Automaty a gramatiky

Převzato po předchůdcích R. Barták, P. Surynek, mírně upraveno M. Vomlelová (2022).

1 Konečné automaty - úvod

1. Navrhněte konečné automaty na počítání symbolů ve slovech. Pro popis automatů použijte ohodnocený graf (stavový diagram) nebo tabulku.

   (a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k\}$

   (b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 2k\}$

   (c) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ [(\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \vee (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 2\ell]\}$

   (d) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \ \& \ (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 2\ell\}$

   (e) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a \neq 3k \ \& \ (\forall \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_b = 2\ell\}$

2. Navrhněte konečné automaty, které přijímají slova obsahující určité podslovo:

   (a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u \in \{a,b\}^*)w = abba.u\}$ Jazyk obsahuje slova, která začínají *abba*.

   (b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u \in \{a,b\}^*)w = u.abba\}$ Jazyk obsahuje slova, která končí *abba*.

   (c) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u,v \in \{a,b\}^*)w = u.abba.v\}$ Jazyk obsahuje slova, v nichž se vyskytuje podslovo *abba*.

   (d) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u \in \{a,b\}^*)w = u.ab \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w| = 3k+1\}$

   (e) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ [(\exists u \in \{a,b\}^*)w = u.ab \ \vee \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w| = 3k+1]\}$.

3. Navrhněte konečné automaty, které přijímají slova, u nichž začátek souvisí s koncem:

   (a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u,v \in \{a,b\}^*)(|u| = 1 \ \& \ w = u.v.u\}$. Jazyk obsahuje slova, která mají délku aspoň 2 a začínají a končí stejným symbolem.

   (b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u,v \in \{a,b\}^*)(|u| = 2 \ \& \ w = u.v.u\}$. Jazyk obsahuje slova, která mají délku aspoň 4 a začínají a končí stejnou (uspořádanou) dvojicí symbolů.

   (c) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u,v,z \in \{a,b\}^*)(|u| = 2 \ \& \ w = u.v \ \& \ w = z.u)\}$. Jazyk obsahuje slova, která začínají a končí stejnou (uspořádanou) dvojicí symbolů.

   (d) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u,v,z \in \{a,b\}^*)(|u| = 2 \ \& \ |z| = 2 \ \& \ w = u.v.z \ \& \ u \neq z)\}$. Jazyk obsahuje slova, která mají délku aspoň 4 a začínají a končí různými (uspořádanými) dvojicemi symbolů.

4. Vyjádřete množinově (jako v předchozích úlohách) jazyky, které jsou přijímány následujícími automaty popsanými tabulkou:

(a)

	0	1
→* p	q	p
q	r	q
r	p	r

(b)

	0	1
→ p	q	p
* q	r	q
* r	p	r

(c)

	0	1
→ p	p	q
q	p	r
* r	p	r

(d)

	0	1
→ p	p	q
* q	r	q
* r	p	q

5. Nechť posloupnost kóduje průběh tenisového zápasu. Z hlediska prvního hráče nechť 1 znamená získání bodu, nechť 0 znamená získání bodu protihráčem. Navrhněte konečný automat, který přijímá posloupnost 0,1 kódující hru, právě když kód odpovídá výhře prvního hráče. (stačí jeden game).

2 Regulární jazyky, ekvivalentní stavy a ekvivalentní automaty

1. Rozhodněte, zda jsou následující jazyky regulární:
   (a) $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   (b) $L = \{ww \mid w \in \{a\}^*\}$
   (c) $L = \{a^i b^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (d) $L = \{a^i a^i b^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (e) $L = \{a^i b^j a^i \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (f) $L = \{a^i b^i a^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (g) $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k = 0,1,2,\ldots\}$
   (h) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   (i) $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^* \; \& \; |w|_a = |w|_b\}$
   (j) $L = \{a^{2i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (k) $L = \{a^{i^2} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (l) $L = \{a^{3i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (m) $L = \{a^{i^3} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (n) $L = \{a^{3^i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (o) $L = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo}\}$

2. Z následujících automatů odstaňte nedosažitelné stavy. Ve výsledných automatech najděte množiny ekvivalentních stavů:

(a)

	a	b
→* 0	0	5
1	1	3
2	2	7
3	3	2
* 4	4	1
5	5	1
* 6	6	2
7	7	0

(b)

	a	b
A	A	F
B	B	A
C	C	D
D	D	B
E	E	C
→* F	F	E

(c)

	a	b
→ 1	2	3
2	2	4
* 3	3	5
4	2	7
* 5	6	3
* 6	6	6
7	7	4
8	2	3
9	9	4

(d)

	a	b
* A	H	G
B	B	A
C	E	D
D	D	B
E	C	D
F	F	E
G	G	F
→* H	A	G

(e)

	a	b
→* 0	1	2
1	3	0
2	4	5
3	0	2
4	2	5
5	0	3

(f)

	a	b
→ 0	1	2
1	0	3
2	4	1
3	0	1
* 4	2	2
5	4	3

3. Jaké je nejkratší slovo (pokud existuje), které rozlišuje stavy
   - 1 a 5 u automatu a)?
   - 2 a 4 u automatu c)?
   - 3 a 5 u automatu e)?

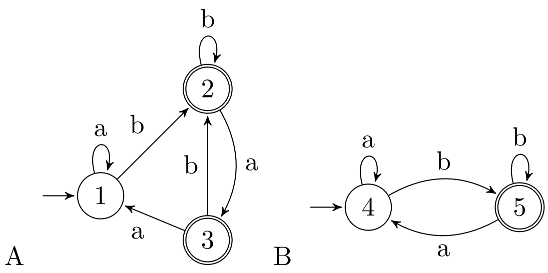
4. Rozhodněte, zda jsou některé z automatů a)-d) z předchozího cičení po dvojicích ekvivalentní. Pokud ne, najděte slovo patřící do jazyka právě jednoho automatu.

3 Nedeterministické konečné automaty, Myhill-Nerode, PL

1. K nedeterministickému automatu **E** sestrojte ekvivalentní deterministický konečný automat. Výsledný FA zredukujte.

E	a	b	ϵ
$\rightarrow q_0$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{A, C\}$
*A	{A,B}	{B}	$\emptyset$
B	{B,D}	$\emptyset$	$\emptyset$
*C	{C}	{D}	$\emptyset$
D	{A}	{C,D}	$\emptyset$

2. Mějme automaty A, B na obrázku.



Zkonstruujte nedeterministický konečný automat, který přijímá jazyk:

(a) $L(A).L(B)$

(b) $L(A)^*$

(c) $L(A)^R$

Sestrojte příslušné deterministické automaty.

3. Navrhněte dvojici konečných automatů, které jsou

(a) redukované a neizomorfní

(b) ekvivalentní a neizomorfní.

4. Nechť A a B jsou konečné automaty pracující nad abecedou Σ. Navrhněte algoritmus, který rozhodne zda:

(a) $L(A) = \emptyset$

(b) $L(A) = L(B)$

(c) $L(A) \subset L(B)$

(d) $L(A) = \Sigma^*$

(e) $L(A)$ je nekonečný.

5. Určete všechny třídy ekvivalence z Nerodovy věty pro následující jazyky:

(a) $L_1 = \{a, aab, abb\}$

(b) $L_2 = \{a^m ba^n | m, n \in \mathbb{N}_1\}$

(c) $L_3 = \{a^n ba^n | n \in \mathbb{N}_0\}$.

6. Uvažujme jazyk

$$L = \{ab(ba)^m ba^n ba^n | m, n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{abba^m ba^n | m, n \in \mathbb{N}_1\}$$

(a) Dokažte, že splňuje iterační lemma a najděte konstantu n.

(b) Dokažte, že není regulární pomocí Myhill-Nerodovy věty.

(c) Je jazyk $L_c = \{(ab)^n a(ba)^n | n \in \mathbb{N}_1\}$ regulární? Dokažte.

(d) Je jazyk $L_d = \{(ba)^n a(ba)^n | n \in \mathbb{N}_1\}$ regulární? Dokažte.

4 Regulární výrazy

1. Navrhněte regulání výrazy reprezentující následující jazyky nad $\Sigma = \{a, b\}$:
   (a) jazyk sestávající ze slov, která obsahují *abba* jako podslovo
   (b) jazyk sestávající ze slov, která mají prefix *abb* a sufix *bbaa*
   (c) jazyk sestávající ze slov, kde počet výskytů *a* je dělitelný 3
   (d) jazyk sestávající ze slov, která začínají a končí stejnou dvojicí symbolů
   (e) jazyk sestávající ze slov, která neobsajují podslovo *aa*

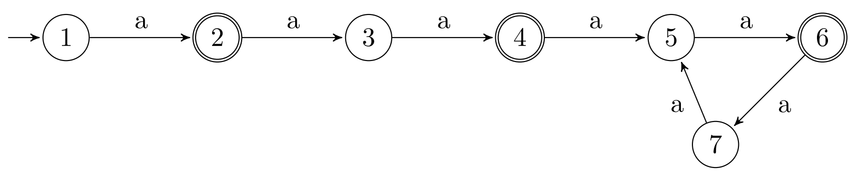
2. Navrhněte algoritmus pro rozhodování, zda je dvojice vstupních regulárních výrazů ekvivalentní, tj. zda repezentují stejný jazyk. Algoritmus aplikujte na dvojici regulárních výrazů:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* \text{ a } \mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* + \mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*$$

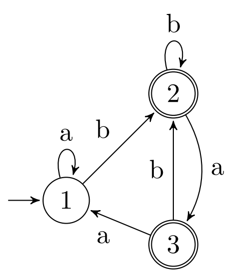
3. Pro následující regulární výrazy zkonstruujte konečné automaty, které přijímají jimi reprezentované jazyky:
   (a) $\mathbf{ab}+\mathbf{ba}$
   (b) $\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{ab}$
   (c) $\mathbf{a}+\mathbf{b}^*$
   (d) $(\mathbf{ab}+\mathbf{c})^*$
   (e) $((\mathbf{ab}+\mathbf{c})^+\mathbf{a}(\mathbf{bc})^*+\mathbf{b})^*$
   (f) $((\mathbf{ab}+\mathbf{c})^*\mathbf{a}(\mathbf{bc})^*+\mathbf{b})^*$
   (g) $(\mathbf{01}^*+\mathbf{101})^*\mathbf{0}^*\mathbf{1}$
   (h) $(\mathbf{01})^*\mathbf{11}(\mathbf{01})^*(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{00}$

4. Pro následující konečné automaty sestrojte regulární výrazy, které reprezentují stejný jazyk:

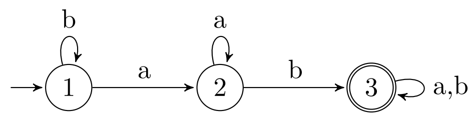
   (a)



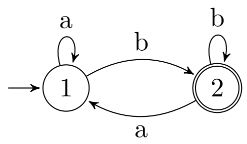
(b)



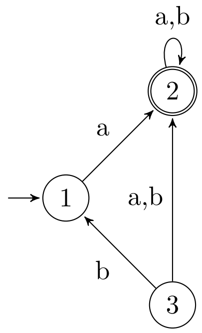
(c)



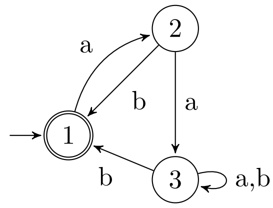
(d)



(e)



(f)



5. Napište regulárním výrazem možné formáty telefonního čísla, včetně mezinárodního směrování. Představme si navíc, že země s volačkou '11' má desetimístné národní číslo, země s volačkou '88' jen sedmimístné (případně doplňte podle skutečnosti).

6. Zapište formát přípustného identifikátoru proměnné. Můžete používat intervaly a-z apod.

7. Zapište možné formáty velikosti paměti počítače, možné jednotky Mb a Gb, číslo může být na jedno desetinné místo.

8. Uvažujme zjednodušené HTML, kde jsou k dispozici konstrukce

<p>	</p>
<a>	
<table>	</table>
<tr>	</tr>
<td>	</td>

všechny bez atributů. Využijte tvrzení o regulární substituci k rozhodnutí, zda texty ve formátu zjednodušeného HTML tvoří regulární jazyk.

5 Uzávěrové vlastnosti

1. Nechť h je homomorfismus $h : \{0, 1, 2\} \to \{a, b\}$, $h(0) = a, h(1) = ab, h(2) = ba$.
   (a) Určete $h(0120)$.
   (b) Určete $h(21120)$.
   (c) Mějme $L = L(\mathbf{01}^*\mathbf{2})$. Určete $h(L)$.
   (d) Mějme $L = L(\mathbf{0} + \mathbf{12})$. Určete $h(L)$.

2. Mějme jazyk L nad abecedou $\Sigma = a, b$. Levá derivace jazyka slovem $v \in \Sigma^*$ je definovaná $\partial_v(L) = \{w \mid vw \in L\}$, pravá derivace $\partial_v^R(L) = \{w \mid wv \in L\}$. Dokažte, že je-li L regulární, je regulární i jeho levá i pravá derivace.

3. Mějme jazyky L, M nad abecedou $\Sigma = a, b$.

   Quocient jazyka $M \backslash L = \{w \mid (\exists v \in M) vw \in L\}$, $L/M = \{w \mid (\exists v \in M) wv \in L\}$. Dokažte, že je-li L regulární, je regulární i jeho levý i pravý quocient.

4. Dokažte, že regulární jazyky jsou uzavřená na operace:

(a) $min(L) = \{w \mid w \in L \mathbin{\&} \neg(\exists v \in L, u \in \Sigma^+ : w = vu\}$, tj. žádný vlastní prefix w není z L.
(b) $max(L) = \{w \mid w \in L \mathbin{\&} \neg(\exists v \in L, u \in \Sigma^+ : vu \in L\}$, tj. w není prefixem jiného slova z L.
(c) $init(L) = \{w \mid u \in \Sigma^* : wu \in L\}$, tj. w je prefixem nějakého slova z L.

6 Dvousměrné konečné automaty

1. Simulujte výpočet dvousměného automatu na vstupu $\#aaab\#$.

	a	b	#
$\rightarrow p_0$	-	-	p,+1
p	p,+1	p,+1	q,-1
q	qa,-1	qb,-1	-
qa	-	qa,-1	q_F,+1
qb	qb,-1	-	q_F,+1
q_F	q_F,+1	q_F,+1	q_{FF},+1
$*q_{FF}$	-	-	-

2. Nechť L je regulární jazyk. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je jazyk $K = \{w \mid \#w\$ \in L\}$ regulární.

3. Uvažujme konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Navrhněte dvousměrné automaty (pro L_1 a L_4 nedeterministické), které přijímají jazyky:
   (a) $L_1 = \{\#w\$ \mid ww^R \in L(A)\}$
   (b) $L_2 = \{\#w\$ \mid ww \in L(A)\}$
   (c) $L_3 = \{\#w\$ \mid (\exists v \in \Sigma^*)wv \in L(A) \& |w| = |v|\}$
   (d) $L_4 = \{\#w\$ \mid (\exists u, v \in \Sigma^*)w = uv \& uu^R v \in L(A)\}$

4. Navrhněte nedeterministický konečný automat přijímající jazyk $L_1 = \{\#w\$ \mid ww^R \in L(A)\}$. Přitom nevyužívejte znalosti dvousměrných automatů.

5. Popište princip konstrukce ekvivalentního konečného automatu k danému dvousměrnému automatu.

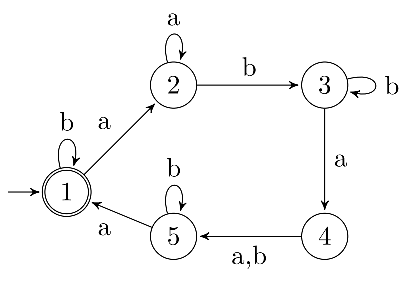
6. Pro jazyky L_1, L_2, L_3, L_4 navrhněte (nedeterministické) konečné automaty, které je přijímají. Při návrhu využijte znalosti dvousměrných automatů.

Mealy, Moore stroj

1. Navrhněte převod mezi Mealyho a Mooreovým strojem.

2. Navrhněte Mealyho nebo Moorův stoj, který realizuje operaci:
   (a) bitového součtu bitových vektorů
   (b) bitového součinu bitových vektorů
   (c) aritmetického součtu bitových vektorů, když čísla čteme odzadu.

3. Uvažujme konečný automat A zadaný následujícím stavovým diagramem:



Sestrojte konečné automaty, které přijímají jazyky:

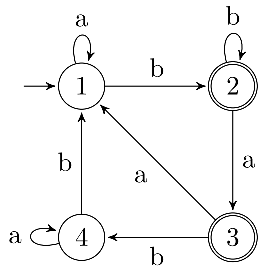
- $L_1 = \{w \mid (\exists u, v \in \{a,b\}^*) w = uv \;\&\; uav \in L(A)\}$
- $L_2 = \{w \mid (\exists u, v \in \{a,b\}^*) w = uv \;\&\; (uav \in L(A) \vee ubv \in L(A)\}$
- $L_3 = \{w \mid (\exists u, v \in \{a,b\}^*) w = uav \;\&\; uv \in L(A)\}$

7 Gramatiky úvod

1. Navrhněte gramatiky, které generují následující jazyky. Lze gramatiku zkonstruovat ve všech případech?

   (a) $L = \{ww \mid w \in \{a\}^*\}$
   (b) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   (c) $L = \{a^i b^i \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (d) $L = \{a^i b^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (e) $L = \{a^i a^i b^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (f) $L = \{a^i b^j a^i \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (g) $L = \{a^i b^i a^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (h) $L = \{a^i b^j a^k \mid i,j,k = 0,1,2,\ldots\}$
   (i) $L = \{a^i b^i c^i \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (j) $L = \{a^{2i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (k) $L = \{a^{i^2} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (l) $L = \{a^{3i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (m) $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   (n) $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k = 0,1,2,\ldots \& i \leq j \leq k\}$
   (o) správné uzávorkování, tj. stejně levých a pravých, nikdy v průběhu ne více pravých než levých; '()(())' patří do jazyka.

2. Pro následující konečný automat nalezněte ekvivalentní gramatiku. V jaké třídě Chomského hierarchie se budete pohybovat?



3. Pro následující gramatiku nalezněte ekvivalentní konečný automat. Lze to provést s libovolnou gramatikou?

   $S \to abS|babA|\epsilon$
   $A \to abA|aB|bC$
   $B \to abS|B|bC|\epsilon$
   $C \to aab|A|aA|\epsilon.$

8 Iterační lemma

1. Rozhodněte, zda jsou následující jazyky bezkontextové.
   (a) $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   (b) $L = \{a^i b^i \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (c) $L = \{a^i b^j a^i \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (d) $L = \{a^i b^j a^k \mid i,j,k = 0,1,2,\ldots\}$
   (e) $L = \{a^i b^i c^i \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (f) $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k = 0,1,2,\ldots \& i \leq j \leq k\}$
   (g) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   (h) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^* \& |w|_a = |w|_b\}$
   (i) $L = \{a^{i^2} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (j) $L = \{a^{i^2+i+1} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (k) $L = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo }\}$
   (l) $L = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \& |w|_0 \neq |w|_1\}$
   (m) $L = \{0^i 1^i 0^j \mid i,j \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0^i 1^j 0^j \mid i,j \in \mathbb{N}_0\}$
   (n) $L = \{0^i 1^i 0^j \mid i,j \in \mathbb{N}_0\} \cap \{0^i 1^j 0^j \mid i,j \in \mathbb{N}_0\}$.
2. Najděte podmínky, podle kterých leze určit, zda je jazyk generovaný danou bezkontextovou gramatikou nekonečný. Instpirujte se pumping lemmatem pro bezkontextové jazyky.

9 Redukce a normální formy gramatik, Algoritmus CYK

1. Zredukujte následující gramatik, tj. odstraňte zbytečné neterminály a je obsahující pravidla.
   (a) $G_1 = (\{S,A,B,C,D,E\}, \{a,b,c\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to aA|bB|aSa|bSb|\epsilon \\ A \to bCD|Dba \\ B \to bB|AC \\ C \to aA|AC \\ D \to DE \\ E \to \epsilon \end{array}\right\}$.
2. Následující bezkontextovou gramatiku převeďte na redukovanou gramatiku bez ϵ pravidel a jednotkových pravidel, která generuje stejný jazyk až na řetězec ϵ.
   (a) $G_2 = (\{S,A,B,C\}, \{a,c\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to aACa \\ A \to a|B \\ B \to C|c \\ C \to cC|\epsilon \end{array}\right\}$,
   (b) $G_4 = (\{S,A,B,C\}, \{0,1,2\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to ABSC|\epsilon \\ A \to 1A0|\epsilon \\ B \to 1B00|\epsilon \\ C \to 2C|S \end{array}\right\}$,
3. Následující bezkontextovou gramatiku převeďte do Chomského normální formy.
   $G_5 = (\{S,E,F\}, \{(,),*,+,a\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to (E) \\ E \to F+F|F*F \\ F \to S|a \end{array}\right\}$.
4. Uvažujme bezkontextovou gramatiku G_6. Rozhodněte, zda je slovo *abcbb* generováno gramatikou G_6. Gramatiku nejdříve převeďte na ChNF a k rozhodnutí použijte algoritmus CYK. $G_6 = (\{S,A,B,C\}, \{a,b,c\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to CA|CB \\ B \to CBA|CB|BA|BB \\ C \to ABC|BC \\ A \to a \\ B \to b \\ C \to c \end{array}\right\}$.

10 Zásobníkové automaty (PDA), Deterministické PDA

1. Navrhněte zásobníkové automaty pro následující jazyky (nebo zdůvodněte, proč neexistuje):
   (a) $L_1 = \{w2w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
   (b) $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
   (c) $L_3 = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \& |w|_0 = |w|_1\}$
   (d) $L_4 = \{u2v \mid u, v \in \{0,1\}^* \& |u| \neq |v|\}$
   (e) $L_i = \{u2v \mid u, v \in \{0,1\}^* \& u[i] \neq v[i]\}$
   (f) $L_5 = \{u2v^R \mid u, v \in \{0,1\}^* \& u \neq v\}$
   (g) $L_6 = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$
   (h) $L_7 = \{a^i b^j c^{i*j} \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$.
2. Uvažujme $G_5 = (\{E, T, F\}, \{(,), *, +, , 1\}, E, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} E \to E + T|T \\ T \to T * F|F \\ F \to 1|(E) \end{array}\right\}$. Sestrojte zásobníkové automaty Z_1, Z_2 že $L(Z_1) = L(G)$ a $N(Z_2) = L(G)$.
3. Zásobníkový automat z úlohy (1c) převeďte na bezkontextovou gramatiku.

Deterministické bezkontextové jazyky

1. Uvažujeme jazyk $L_{01} = \{0^i 1^i | i \in \mathbb{N}_0\}$
   (a) Je jazyk bezkontextový?
   (b) Je jazyk přijímaný nějakým deterministickým zásobníkovým automatem?
   (c) Je doplněk tohoto jazyka přijímaný nějakým deterministickým zásobníkovým automatem?
   (d) Je doplněk tohoto jazyka přijímaný nějakým deterministickým zásobníkovým automatem prázdným zásobníkem?
2. Uvažujeme jazyk $L_{wwr} = \{w2w^R | w \in \{0,1\}^*\}$ nad abecedou $\{0,1,2\}^*$.
   (a) Je jazyk bezkontextový?
   (b) Je jazyk přijímaný nějakým deterministickým zásobníkovým automatem?
   (c) Je doplněk tohoto jazyka přijímaný nějakým deterministickým zásobníkovým automatem?
   (d) Je jazyk $\bar{L} \cap \{0,1\}^*.2.\{0,1\}^*$ přijímaný nějakým deterministickým zásobníkovým automatem?
3. Je sjednocení jazyků $L_{01} \cup L_{wwr}$ bezkontextový jazyk?
4. Definujme opereaci slévání $\sqcup$ jako slévání dvou pruhů na dálnici - ne nutně jedno a jedno auto, libovolné množství aut z pruhu za sebou, tj.

   $$aab \sqcup cc = \{ccaab, cacab, caacb, caabc, accab, acacb, acabc, aaccb, aacbc, aabcc\}.$$

   Pořadí v rámci pruhů zůstává zachováno. Pro jazyky definujeme

   $$L_1 \sqcup L_2 = \bigcup_{u \in L_1, v \in L_2} (u \sqcup v).$$

   (a) Určete $L_1 \sqcup L_2$ pro $L_1 = \{a^i b^i | i \in \mathbb{N}\}$ a $L_2 = \{c^k | k \in \mathbb{N}\}$.
   (b) Dokažte, že je jazyk $L_1 \sqcup L_2$ bezkontextový.
   (c) Je jazyk $L_1 \sqcup L_2$ bezkontextový pro L_1 regulární a L_2 bezkontextový?
5. Najděte podmínky, podle kterých leze určit, zda je jazyk generovaný danou bezkontextovou gramatikou nekonečný. Instpirujte se pumping lemmatem pro bezkontextové jazyky.

11 Uzávěrové vlastnosti

1. Uvažujme abecedu $\Sigma = \{t, z, k\}$ a substituci $\sigma(t) = \{a, \ldots, Z\}^*, \sigma(z) = \{< p >\}, \sigma(k) = \{< /p >\}$ a jazyk definovaný regulárním výrazem $L = L[(t^*(zt^*k))^*]$.
   (a) Je jazyk L regulární? Pokud ano, sestrojte konečný automat, který ho přijímá.
   (b) Je jazyk $\sigma(L)$ regulární? Pokud ano, sestrojte konečný automat, který ho přijímá.
2. Uvažujme abecedu $\Sigma = \{t, u, r, s, d, e\}$ a homomorfizmus $h(t) =< table >, h(u) =< /table >, h(r) =< tr >, h(s) =< /tr >, h(d) =< td >, h(e) =< /td >$.
   (a) Použijte homomorfizmus k definici jazyka L_{HTML} tabulek v HTML kódu (ostatní text a kódy pomíjíme).
   (b) Je jazyk regulární? Je jazyk bezkontextový? Navrhněte zásobníkový automat, který přijímá jazyk L_T 'správného tabulkování'.
   (c) Navrhněte zásobníkový/konečný automat, který přijímá $h^{-1}(L_{HTML})$.
3. Uvažujeme jazyk $L_{11} = \{0, 1\}^*.11.\{0, 1\}^*$.
   (a) Je jazyk regulární? Dokažte.
   (b) Je jazyk $\overline{L_{11}}$ regulární? Dokažte.
4. Uvažujeme jazyk přiřazení výrazu do proměnné, $L_p = L(I). \leftarrow .L(E)$, kde $L(I)$ je jazyk možných identifikátorů a $L(E)$ jazyk možných aritmetických výrazů.
   (a) Naznačte gramatiku generující jazyk L_p.
   (b) Je jazyk regulární? Dokažte.
   (c) Je jazyk bezkontextový? Dokažte.
   (d) Je určete levý kvocient $L(I)\backslash L_p$. Je jazyk regulární, bezkontextový? Navrhněte zásobníkový automat, který ho přijímá.
   (e) Jak bychom pomocí kvocientu vyjádřili jazyk $L(E)$?

Obecné a kontextové gramatiky

1. Jsou jazyky bezkontextové? Najděte gramatiku, generující daný jazyk
   (a) $L_3 = \{a^i b^i c^i | i \in \mathbb{N}\}$.
   (b) $L_n = \{a^i b^j c^k | i \neq k \vee i \neq j \vee j \neq k\}$.
   (c) $\overline{L_3} = \overline{\{a^i b^i c^i | i \in \mathbb{N}\}}$ (stačí naznačit).
   (d) $L_{\leq} = \{a^i b^j c^k | 0 \leq i \leq j \leq k\}$.
   (e) $\overline{L_{\leq}} = \overline{\{a^i b^j c^k | 0 \leq i \leq j \leq k\}}$ (stačí naznačit).
   (f) $L = \{0^i 1^j 2^k 3^l | i = 0 \vee j = k = l\}$.
   (g) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^* \& |w|_a = |w|_b\}$.
   (h) $L = \{a^{i^2} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$
   (i) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.
2. Jaký jazyk generuje gramatika G? Je gramatika kontextová? Nalezněte ekvivalentní kontextovou gramatiku. $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to aSBC|\epsilon \\ B \to BBC \\ C \to CC \\ CB \to BC \\ aB \to ab \\ bB \to bb \\ bC \to bc \\ cC \to cc \end{array}\right\}$.

12 Turingovy stroje

1. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \{a, b\}, \Gamma, \delta, q_0, B, \{f_{yes}, f_{no}\})$, který zjistí, zda se ve vstupním slově vyskytuje písmeno a a skončí ve stavu f_{yes} nebo f_{no}.

2. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \{a, b\}, \Gamma, \delta, q_0, B, \{f_a, f_b, f_=\})$, který zjistí, zda slovo obsahuje více a nebo b, skončí ve stavu f_a, f_b nebo $f_=$.

   a) Můžete uvažovat vstupní slovo ve tvaru $a^i b^j$.

   b) Totéž pro slovo z $\{a, b\}^*$.

   c) Upravte přechchozí stroj, aby smazal vstupní pásku a nechal na ní 'přebývající' písmena napsaná bez mezer za sebou.

3. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, který ze zadaného vstupního slova vytvoří jeho zrcadlový obraz. Přesněji, počáteční konfiguraci $q_0 w$ převede na fw^R, kde $f \in F$.

4. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \Sigma = \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, který za znak # přidá tři nuly, zbytek slova odsune o tři pozice doprava. Počáteční konfiguraci $q_0 u\#v$, kde $u, v \in (\Sigma \setminus \#)^*$ převede na $fu\#000v$, kde $f \in F$.

5. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \Sigma = \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, který prohodí obsah dvou paměťových bloků, přičemž paměť je představována páskou.

   a) Počáteční konfiguraci $q_0 u\#v$, kde $u, v \in (\Sigma \setminus \#)^*$ převede na $fv\#u$, kde $f \in F$.

   b) Počáteční konfiguraci $q_0 u\#v\#w\#x\#y$, kde $u, v, w, x, y \in (\Sigma\setminus\#)^*$ převede na $fu\#x\#w\#v\#y$, kde $f \in F$.

   c) Vynasnažte se u předchozího, aby využíval co nejméně dalšího prostoru na pásce a co nejméně stavů.

6. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \{0, 1, c\}, \Gamma, \delta, q_0, B, \{f_{yes}, f_{no}\})$, zkontroluje, jestli je vstupní slovo ve formátu wcw, $w \in \{0, 1\}^*$.

7. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \{0, 1, c\}, \Gamma, \delta, q_0, B, \{f_{liche}, f_{sude}\})$, který najde střed slova a skončí buď na něm (lichá délka) nebo na prvním znaku druhé poloviny.

8. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, B, \{f_{yes}, f_{no}\})$, zkontroluje, jestli je vstupní slovo ve formátu ww, $w \in \{0, 1\}^*$.

9. Naprogramujte na Turingově stroji *asociativní paměť*. Například můžete předpokládat Turingův stroj se dvěma páskami, kde první slouží k dotazování a odpovídání, a druhá reprezentuje obsah paměti.

   a) Dotazem $k\#w$, kde $k, v \in (\Sigma\setminus\#)^*$ jsou po řadě klíč a data, vložíme do paměti asociaci klíče k s daty w. Vstupní páska je v tomto případě smazána, pokud klíč v paměti ještě není reprezentován, jinak je ponechána beze změny. Za oddělovač dvojic můžete zvolit nový symbol páskové abecedy.

   b) Na první pásce lze položit dotaz: k, kde $k \in (\Sigma \setminus \#)^*$ je klíč, přičemž jako odpověď na první pásce očekáváme data asociované s klíčem k.

10. Nechť $b \in \mathbb{N}$. Navrhněte **Turingův stroj**, který přijímá jazyk $L = \{u\#v\#w | u, v, w \in (0, 1, \ldots, (b-1))^* \ \&\ u_b \circ v_b = w_b\}$, u_b kde značí interpretaci slova u jako čísla v soustavě o základu b (tj. například $0101_2 = 5$) a $\circ$ nějakou binární aritmetickou operaci.

    (a) $\circ$ je +

    (b) $\circ$ je -

    (c) $\circ$ je *

    (d) $\circ$ je div (celočíselné dělení)

    (e) $\circ$ je mod (zbytek po celočíselném dělení).

11. Nechť $b \in \mathbb{N}$. Navrhněte **Turingovy stroje**, které přijímají jazyky:

    (a) $L = \{w | w \in (0, 1, \ldots, (b-1))^* \ \&\ w_b \text{ je složené číslo}\}$

    (b) $L = \{w | w \in (0, 1, \ldots, (b-1))^* \ \&\ w_b \text{ je prvočíslo}\}$.

13 Seznam možných úkolů v zápočtové písemce

Jazyk, automat či gramatika může být libovolná, popsaná slovně, automatem, gramatikou, pomocí operací sjednocení, doplňku, průniku, reverze, zřetězení apod.

1. Rozhodněte, zda je jazyk L regulární a svou odpověď dokažte (buď použitím iteračního lemmatu, Mihyll-Nerodovy věty nebo sestrojením konečného automatu či regulární gramatiky).
2. Rozhodněte, zda je jazyk L bezkontextový a svou odpověď dokažte (buď použitím iteračního lemmatu, nebo sestrojením zásobníkového automatu či bezkontextové gramatiky).
3. Navhněte konečný automat přijímající jazyk L.
4. Navhněte zásobníkový automat přijímající jazyk L.
5. Převeďte ϵ nedeterministický konečný automat na deterministický přijímající stejný jazyk.
6. Najděte redukt konečného automatu.
7. Napište gramatiku generující jazyk L.
8. Převeďte bezkontextovou gramatiku do Chomského normální formy.
9. Popište Turingův stroj přijímající konkrétní jazyk.

Pro informaci:

1. Dvousměrné automaty, Mealy a Moorův stoj nebude v zápočtové písemce ani u zkoušky.

Contents