

1. Z tvaru dané rovnice ihned plyne, že $x > y \geq 0$ (neboť $6\sqrt{5} - 10 > 0$). Pro taková x, y můžeme umocnit obě (kladné) strany rovnice na druhou a provést další ekvivalentní úpravy:

$$\begin{aligned}x\sqrt{5} - 2\sqrt{5xy} + y\sqrt{5} &= 6\sqrt{5} - 10, \\x - 2\sqrt{xy} + y &= 6 - 2\sqrt{5}, \\x + y - 6 &= 2(\sqrt{xy} - \sqrt{5}).\end{aligned}\tag{1}$$

Umocněním a další úpravou dostaneme, že pro hledaná celá čísla x, y musí platit

$$\begin{aligned}(x + y - 6)^2 &= 4(xy - 2\sqrt{5xy} + 5), \\8\sqrt{5xy} &= 4(xy + 5) - (x + y - 6)^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Z poslední rovnice plyne, že hodnota $\sqrt{5xy}$ je racionální, a tedy celé číslo,¹ takže $5xy$ je druhá mocnina nezáporného celého čísla, jež je zřejmě dělitelné pěti.² Platí tedy $5xy = (5k)^2$ neboli $xy = 5k^2$, kde k je nezáporné celé číslo. Už teď je výhodné dosadit ne do rovnice (2), ale rovnou do rovnice (1). Dostaneme totiž rovnici

$$x + y - 6 = 2(\sqrt{5k^2} - \sqrt{5}) \quad \text{neboli} \quad x + y - 6 = 2(k - 1)\sqrt{5},$$

odkud díky iracionalitě čísla $\sqrt{5}$ vyplývá, že ke splnění rovnice (1) je nutné a stačí, aby platily obě rovnosti $k = 1$ a $x + y - 6 = 0$. Ze soustavy rovnic

$$xy = 5k = 5, \quad x + y = 6$$

snadno zjistíme, že $\{x, y\} = \{5, 1\}$, tedy $x = 5$ a $y = 1$, neboť $x > y$ podle úvodní úvahy.

Hledaná dvojice (x, y) je jediná, a to $(x, y) = (5, 1)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za první a 2 body za druhé z obou umocnění. Známé poznatky o druhých odmocninách a mocninách uvedené v obou poznámkách pod čarou mohou řešitelé užít přímo, aniž je formulují (či dokonce dokazují) jako pravidla (tj. v obecné podobě). Pokud v jinak úplném řešení není vyloučena dvojice $(x, y) = (1, 5)$ nebo není zmíněna podmínka $x > y$ a chybí zkouška při důsledkové úpravě umocněním (která v předvedeném řešení není potřeba), udělte jen 5 bodů.

2. Označme P, Q, R vrcholy vzniklého trojúhelníku. Protože každá z os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 je kolmá na odpovídající stranu trojúhelníku ABC , svírají každé dvě ze stran trojúhelníku PQR úhel 60 stupňů, takže se jedná o rovnostranný trojúhelník (obr.).

¹ Druhá odmocnina nezáporného celého čísla je buď číslo celé, nebo číslo iracionální.

² Je-li n celé a n^2 je dělitelné pěti, je i n dělitelné pěti.