TOPOLOGIE

X je normovaný prostor, $S, T \subset X$, $S, T \neq \emptyset$. Rozhodněte, jestli následující tvrzení platí nebo ne, dokažte nebo uveďte protipříklad:

- $A \in S^\circ \quad \Rightarrow \quad A \notin S$
- $S \subset T \quad \Rightarrow \quad \partial S \subset \partial T$
- $S \subset T \quad \Rightarrow \quad S^\circ \subset T^\circ$
- $S \subset T \quad \Rightarrow \quad \bar{S} \subset \bar{T}$
- $S^\circ \cap \bar{S} = \emptyset$
- S je otevřená v $X \quad \Leftrightarrow \quad \partial S \cap S = \emptyset$
- S je otevřená v $X \quad \Leftrightarrow \quad \partial S \cap \bar{S} = \emptyset$
- S je uzavřená v $X \quad \Leftrightarrow \quad \partial S \cap S = \emptyset$
- S je uzavřená v $X \quad \Leftrightarrow \quad \partial S \cap \bar{S} = \emptyset$
- $\partial S = \partial(X - S)$
- $S \cap S^\circ = S^\circ$
- $S \cap \bar{S} = S$
- $\partial(S^\circ) = \partial S$
- S je otevřená v $X \quad \Leftrightarrow \quad \partial S = \emptyset$
- $A \notin \bar{S} \quad \Rightarrow \quad A \notin S^\circ$
- $(\bar{S})^\circ = S$
- $\partial \bar{S} = \partial S$
- $S^\circ = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \partial S = \emptyset$
- S je otevřená v $X \quad \Rightarrow \quad S$ není uzavřená v X
- $A \in \bar{S} \quad \Rightarrow \quad A$ hromadný bod S
- $A \in \bar{S}$, $A \notin S^\circ \quad \Rightarrow \quad A \in \partial S$
- S souvislá $\quad \Rightarrow \quad S$ konvexní
- S úplná $\quad \Rightarrow \quad S$ konvexní
- S kompaktní $\quad \Rightarrow \quad S$ separabilní
- S souvislá $\quad \Rightarrow \quad X - S$ souvislá
- S kompaktní $\quad \Rightarrow \quad S$ souvislá

LINEÁRNÍ FORMY A OPERÁTORY

Označme

$C(\langle 0;1\rangle)$ funkce definované a spojité na $\langle 0;1\rangle$

$C_\circ(\langle 0;1\rangle)$ funkce f definované a spojité na $\langle 0;1\rangle$, pro něž $f(0) = f(1) = 0$

$P(\langle 0;1\rangle)$ polynomy uvažované na $\langle 0;1\rangle$

$P_\circ(\langle 0;1\rangle)$ polynomy f uvažované na $\langle 0;1\rangle$, pro něž $f(0) = f(1) = 0$

$P^n(\langle 0;1\rangle)$ polynomy stupně n uvažované na $\langle 0;1\rangle$

$P^n_\circ(\langle 0;1\rangle)$ polynomy f stupně n uvažované na $\langle 0;1\rangle$, pro něž $f(0) = f(1) = 0$

a dále

$$\|f\|_C = \sup_{x \in \langle 0;1\rangle} |f(x)| \qquad \|f\|_L = \int_0^1 |f(x)|\, dx \ .$$

Rozhodněte, jestli jsou následující formy φ a zobrazení Φ lineární, surjektivní, injektivní, spojitá a vypočítejte normu $\|\varphi\|$ nebo $\|\Phi\|$:

- $\varphi:\ C(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C \ \longrightarrow\ \mathbf{R}:\ f\ \mapsto\ \int_0^1 f(x)\,dx$
- $\varphi:\ C(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_L \ \longrightarrow\ \mathbf{R}:\ f\ \mapsto\ \int_0^1 f(x)\,dx$
- $\varphi:\ P_\circ(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C \ \longrightarrow\ \mathbf{R}:\ f\ \mapsto\ \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$
- $\varphi:\ P_\circ^2(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_L \ \longrightarrow\ \mathbf{R}:\ f\ \mapsto\ \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$
- $\varphi:\ C(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C \ \longrightarrow\ \mathbf{R}:\ f\ \mapsto\ f(\frac{1}{2})$
- $\varphi:\ C(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_L \ \longrightarrow\ \mathbf{R}:\ f\ \mapsto\ f(\frac{1}{2})$
- $\varphi:\ P_\circ^2(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C \ \longrightarrow\ \mathbf{R}:\ f\ \mapsto\ f(\frac{1}{2})$
- $\varphi:\ P_\circ^2(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_L \ \longrightarrow\ \mathbf{R}:\ f\ \mapsto\ f(\frac{1}{2})$
- $\varphi:\ P(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C \ \longrightarrow\ \mathbf{R}:\ f\ \mapsto\ \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(x))^2\,dx$
- $\varphi:\ P(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_L \ \longrightarrow\ \mathbf{R}:\ f\ \mapsto\ \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(x))^2\,dx$
- $\Phi:\ C(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C \ \longrightarrow\ C(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C:\ f\ \mapsto\ \Phi f(x) = \int_0^x t f(t)\,dx$
- $\Phi:\ C(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_L \ \longrightarrow\ C(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_L:\ f\ \mapsto\ \Phi f(x) = \int_0^x t f(t)\,dx$
- $\Phi:\ P(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C \ \longrightarrow\ P(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C:\ f\ \mapsto\ f'$
- $\Phi:\ P(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_L \ \longrightarrow\ P(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_L:\ f\ \mapsto\ \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 f'(x)\,dx\right)^2\right)$
- $\Phi:\ P(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C \ \longrightarrow\ P(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C:\ f\ \mapsto$ řešení rovnice $y' = y\cdot f(x)$ s podmínkou $y(0) = 1$
- $\Phi:\ P^1(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_C \ \longrightarrow\ \mathbf{R}^2:\ f\ \mapsto\ (f(0); f'(0))$, zjistěte Φ^{-1}
- $\Phi:\ P^1(\langle 0;1\rangle), \|\cdot\|_L \ \longrightarrow\ \mathbf{R}^2:\ f\ \mapsto\ (f(0); f'(0))$, zjistěte Φ^{-1}

ORTONORMALITA

- Zjistěte ortonormální množinu složenou z polynomů na intervalu $\langle 0;1\rangle$ - tzv. Čebyševovy polynomy.
- Ortogonalizujte funkce 1, x a x^2 na intervalu $\langle 0;1\rangle$.
- Ortogonalizujte funkce 1, $\sin x$ a $\cos x$ na intervalu $\langle -\pi;\pi\rangle$.
- Zjistěte ortogonální projekci funkce x^3 do prostoru funkcí

$$\{1,\ 2x-1,\ 6x^2-6x+1\}\ .$$

- Zjistěte ortogonální projekci funkce $\sin(2x)$ do prostoru funkcí

$$\{1,\ \sin x,\ \cos x\}\ .$$