Automaty a gramatiky

Převzato po předchůdcích R. Barták, P. Surynek, mírně upraveno M. Vomlelová.

1 Konečné automaty - úvod

1. Navrhněte konečné automaty na počítání symbolů ve slovech. Pro popis automatů použijte ohodnocený graf (stavový diagram) nebo tabulku.
   (a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k\}$
   (b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 2k\}$
   (c) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ [(\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \vee (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 2\ell]\}$
   (d) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \ \& \ (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 2\ell\}$
   (e) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ [(\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \vee (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_b = 2\ell]\}$
   (f) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \ \& \ (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_b = 2\ell\}$
   (g) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \ \& \ (\forall \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_b \neq 2\ell\}$

2. Navrhněte konečné automaty, které přijímají slova obsahující určité podslovo:
   (a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u \in \{a,b\}^*)w = abba.u\}$ Jazyk obsahuje slova, která začínají *abba*.
   (b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u \in \{a,b\}^*)w = u.abba\}$ Jazyk obsahuje slova, která končí *abba*.
   (c) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u, v \in \{a,b\}^*)w = u.abba.v\}$ Jazyk obsahuje slova, v nichž se vyskytuje podslovo *abba*.
   (d) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u \in \{a,b\}^*)w = u.ab \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w| = 3k+1\}$
   (e) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ [(\exists u \in \{a,b\}^*)w = u.ab \ \vee \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w| = 3k+1]\}$.

3. Navrhněte konečné automaty, které přijímají slova, u nichž začátek souvisí s koncem:
   (a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u, v \in \{a,b\}^*)(|u| = 1 \ \& \ w = u.v.u\}$. Jazyk obsahuje slova, která mají délku aspoň 2 a začínají a končí stejným symbolem.
   (b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u, v \in \{a,b\}^*)(|u| = 2 \ \& \ w = u.v.u\}$. Jazyk obsahuje slova, která mají délku aspoň 4 a začínají a končí stejnou (uspořádanou) dvojicí symbolů.
   (c) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u, v, z \in \{a,b\}^*)(|u| = 2 \ \& \ w = u.v \ \& \ w = z.u)\}$. Jazyk obsahuje slova, která začínají a končí stejnou (uspořádanou) dvojicí symbolů.
   (d) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u, v, z \in \{a,b\}^*)(|u| = 2 \ \& \ |z| = 2 \ \& \ w = u.v.z \ \& \ u \neq z)\}$. Jazyk obsahuje slova, která mají délku aspoň 4 a začínají a končí různými (uspořádanými) dvojicemi symbolů.

4. Vyjádřete množinově (jako v předchozích úlohách) jazyky, které jsou přijímány následujícími automaty popsanými tabulkou:

(a)

	0	1
$\rightarrow^*$ p	q	p
q	r	q
r	p	r

(c)

	0	1
$\rightarrow$ p	p	q
q	p	r
* r	p	r

(b)

	0	1
$\rightarrow$ p	q	p
* q	r	q
* r	p	r

(d)

	0	1
$\rightarrow$ p	p	q
* q	r	q
* r	p	q

5. Nechť posloupnost kóduje průběh tenisového zápasu. Z hlediska prvního hráče nechť 1 znamená získání bodu, nechť 0 znamená získání bodu protihráčem. Navrhněte konečný automat, který přijímá posloupnost 0,1 kódující hru, právě když kód odpovídá výhře prvního hráče. (stačí jeden game).

2 Regulární jazyky, ekvivalentní stavy DFA

1. Rozhodněte, zda jsou následující jazyky regulární:

   (a) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

   (b) $L = \{ww \mid w \in \{a\}^*\}$

   (c) $L = \{a^i b^j \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (d) $L = \{a^i a^i b^j \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (e) $L = \{a^i b^j a^i \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (f) $L = \{a^i b^i a^j \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (g) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (h) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

   (i) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^* \ \& \ |w|_a = |w|_b\}$

   (j) $L = \{a^{2i} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (k) $L = \{a^{i^2} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (l) $L = \{a^{3i} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (m) $L = \{a^{i^3} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (n) $L = \{a^{3^i} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (o) $L = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo}\}$

2. Najděte ekvivalentní stavy v následujících konečných automatech:

(a)

	a	b
→* 0	0	5
1	1	3
2	2	7
3	3	2
* 4	4	1
5	5	1
* 6	6	2
7	7	0

(b)

	a	b
A	A	F
B	B	A
C	C	D
D	D	B
E	E	C
→* F	F	E

(c)

	a	b
→ 1	2	3
2	2	4
* 3	3	5
4	2	7
* 5	6	3
* 6	6	6
7	7	4
8	2	3
9	9	4

(d)

	a	b
A	H	G
B	B	A
C	E	D
D	D	B
E	C	D
F	F	E
G	G	F
→* H	A	G

(e)

	a	b
→* 0	1	2
1	3	0
2	4	5
3	0	2
4	2	5
5	0	3

(f)

	a	b
→ 0	1	2
1	0	3
2	4	1
3	0	1
* 4	2	2
5	4	3

3 Ekvivalentní (ne)deterministické konečné automaty

1. Rozhodněte, zda jsou některé z následujících automatů po dvojicích ekvivalentní:

(a)

A	a	b
→* 0	0	5
1	1	3
2	2	7
3	3	2
* 4	4	1
5	5	1
* 6	6	2
7	7	0

(b)

B	a	b
A	A	F
B	B	A
C	C	D
D	D	B
E	E	C
→* F	F	E

(c)

C	a	b
→* 1	2	3
2	2	4
* 3	3	5
4	2	7
* 5	6	3
* 6	6	6
7	7	4
8	2	3
9	9	4

(d)

D	a	b
A	H	G
B	B	A
C	E	D
D	D	B
E	C	D
F	F	E
G	G	F
→* H	A	G

2. K nedeterministickému automatu **E** sestrojte ekvivalentní deterministický konečný automat. Výsledný FA zredukujte.

E	a	b	λ
$\to q_0$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{A, C\}$
*A	{A,C}	{B}	$\emptyset$
B	{B,D}	$\emptyset$	$\emptyset$
*C	E	D	$\emptyset$
D	{A}	{C,D}	$\emptyset$

3. Mějme automaty A, B ze cvičení 1. Zkonstruujte nedeterministický konečný automat, který přijímá jazyk:
   (a) $L(A).L(B)$
   (b) $L(A)^*$
   (c) $L(A)^R$

   Sestrojte příslušné deterministické automaty.

4. Navrhněte dvojici konečných automatů, které jsou
   (a) redukované a neizomorfní
   (b) ekvivalentní a neizomorfní

5. Nechť A a B jsou konečné automaty pracující nad abecedou Σ. Navrhněte algoritmus, který rozhodne zda:
   (a) $L(A) = \emptyset$
   (b) $L(A) = L(B)$
   (c) $L(A) \subset L(B)$
   (d) $L(A) = \Sigma^*$
   (e) $L(A)$ je nekonečný

4 Regulární výrazy

1. Navrhněte regulání výrazy reprezentující následující jazyky nad $\Sigma = \{a, b\}$:
   (a) jazyk sestávající ze slov, která obsahují *abba* jako podslovo
   (b) jazyk sestávající ze slov, která mají prefix *abb* a sufix *bbaa*

(c) jazyk sestávající ze slov, kde počet výskytů a je dělitelný 3

(d) jazyk sestávající ze slov, která začínají a končí stejnou dvojicí symbolů

(e) jazyk sestávající ze slov, která neobsajují podslovo aa

2. Navrhněte algoritmus pro rozhodování, zda je dvojice vstupních regulárních výrazů ekvivalentní, tj. zda repezentují stejný jazyk. Algoritmus aplikujte na dvojici regulárních výrazů:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* \text{ a } \mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* + \mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*$$

3. Pro následující regulární výrazy zkonstruujte konečné automaty, které přijímají jimi reprezentované jazyky:

(a) $\mathbf{ab}+\mathbf{ba}$

(b) $\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{ab}$

(c) $\mathbf{a}+\mathbf{b}^*$

(d) $(\mathbf{ab}+\mathbf{c})^*$

(e) $((\mathbf{ab}+\mathbf{c})^+\mathbf{a}(\mathbf{bc})^*+\mathbf{b})^*$

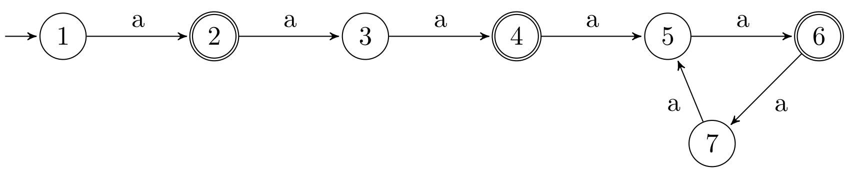
(f) $((\mathbf{ab}+\mathbf{c})^*\mathbf{a}(\mathbf{bc})^*+\mathbf{b})^*$

(g) $(\mathbf{01}^*+\mathbf{101})^*\mathbf{0}^*\mathbf{1}$

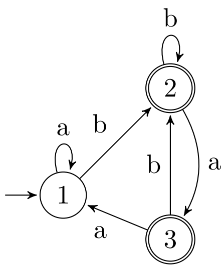
(h) $(\mathbf{01})^*\mathbf{11}(\mathbf{01})^*(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{00}$

4. Pro následující konečné automaty sestrojte regulární výrazy, které reprezentují stejný jazyk:

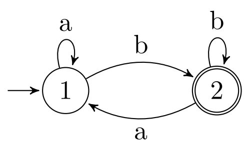
(a)



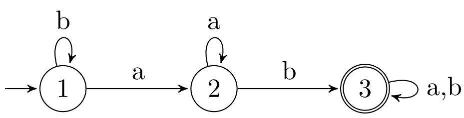
(b)



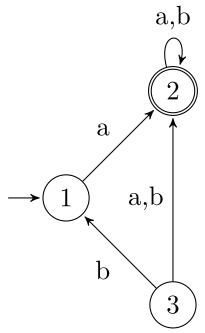
(d)



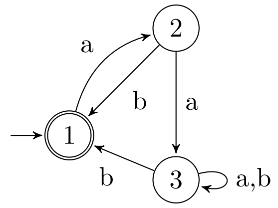
(c)



(e)



(f)



5 Dvousměrné konečné automaty

1. Nechť L je regulární jazyk. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je jazyk $K = \{w \mid \#w\$ \in L\}$ regulární.

2. Uvažujme konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Navrhněte dvousměrné automaty, které přijímají jazyky:
   (a) $L_1 = \{\#w\$ \mid ww^R \in L(A)\}$
   (b) $L_2 = \{\#w\$ \mid ww \in L(A)\}$
   (c) $L_3 = \{\#w\$ \mid (\exists v \in \Sigma^*) wv \in L(A) \& |w| = |v|\}$
   (d) $L_4 = \{\#w\$ \mid (\exists u, v \in \Sigma^*) w = uv \& uu^R v \in L(A)\}$

3. Navrhněte nedeterministický konečný automat přijímající jazyk $L_1 = \{\#w\$ \mid ww^R \in L(A)\}$. Přitom nevyužívejte znalosti dvousměrných automatů.

4. Popište princip konstrukce ekvivalentního konečného automatu k danému dvousměrnému automatu.

5. Pro jazyky L_1, L_2, L_3, L_4 navrhněte (nedeterministické) konečné automaty, které je přijímají. Při návrhu využijte znalosti dvousměrných automatů.

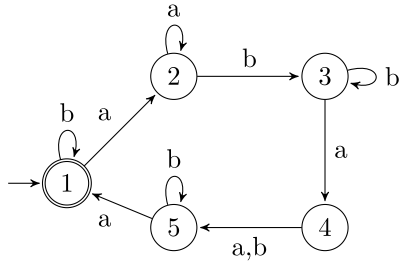
6 (Mealy, Moore)

1. Navrhněte převod mezi Mealyho a Mooreovým strojem.

2. Navrhněte Mealyho nebo Moorův stoj, který realizuje operaci:
   (a) bitového součtu bitových vektorů
   (b) bitového součinu bitových vektorů
   (c) aritmetického součtu bitových vektorů, čísla čteme odzadu.

3. Nechť $L = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_1 = 2k\}$ a $K = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_1 = 3k\}$. Jak vypadají jazyky L/K a $K \setminus L$? Sestrojte konečné automaty přijímající L/K resp. $K \setminus L$.

4. Uvažujme konečný automat A zadaný následujícím stavovým diagramem:



Sestrojte konečné automaty, které přijímají jazyky:

- $L_1 = \{w \mid (\exists u, v \in \{a,b\}^*) w = uv \;\&\; uav \in L(A)\}$
- $L_2 = \{w \mid (\exists u, v \in \{a,b\}^*) w = uv \;\&\; (uav \in L(A) \vee ubv \in L(A)\}$
- $L_3 = \{w \mid (\exists u, v \in \{a,b\}^*) w = uav \;\&\; uv \in L(A)\}$
- Uvažujme zjednodušené HTML, kde jsou k dispozici konstrukce

  <p> </p>
  <a>
  <table> </table>
  <tr> </tr>
  <td> </td>

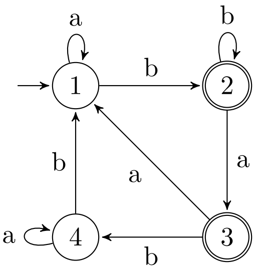
  všechny bez atributů. Využijte tvrzení o regulární substituci k rozhodnutí, zda texty ve formátu zjednodušeného HTML tvoří regulární jazyk.

7 Gramatiky úvod

1. Navrhněte gramatiky, které generují následující jazyky. Lze gramatiku zkonstruovat ve všech případech?

   (a) $L = \{ww \mid w \in \{a\}^*\}$
   (b) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   (c) $L = \{a^i b^i \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (d) $L = \{a^i b^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (e) $L = \{a^i a^i b^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (f) $L = \{a^i b^j a^i \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (g) $L = \{a^i b^i a^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (h) $L = \{a^i b^j a^k \mid i,j,k = 0,1,2,\ldots\}$
   (i) $L = \{a^i b^i c^i \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (j) $L = \{a^{2i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (k) $L = \{a^{i^2} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (l) $L = \{a^{3i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (m) $L = \{a^{i^3} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (n) $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   (o) $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k = 0,1,2,\ldots \& i \leq j \leq k\}$
   (p) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^* \& |w|_a = |w|_b\}$
   (q) správné uzávorkování, tj. stejně levých a pravých, nikdy v průběhu ne více pravých než levých; '()(())' patří do jazyka.

2. Pro následující konečný automat nalezněte ekvivalentní gramatiku. V jaké třídě Chomského hierarchie se budete pohybovat?



3. Pro následující gramatiku nalezněte ekvivalentní konečný automat. Lze to provést s libovolnou gramatikou?

   $S \to abS|babA|\lambda$
   $A \to abA|aB|bC$
   $B \to abS|B|bC|\lambda$
   $C \to aab|A|aA|\lambda$

8 Zásobníkové automaty

1. Navrhněte zásobníkové automaty pro následující jazyky (nebo zdůvodněte, proč neexistuje):
   (a) $L_1 = \{w2w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
   (b) $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
   (c) $L_3 = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \& |w|_0 = |w|_1\}$
   (d) $L_4 = \{u2v \mid u, v \in \{0,1\}^* \& |u| \neq |v|\}$
   (e) $L_i = \{u2v \mid u, v \in \{0,1\}^* \& u[i] \neq v[i]\}$
   (f) $L_5 = \{u2v \mid u, v \in \{0,1\}^* \& u \neq v\}$
   (g) $L_6 = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$
   (h) $L_7 = \{a^i b^j c^{i*j} \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$

2. Uvažujme $G_5 = (\{E, T, F\}, \{(,), *, +, , 1\}, E, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} E \to E + T|T \\ T \to T * F|F \\ F \to 1|(E) \end{array}\right\}$. Sestrojte zásobníkové automaty Z_1, Z_2 že $L(Z_1) = L(G)$ a $N(Z_2) = L(G)$.

3. Zásobníkové automaty z úlohy 1 převeďte na bezkontextové gramatiky.

9 Redukce a normální formy gramatik

1. Zredukujte následující gramatiky. U jakého typu gramatik provádíme redukci?
   (a) $G_1 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to abS|babA|\lambda \\ A \to abA|aB|bC \\ B \to abS|B|bC|\lambda \\ C \to aab|A|aA|\lambda \end{array}\right\}$
   (b) $G_2 = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b, c\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to aA|bB|aSa|bSb|\lambda \\ A \to bCD|Dba \\ B \to bB|AC \\ C \to aA|AC \\ D \to DE \\ E \to \lambda \end{array}\right\}$

2. Následující bezkontextovou gramatiku převeďte do Chomského a Greibachové normální formy. Pokuste se sestrojit LL(1) analyzátor pro jazyky generované danými gramatikami.
   (a) $G_3 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to A|0SA|\lambda \\ A \to 1A|1|B1 \\ B \to 0B|0|\lambda \end{array}\right\}$
   (b) $G_4 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to 0A10B10 \\ A \to 1A0|\lambda \\ B \to 1B00|\lambda \end{array}\right\}$
   (c) $G_5 = (\{S, E, F\}, \{(,), *, +, , 1\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to (E) \\ E \to F + F|F * F \\ F \to S|1 \end{array}\right\}$

3. Rozhodněte, zda jsou následující jazyky bezkontextové.
   (a) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
   (b) $L = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$
   (c) $L = \{a^i b^j a^i \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$
   (d) $L = \{a^i b^j a^k \mid i, j, k = 0, 1, 2, \ldots\}$

(e) $L = \{a^i b^i c^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

(f) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k = 0, 1, 2, \ldots \& i \leq j \leq k\}$

(g) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

(h) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^* \& |w|_a = |w|_b\}$

(i) $L = \{a^{i^2} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

(j) $L = \{a^{i^2+i+1} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

(k) $L = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo } \}$

4. Dokažte následující variantu pumping lemmatu pro bezkontextové jazyky: jazyk L nad Σ je bezkontextový, pak existuje $n \in \mathbb{N}$, že

$$\forall z \in L\, |z| \geq n \Rightarrow (\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*) \left[u.v.w.x.y = z \ \& \ |vwx| \leq n \ \& \ vx \neq \lambda \ \& \ (\forall i \in \mathbb{N}_0) u.v^i.w.x^i.y \in L\right]$$

Cvičení 10

1. Jaký jazyk generuje gramatika G? Je gramatika kontextová? Nalezněte ekvivalentní kontextovou gramatiku. $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to aSBC|aBC \\ B \to BBC \\ C \to CC \\ CB \to BC \\ aB \to ab \\ bB \to bb \\ bC \to bc \\ cC \to cc \end{array}\right\}$.

2. Uvažujme bezkontextovou gramatiku G_2. Rozhodněte, zda je slovo *abcbb* generováno gramatikou G_2. K rozhodnutí použijte algoritmus CYK. $G_2 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to CA|CB \\ B \to CBA|CB|BA|BB \\ C \to ABC|BC \\ A \to a \\ B \to b \\ C \to c \end{array}\right\}$.

3. Najděte podmínky, podle kterých leze určit, zda je jazyk generovaný danou bezkontextovou gramatikou nekonečný. Instpirujte se pumping lemmatem pro bezkontextové jazyky.

4. Nechť $b \in \mathbb{N}$. Navrhněte gramatiku, která generuje jazyk $L = \{u\#v\#w | u, v, w \in (0, 1, \ldots, (b-1))^* \ \& \ u_b \circ v_b = w_b\}$, u_b kde značí interpretaci slova u jako čísla v soustavě o základu b (tj. například $0101_2 = 5$) a $\circ$ nějakou binární aritmetickou operaci.

   (a) $\circ$ je +

   (b) $\circ$ je -

   (c) $\circ$ je *

   (d) $\circ$ je div (celočíselné dělení)

   (e) $\circ$ je mod (zbytek po celočíselném dělení)

5. Nechť $b \in \mathbb{N}$. Navrhněte gramatiky, které generují jazyky:

   (a) $L = \{w | w \in (0, 1, \ldots, (b-1))^* \ \& \ w_b \text{ je složené číslo}\}$

   (b) $L = \{w | w \in (0, 1, \ldots, (b-1))^* \ \& \ w_b \text{ je prvočíslo}\}$

Cvičení 11

1. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, který ze zadaného vstupního slova vytvoří jeho zrcadlový obraz. Přesněji, počáteční konfiguraci (λ, q_0, w) převede na (λ, f, w^R), kde $f \in F$.

2. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, který prohodí obsah dvou paměťových bloků, přičemž paměť je představována páskou. Počáteční konfiguraci $(\lambda, q_0, u\#v\#w\#x\#y)$, kde $u, v, w, x, y \in (\Sigma \setminus \#)^*$ převede na $(\lambda, f, u\#x\#w\#v\#y)$, kde $f \in F$. Vynasnažte se, aby využíval co nejméně dalšího prostoru na pásce a co nejméně stavů.

3. Naprogramujte na Turingově stroji *a*sociativní paměť. Například můžete předpokládat Turingův stroj se dvěma páskami, kde první slouží k dotazování a odpovídání, a druhá reprezentuje obsah paměti. Na první pásce lze položit dotaz: k, kde $k \in (\Sigma \setminus \#)^*$ je klíč, přičemž jako odpověď na první pásce očekáváme data asociované s klíčem k. Dotazem $k\#w$, kde $k, v \in (\Sigma \setminus \#)^*$ jsou po řadě klíč a data, vložíme do paměti asociaci klíče k s daty w. Vstupní páska je v tomto případě smazána, pokud klíč v paměti ještě není reprezentován, jinak je ponechána beze změny.

4. Nechť $b \in \mathbb{N}$. Navrhněte **Turingův stroj**, který přijímá jazyk $L = \{u\#v\#w | u, v, w \in (0, 1, \ldots, (b-1))^* \ \& \ u_b \circ v_b = w_b\}$, u_b kde značí interpretaci slova u jako čísla v soustavě o základu b (tj. například $0101_2 = 5$) a $\circ$ nějakou binární aritmetickou operaci.

   (a) $\circ$ je +
   (b) $\circ$ je -
   (c) $\circ$ je *
   (d) $\circ$ je div (celočíselné dělení)
   (e) $\circ$ je mod (zbytek po celočíselném dělení)

5. Nechť $b \in \mathbb{N}$. Navrhněte **Turingovy stroje**, které přijímají jazyky:

   (a) $L = \{w | w \in (0, 1, \ldots, (b-1))^* \ \& \ w_b$ je složené číslo$\}$
   (b) $L = \{w | w \in (0, 1, \ldots, (b-1))^* \ \& \ w_b$ je prvočíslo$\}$

10 Relikt

Je následující gramatika kontextová? Je jazyk gramatikou generovaný kontextový? Pokud ano, nalezněte ekvivalentní kontextovou gramatiku.

$S \to aSbA | \lambda$
$A \to aBbA | bCB | CD$
$B \to bbBa | aS$
$C \to aAaA$
$D \to SC | aABb$