1. První rovnice je splněna, právě když platí $x = y+p$ nebo $x = y-p$. Po dosazení do druhé rovnice dané soustavy dostaneme po úpravě v prvním případě kvadratickou rovnici

$$3py^2 + 3p^2y + p^3 - 16 = 0,$$

v druhém případě pak kvadratickou rovnici

$$3py^2 - 3p^2y + p^3 + 16 = 0$$

o neznámé y. Daná soustava rovnic bude mít právě jedno řešení v oboru reálných čísel, právě když jedna ze dvou předešlých kvadratických rovnic bude mít jediný (dvojnásobný) kořen a druhá z nich nebude mít žádný reálný kořen nebo bude mít stejný dvojnásobný kořen jako rovnice první (můžeme předpokládat, že $p \neq 0$, protože pro $p = 0$ daná soustava zřejmě nemá řešení). První kvadratická rovnice má diskriminant $D_1 = 3p(64 - p^3)$, druhá má diskriminant $D_2 = -3p(64 + p^3)$. Hledáme tedy ta $p \neq 0$, pro něž je jedno z čísel D_1, D_2 rovno nule a druhé záporné (případ $D_1 = D_2 = 0$ pro $p \neq 0$ totiž nenastane).

Je-li $D_1 = 0$, je $p = 4$ a $D_2 < 0$. Pokud $D_2 = 0$, je $p = -4$ a $D_1 < 0$. Hodnoty $p = 4$ a $p = -4$ jsou tedy jediné, které mají požadovanou vlastnost.

Daná soustava rovnic má přitom pro obě uvedené hodnoty parametru p jediné reálné řešení $(x, y) = (2, -2)$.

Jiné řešení. Z první rovnice máme $|x - y| = |p|$, z druhé rovnice však vidíme, že $x^3 > y^3$, což je ekvivalentní s nerovností $x > y$ (je $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ a $x^2 + xy + y^2 > 0$ pro libovolná reálná x, y s výjimkou případu $x = y = 0$). Je tedy $x = y + |p|$, $|p| > 0$. Po dosazení do druhé rovnice soustavy (pro jednoduchost pišme q místo $|p|$) dostaneme pro y kvadratickou rovnici

$$3qy^2 + 3q^2y + q^3 - 16 = 0$$

s diskriminantem $D(q) = 3q(64-q^3) = 3q(4-q)(16+4q+q^2)$. Má-li daná soustava v oboru reálných čísel jediné řešení, je nutně diskriminant $D(q)$ předešlé rovnice roven 0, tj. musí platit $(4 - q)(16 + 4q + q^2) = 0$ (víme, že $q = |p| > 0$). Protože pro libovolné reálné q je $16 + 4q + q^2 > 0$, musí být $q = |p| = 4$, tj. $p = 4$ nebo $p = -4$. Zároveň hned dostáváme, že $y = -\frac{1}{2}q = -2$ a $x = y + 4 = 2$.

Daná soustava rovnic má právě jedno reálné řešení, právě když $p = 4$ nebo $p = -4$, a to $(x, y) = (2, -2)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V případě postupu analogického 1. řešení strhněte 2 body, není-li ověřeno, že druhá kvadratická rovnice nemá žádné řešení.

2. Z rovnosti obsahů trojúhelníků AMU a KCU plyne rovnost obsahů trojúhelníků AMC a AKC. Body K, M mají tedy stejnou vzdálenost od přímky AC. Odtud plyne, že $CA \parallel MK$ a čtyřúhelník $CAMK$ je tedy lichoběžník. Podobně dokážeme, že čtyřúhelník $BCLM$ je rovněž lichoběžník, kde $BC \parallel LM$. Trojúhelníky AML a ABC, resp. BKM a BCA jsou tedy stejnolehlé a platí (obr. 1)

$$|AL| = kb,\ |AM| = kc,\ |BM| = (1-k)c,\ |BK| = (1-k)a$$

a dále

$$|CK| = ka,\ |CL| = (1-k)b, \quad \text{kde } k \in (0; 1).$$