DUALITA

• duální prostor

$X^\star$ slabá topologie $w^\star$: báze okolí $\frac{1}{k}K^\circ$ K konečné

silná topologie $s^\star$: báze okolí $\frac{1}{k}M^\circ$ M omezené

$$M^\circ = \{\varphi \in X^\sharp; \forall \quad x \in M |\varphi(x)| \leq 1\}$$

norma

$$\|\varphi\|_\star = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\varphi(x)\|$$

$\varphi_n \to \varphi$ ve $w^\star$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X \quad \varphi_n(x) \to \varphi(x)$

$\varphi_n \to \varphi$ v $s^\star$ $\Leftrightarrow$ $\|\varphi_n - \varphi\|_\star \to 0$

$x_n \to x$ ve w $\Leftrightarrow$ $\forall \varphi \in X^\star \quad \varphi_n(x) \to \varphi(x)$

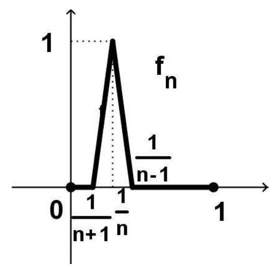
• Hahn-Banachova věta:

(důsledek) věta o tečně: $\forall x \in X \quad \exists \varphi \in X^\star \qquad \|\varphi\|_\star = 1 \quad \varphi(x) = \|x\|$

vyjádření normy pomocí duálu

$$\|x\| = \sup_{\|\varphi\|_\star \leq 1} \|\varphi(x)\|$$

úkoly:posloupnost $f_n \in C(0;1)$ konverguje k $f = 0$ slabě a nikoli silně



• reflexivita

$\epsilon_x : X^\star \to \mathbf{R} : \varphi \mapsto \varphi(x)$ tedy $\epsilon_x(\varphi) = \varphi(x)$ ϵ_x je lineární forma na $X^\star$ neboli $\epsilon_x \in X^{\star\star}$

$\epsilon : X \to X^{\star\star}$

X je reflexivní $\Leftrightarrow$ $\epsilon X = X^{\star\star}$

$\forall \varphi \in X^\star \quad \exists x \in X \|x\| \leq 1 \quad \|\varphi\| = |\varphi(x)|$ (James)

$\forall$ omezená $x_n \in X$ $\exists$ vybraná $x_{n_k} \to x$ slabě ve w (Eberlein-Šmuljan)

(důsledek HB) $x \notin M$ uzavřený podprostor $\Rightarrow$ $\exists \varphi \in X^\star \quad \|\varphi\| = 1 \quad \varphi(M) = 0 \quad \varphi(x) > 0$

(věta o skoro kolmici) M uzavřený podprostor $\epsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\exists x_\epsilon \in X \quad \|x_\epsilon\| = 1 \quad \mathrm{diam}(x_\epsilon, M) \geq 1 - \epsilon$

(Rieszova věta o kolmici) X je reflexivní M uzavřený podprostor $\Rightarrow$ $\exists x \in X \quad \|x\| = 1 \quad \mathrm{diam}(x, M) = 1$

úkoly:promyslete vlastnosti následujících lineárních forem

$L : C(0;1), f(0) = 0 \to \mathbf{R} : f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ (nenabývá normy)

$f_n = \sqrt[n]{x} \qquad \|f_n\| = 1 \quad |Lf_n| = \frac{n}{n+1} \to 1$

$L : L^1(0;1) \to \mathbf{R} : f \mapsto \int_0^1 xf(x)dx$