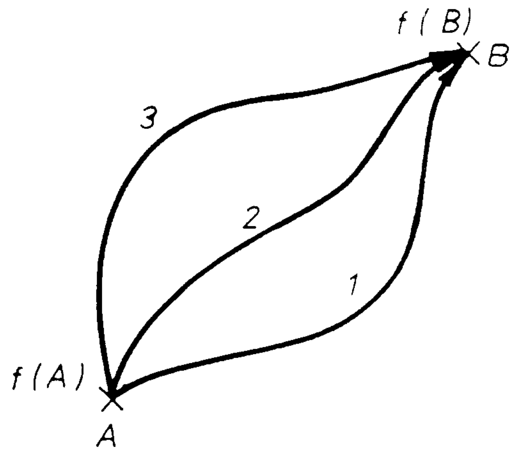
$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B df = f(B) - f(A) \tag{61}$$

Zejména odtud plyne, že výsledek nezávisí na volbě dráhy mezi body A a B (viz obr. 14). Protože při zpětné integraci od B do A mění se pouze znaménko integrálu, zjišťujeme, že cirkulace pole $\vec{F}$ s vlastností (59) podél uzavřené křivky l je vždy rovna nule:

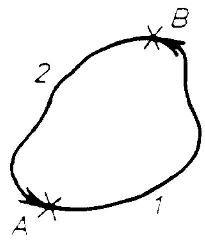
$$\oint_l \vec{F}.d\vec{l} = \oint_l \text{grad } f . d\vec{l} = 0 \tag{62}$$

(obr. 15). Ze Stokesovy věty (45) dostaneme

$$\oint_{l} \operatorname{grad} f \cdot d\vec{l} = \int_{S} (\operatorname{rot} \operatorname{grad} f) \cdot d\vec{S} = 0 \quad . \qquad (63)$$



Obr. 14



Obr. 15

Vzhledem k tomu, že volba plochy S o hranici l je zcela libovolná, musí v celém prostoru platit

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \qquad (64)$$

To je nutná a postačující podmínka k tomu, aby pole $\vec{F}$ bylo potenciální.

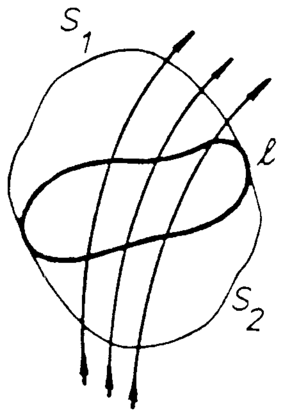
Z podmínky rot $\vec{F} = 0$ plyne i fyzikální představa o potenciálním poli. Siločáry takového pole nesmějí vytvářet víry, uzavítat se samy do sebe.

Vektorové pole, které je možno vyjádřit jako rotaci nějakého vektorového pole:

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{G} = \nabla \times \vec{G} \qquad (65)$$

se nazývá solenoidálním (bezzdrojovým). Vytvoříme uzavřenou plochu S tak, že budeme uvažovat dvě různé plochy S_1, S_2 o společné hranici l (obr. 16). Podle Stokesovy věty tok pole $\vec{F}$ s vlastností (65) uzavřenou plochou $S = S_1 + S_2$ bude nulový:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot}\,\vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \text{rot}\,\vec{G} \cdot d\vec{S}_1 - \int_{S_2} \text{rot}\,\vec{G} \cdot d\vec{S}_2 = \oint_l \vec{G} \cdot d\vec{l} - \oint_l \vec{G} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad (66)$$



Obr. 16

Aplikujeme nyní větu Gaussovu-Ostrogradského a dostaneme

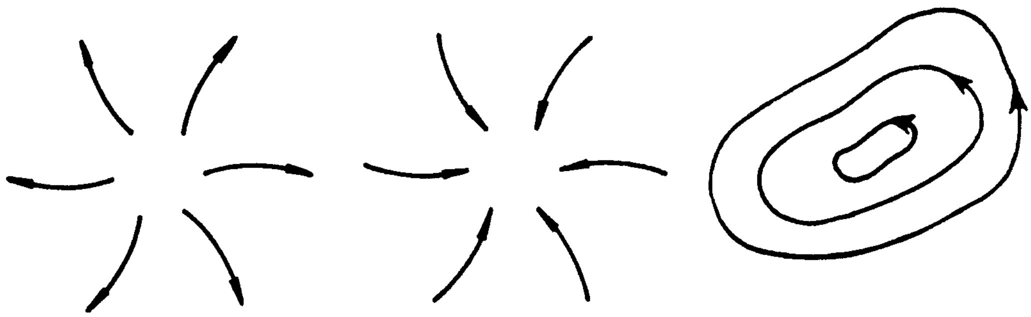
$$\oint_S \text{rot}\,\vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div rot}\,\vec{G}\,dV = 0 \quad . \qquad (67)$$

Vzhledem k tomu, že plochu S a objem V je možno volit zcela libovolně, musí v celém prostoru platit

$$\boxed{\text{div}\,\vec{F} = \text{div rot}\,\vec{G} = 0} \qquad (68)$$

To je nutná a postačující podmínka k tomu, aby pole $\vec{F}$ bylo solenoidální. Odtud plyne i fyzikální představa o solenoidálním poli. Siločáry takového pole nesmějí mít nikde v prostoru zdroje (v kladném nebo záporném smyslu).

Obecné vektorové pole samozřejmě nemusí být ani potenciální ani solenoidální a bude mít div $\vec{F} \neq 0$, rot $\vec{F} \neq 0$. Lze však dokázat, že každé vektorové pole, které dostatečně rychle klesá v nekonečnu, může být jednoznačným způsobem rozloženo na součet potenciálního a solenoidálního pole. Na obr. 17 je orientačně znázorněn charakter průběhu siločar potenciálního pole s kladnými a zápornými zdroji a pole solenoidálního.



Obr. 17

j) NĚKTERÉ INTEGRÁLNÍ VĚTY VEKTOROVÉ ANALÝZY

Upravíme Gaussovu-Ostrogradského větu tak, že položíme $\vec{F} = f_1 \operatorname{grad} f_2$ a použijeme vztahů (37). Tak dostaneme první Greenovu větu:

$$\boxed{\oint f_1 \operatorname{grad} f_2 \cdot d\vec{S} = \int_V (f_1 \Delta f_2 + \operatorname{grad} f_1 \operatorname{grad} f_2)\, dV} \quad . \tag{69}$$

Z ní snadnými úpravami vyplyne druhá Greenova věta:

$$\boxed{\oint_S (f_1 \operatorname{grad} f_2 - f_2 \operatorname{grad} f_1) \cdot d\vec{S} = \int_V (f_1 \Delta f_2 - f_2 \Delta f_1)\, dV .} \tag{70}$$

a třetí Greenova věta

$$\boxed{\oint_S \operatorname{grad} f \cdot d\vec{S} = \int_V \Delta f \, dV} \quad . \tag{71}$$

Důležité jsou zvláštní případy takzvané zobecněné Gaussovy-Ostrogradského věty, kterou vychom mohli formulovat takto: objemový integrál, v němž operátor nabla působí nějakým způsobem na následující vektorová a skalární pole, se rovná příslušnému plošnému integrálu, v němž stejným způsobem vystupuje vektor elementu plochy $d\vec{S}$. Shrneme dosud známé zvláštní případy této věty a uvedeme některé další:

$$
\boxed{\begin{aligned}
\int_V \nabla f \, dV &= \oint_S f \, d\vec{S} \\
\int_V \nabla . \vec{F} \, dV &= \oint_S \vec{F} . d\vec{S} \\
\int_V \nabla \times \vec{F} \, dV &= \oint_S d\vec{S} \times \vec{F}
\end{aligned}} \qquad (72)
$$

Poslední z těchto vět dokážeme standardním postupem. Vynásobíme integrál na levé straně skalárně konstantním vektorem $\vec{C}$, použijeme výraz pro divergenci vektorového součinu a nakonec opět vektor $\vec{C}$ vykrátíme:

$$
\vec{C} . \int_V \mathrm{rot}\, \vec{F} dV = \int_V \vec{C} . \mathrm{rot}\, \vec{F} dV = \int_V \mathrm{div}(\vec{F} \times \vec{C}) \, dV = \oint_S (\vec{F} \times \vec{C}) . d\vec{S} = - \vec{C} . \oint_S \vec{F} \times d\vec{S} =
$$

$$
= \vec{C} . \oint_S d\vec{S} \times \vec{F} \quad .
$$

Analogicky můžeme dokázat i první z vět (72)

Nakonec uvedeme ještě větu o křivkovém integrálu skalárního pole:

$$
\boxed{\oint_l f \, d\vec{l} = \int_S d\vec{S} \times \mathrm{grad}\, f} \quad . \qquad (73)
$$

Také důkaz této věty lze provést vynásobením pomocným vektorem $\vec{C}$ a použitím Stokesovy věty.

k) <u>ÚLOHY</u>

1. Sestavte si tabulku hlavních vzorců a vět vektorové analýzy.

2. Určete divergenci a rotaci následujících vektorových polí: a) $\vec{F} \equiv (x+y,\ -x+y,\ -2z)$; b) $\vec{F} \equiv (2y,\ 2x+3z,\ 3y)$; c) $\vec{F} \equiv (x^2-z^2,\ 2,\ 2xz)$. Je-li rot $\vec{F} = 0$, najděte skalární pole takové, aby $\vec{F} = \operatorname{grad} \varphi$. [$0,(0,0,-2)$; $0,(0,0,0), 2xy+3zy$; $4x,(0,-4z,0)$].

3. Určete gradient následujících skalárních polí ($\vec{r}$ je rádiusvektor): a) r, b) r^2, c) r^3, d) $\frac{1}{r}$, e) $\frac{1}{r^2}$, f) $\frac{1}{r^3}$, g) $\vec{c}\,.\,\vec{r}$, h) $\frac{\vec{c}\,.\,\vec{r}}{r}$, i) $\frac{\vec{c}\,.\,\vec{r}}{r^2}$, j) $\frac{\vec{c}\,.\,\vec{r}}{r^3}$.
[$\frac{\vec{r}}{r}$, $2\vec{r}$, $3r\vec{r}$, $\frac{-\vec{r}}{r^3}$, $\frac{-2\vec{r}}{r^4}$, $\frac{-3\vec{r}}{r^5}$, $\vec{c}$, $\frac{r^2\vec{c}-(\vec{c}\,.\,\vec{r})\,r^2}{r^3}$, $\frac{r^2\vec{c}-2(\vec{c}\,.\,\vec{r})\,\vec{r}}{r^4}$, $\frac{r^2\vec{c}-2(\vec{c}\,.\,\vec{r})\,\vec{r}}{r^5}$; zde i v následujících příkladech řešení s podmínkou $r \neq 0$, pokud výrazy při $r \to 0$ neomezeně rostou.]

4. Určete divergenci a rotaci následujících vektorových polí: a) $\vec{r}$, b) $\frac{\vec{r}}{r}$, c) $\frac{\vec{r}}{r^2}$, d) $\frac{\vec{r}}{r^3}$, e) $\frac{\vec{c}}{r}$.
[$3,0$; $\frac{2}{r},0$; $\frac{1}{r^2},0$; $0,0$; $-\frac{\vec{c}\,.\,\vec{r}}{r^3}$, $\frac{\vec{c}\times\vec{r}}{r^3}$. Všimněme si zejména příkladu d), který odpovídá Coulombově poli bodového náboje, umístěného v počátku souřadnic. Toto pole má všude kromě počátku div $\vec{F} = 0$ v souladu s Poissonovou rovnicí. Naproti tomu lze dokázat i opačně, že jediné pole, které vyhoví této podmínce je právě pole Coulombovo. Rozložíme-li totiž obecné pole $\vec{F}$ do mocninné řady se zápornými exponenty (pole neomezeně roste při $r \neq 0$) a najdeme divergenci obecného členu této řady:

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^\alpha} = \frac{\operatorname{div} \vec{r}}{r^\alpha} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r^\alpha} = \frac{3-\alpha}{r^\alpha} = 0$$, zjistíme, že jediný nenulový člen této řady odpovídá $\alpha = 3$, tedy právě Coulombově poli.]

Literatura :

[1] J.Kvasnica, A.Havránek, P.Lukáč, B.Sprušil: Mechanika, Academia, Praha 1988.

[2] K.Rektorys: Přehled užité matematiky, SNTL, Praha 1963.

UČEBNÍ TEXTY ZÁKLADNÍ VÝUKY FYZIKY
Svazek 3.
Přehled vektorové analýzy
Doc. Ing. Ivan Štoll, CSc.
Doc. RNDr. Bedřich Sedlák, CSc.
Schváleno 7.12.1987
Vydala matematicko-fyzikální fakulta UK
Praha 1987
Náklad: 350 výtisků
Vydání: I.
Neprodejné
Vydalo Reprografické středisko matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze