Míra

v geometrii 1. st. ZŠ ve vyučování orientovaném na budování schémat (VOBS) v učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ, M. Hejný a kol.

Míra v kurikulárních dokumentech

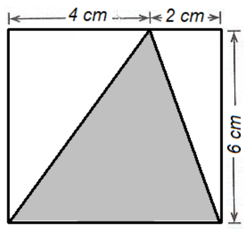
Geometrie v rovině a v prostoru je na prvním stupni základní školy v platných kurikulárních dokumentech (RVP) považována za jednu ze čtyř oblastí vzdělávání žáků v matematice. Dalšími oblastmi jsou: Čísla a početní operace, Závislosti, vztahy a práce s daty a Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Učivo geometrie je postaveno na dvou nosných pilířích. Prvním, a pro uvažovaný věk důležitějším, je poznávání 2D i 3D geometrických útvarů. Na poznávání vazeb mezi atributy jednotlivých objektů i mezi objekty samotnými, což odpovídá druhé a třetí úrovni porozumění geometrickým objektům podle Van Hieleho (1986), se v dokumentech důraz neklade. Ani v praxi to nebývá jinak a důraz se klade především na znalost terminologie.

Druhým pilířem školské geometrie je oblast míry geometrického útvaru. Jmenovitě na prvním stupni je to délka úsečky, obvod a obsah obrazce. Úskalím této oblasti je, že ani dokumenty, ani většina tradičně koncipovaných učebnic se nevěnuje propedeutice těchto pojmů. V učebnicích a následně i ve školské praxi jsou tyto pojmy obvykle zaváděny ve vazbě na vzorečky. Například v současné době v Čechách nejrozšířenější učebnice, ve které je mnoho rámečků s nápisem „Zapamatujte si“ a různé vzorečky jsou i vizuálně zdůrazňovány, lze například najít k úlohám na výpočet obsahu či obvodu pokyny typu: „Nejdříve si napiš vzoreček a pak do něj dosazuj.“

Příčiny miskoncepcí

Uvedená skutečnost je jednou z příčin častých miskoncepcí pojmů týkajících se míry u žáků prvního stupně, která se promítá dále do vyšších ročníků. Jako ilustraci uvedeme ukázky žákovských řešení úlohy, která byla jednou z úloh v šetření TIMSS pro žáky 8. ročníků, tj. 14-15 let. Jednalo se o tuto úlohu:

Na obrázku je uvnitř čtverce vybarvený trojúhelník. Jaký je obsah vybarveného trojúhelníka?



Úlohu lze řešit několika způsoby jednoduše a bez použití jakéhokoliv vzorečku. Nicméně úspěšnost řešení českých žáků 8. ročníků této úlohy byla silně podprůměrná jak ve srovnání s výsledky ostatních zemí, tak i v rámci ČR. Uvádíme čtyři žákovská řešení, jimiž chceme dokumentovat to, co jsme uvedli výše.

<table>
<tr><td>S = a.b.c
S = 6,3.72.6
S = 272,16 cm²
Řešení 1.</td><td>S=a+b+c
S=6+6+6
S = 18cm²
Řešení 2.</td><td rowspan="2">S= a².b²
S= 6².■2²
S=36.4
S=144
Řešení 3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">S= a . va = 6.6 = 36 cm²
Řešení 4.</td></tr>
</table>

Další překážkou pro dobré porozumění pojmu obsah a obvod je jazyk. Tento jev popisuje například i A. Hansen v (Hansen, 2006). Zmiňuje zde například anglický termín „face“. Je to slovo, které existuje jednak jako slovo hovorového jazyka, ale i jako geometrický termín – stěna. Přitom význam tohoto slova v hovorovém jazyce se značně liší od významu geometrického termínu. V českém jazyce slovo „obsah“, použito v hovorovém jazyce, má význam něčeho uvnitř jak materiální povahy – obsah kapes, obsah lahve, tak i nemateriální povahy – obsah knihy, obsah projevu. A pokud chceme v hovorovém jazyce vyjádřit „area“, slovo „obsah“ se nepoužije. Použijí se jiná slova – výměra nebo plocha. Slovo „obvod“ se v hovorovém jazyce sice používá, i když ne tak často, ale také v jiných významech – obvod pasu, stromu, elektrický obvod, klopný obvod, rezonanční obvod, také správní území – volební obvod, soudní obvod.

Poslední jev, který zde zmíníme a který je příčinou dalších miskoncepcí, je vazba mezi obsahem a obvodem. Pojem obsah i obvod se zavádí v učebnicích pro 1. st. ZŠ současně. Nejdříve se probírá čtverec. Řeší se poměrně frekventovaně úlohy, kdy je dán obvod čtverce a má se spočítat jeho obsah a obráceně. Tedy důsledně se buduje představa, že změnou obsahu se změní i obvod a obráceně. Tuto vazbu pak žáci analogicky přenášejí i na obdélníky, trojúhelníky apod. a i dále na vazbu mezi povrchem a objemem ve 3D. Úlohy, které by tuto představu o vazbě mezi obsahem a obvodem pro nepravidelné mnohoúhelníky nabourali, se vyskytují zřídka.

Na představy o pojmu míra je vázáno i učivo o jednotkách míry a o převodech jednotek. Protože žákům chybí jak představy tak i porozumění předpon mili-, kilo-, centi-, …, je většinou toto učivo uchopováno pamětí. Žáci se učí zpaměti, kdy se násobí či dělí a jakou mocninou deseti. V této oblasti se pochopitelně často chybuje a učivo bývá jak žáky tak učiteli považováno za obtížné a zároveň nezábavné.

Dále si ukážeme, jak jsou pojmy míry budovány v duchu VOBS v koncepci M. Hejného.

S jakými prekoncepty žáci přichází do školy?

Edukační principy

Jeden edukační princip při budování porozumění matematickým pojmům, vztahům, procesům a situacím, který je pro VOBS charakteristický, lze popsat jako radu učiteli:

Když chceme žáka naučit nějaký geometrický pojem (například čtverec, lichoběžník, jehlan ale i obvod), musíme jej pomocí vhodných úloh vést postupně k tomu, aby

1) o objektu nejdříve nabyl dostatek zkušeností,

2) objekt poznal v činnosti,

3) o objektu diskutoval se spolužáky,

4) se sám pokusil pojem vymezit,

5) s pomocí učitele upřesňoval své vymezení až k formulaci dobré definice.

Jak bylo řečeno, v „tradičním“ přístupu k vyučování geometrie, který lze sledovat ve všech nejpoužívanějších učebnicích matematiky pro 1. st. ZŠ na našem trhu, tento postup zcela chybí. To, že jsou žáci učebnicí nebo učitelem vyzváni, aby například narýsovali čtverec a změřili jeho strany, to není dostačující činnost, která zakládá žákovské zkušenosti s obvodem čtverce. V takové úloze jde pouze o plnění instrukcí, kde chybí motivace, prostor pro spekulace a diskuse žáků. Naše kritika „tradičního“ přístupu spočívá zejména v tom, že matematické pojmy jsou žákům předkládány bez předchozí propedeutiky, bez dlouhodobého budování žákovských zkušeností. Geometrické vztahy, vzorečky, jsou žákům nabídnuty po jedné, dvou ukázkách a žáci jsou vedeni k jejich zapamatování.

Dále ukážeme, jak jsou jednotlivé výše uvedené body 1)-5) pro pojmy míry rozpracovány v učebnicích M. Hejného a jaká další schémata se v jednotlivých úlohách propojují. Budeme sledovat budování pojmů délka úsečky, obsah a obvod 2D obrazce, objem a povrch tělesa, výška tělesa, krychlové stavby a krychlového tělesa,

Žáci nejdříve přicházejí do styku s pojmem (vztahem, situací, procesem) tak, že na něj ještě není zaměřena pozornost. Zkušenosti s pojmem žáci získávají řešením vhodných úloh.

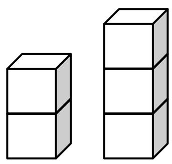
Žáci řeší úlohy v mnoha různých kontextech, v různých prostředích a pokud možno úlohy manipulativní. Tak se žáci prostřednictvím vlastního zážitku intuitivně seznamují s pojmem, budují si zásobu izolovaných modelů daného pojmu, tj. zásobu různých konkrétních zkušeností, budují a rozvíjí si tak své prekoncepty, své první představy o pojmech. Je důležité, že při těchto aktivitách také učitel poznává současné žákovské prekoncepty, na které může ve své výuce navazovat a které může usměrňovat.

Jinak tomu také říkáme, že probíhá propedeutika pojmu, vztahu situace, procesu.

Uvedeme ilustrace z geometrických prostředí Dřívka, Parkety, Origami (překládání papíru), Krychlové stavby. Uvedené úlohy jsou vybrány z učebnic Hejný a kol., nebo jsou lekce modifikovány. Uvádíme jen typové úlohy, které přináší novou myšlenku týkající se buď pojmu míra, nebo týkající se dalšího matematického schématu. Chceme tím ilustrovat, jak se v jednotlivých úlohách mohou propojovat schémata mnohých pojmů.

Prostředí 3D geometrie: Krychlové stavby

Úloha. Postav z kostek věže podle obrázku.

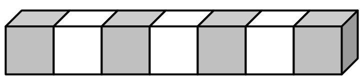


Úloha je formulována jazykem, kterému děti rozumí. Není potřeba vysvětlovat, co jsou kostky a co je věž. Je to jazyk metaforický, který se postupně bude upřesňovat. Úloha přispívá do schématu pojmu krychle, krychlová stavba a její výška, hranol, výška tělesa a objem.

Žáci poznávají v činnosti stěny krychle jako průvodní jevy krychle – snaží se, aby stěna jedné krychle padla přesně na stěnu další krychle, poznávají pojem krychlová stavba – pojem se nevysvětluje, jen se s ním pracuje a učitel činnost svou i žáků doprovází slovy. Žáci získávají první zkušenosti s pojmem hranol, jeho výškou a jeho objemem. Na to poukazuje počet krychlí. Poznávají také první dvě reprezentace krychlové stavby, dva jazyky, kterými o krychlových stavbách budeme komunikovat. Je to fyzický model, který si sami vytvořili, a portrét stavby, což je 2D obraz stavby ve volném rovnoběžném promítání.

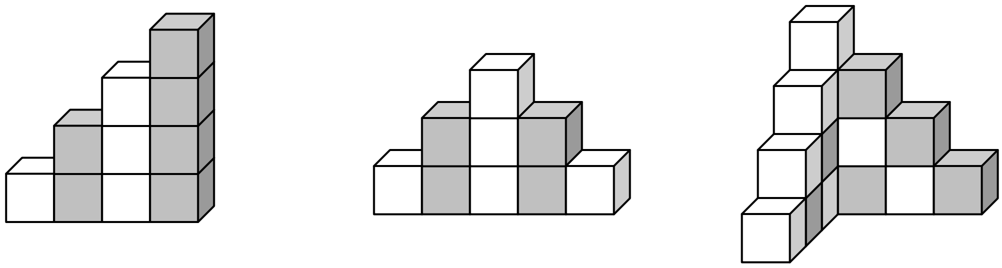
Všechny tyto uvedené pojmy a schémata se rozvíjí a obohacují dalšími úlohami.

Úloha. Postav vláček.



V úloze, se navíc objevuje v aritmetice důležitý rytmus. Jestliže se žáky krychle počítáme, přispíváme navíc do schématu parita čísla – sudost, lichost.

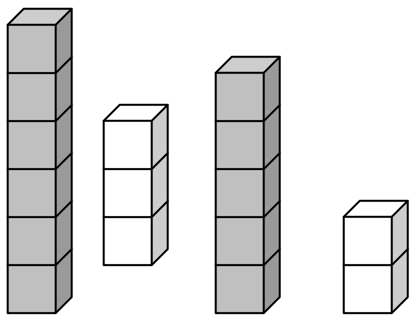
K dalšímu obohacení zkušeností s objemem krychlové stavby přispívají další úlohy, kde žáci staví stavby podle obrázku a hovoří o počtu krychlí a o počtu podlaží.



Na pojem výška krychlové stavby již přímo zaměřuje pozornost následující úloha. Ještě ale není použit geometrický termín výška, ale velikost věže. V daném kontextu není pochyb o tom, co to znamená. Také je zřejmé, jak daná úloha přispívá do aritmetických schémat číslo a relace porovnávání čísel.

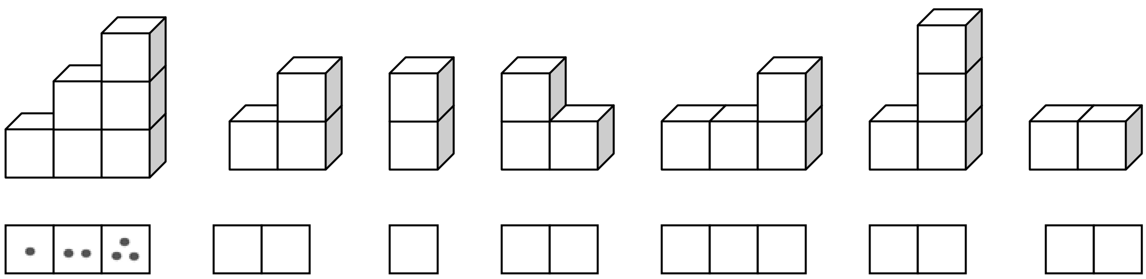
Úloha. Uspořádej podle velikosti.

Zkušenosti s objemem a výškou krychlové stavby obohacují i úlohy, jejichž cílem je seznámit žáky s dalším jazykem, kterým se komunikuje o krychlových stavbách, s plánem krychlové stavby. Nebudeme se nyní věnovat problematice práce s novým jazykem, ale jen o příspěvku těchto úloh do schématu objem a výška.



Úlohy jsou těchto typů:

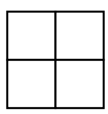
Nakresli plán stavby. Zapiš, kolik má stavba podlaží. Přiřaď k sobě plán a stavbu. Vytvoř stavbu podle plánu. Vytvoř stavbu ze 6 krychlí a zapiš její plán.



Počet krychlí stavby, počet teček v plánu je vlastně objem stavby, počet podlaží, nejvyšší počet teček v jednom čtverci je výška stavby. Žáci rovněž získávají řadu zkušeností s tím, že dvě různá tělesa mohou mít stejný objem.

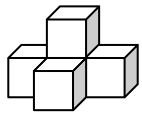
Následující úloha provazuje tři parametry krychlové stavby – výšku, objem a tvar půdorysu.

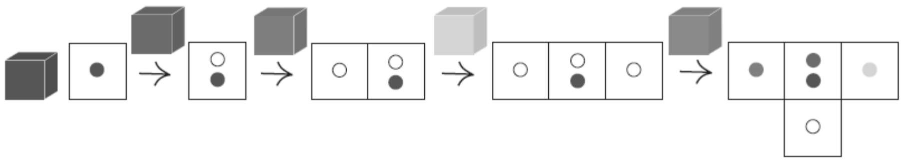
Úloha. Z 8 krychlí vytvoř stavbu, která má a) 2, b) 3, c) 4, d) 5 podlaží, a nakresli její plán.



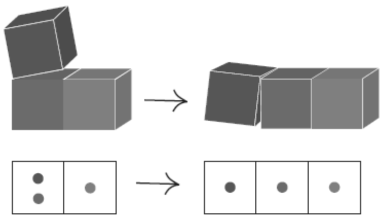
Všechny dosud uvedené úlohy pracovaly s krychlovou stavbou jako s hotovým statickým objektem – konceptem. Dalším příspěvkem nejen do schématu krychlová stavba, ale i do schématu objem tělesa, jsou úlohy, kde se vyskytuje krychlová stavba v procesu, a to buď v procesu tvorby, nebo v procesu změny. Jsou to například následující úlohy.

Úloha. Postav stavbu podle návodu

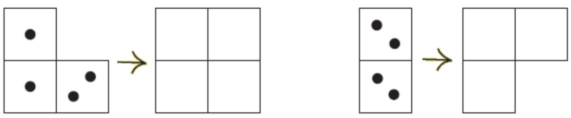




Úloha. Změň stavbu a zapiš její plán.



Úloha. Vytvoř stavbu, přelož jednu krychli a doplň její plán.



V úlohách posledních dvou typů žáci získávají zkušenost s tím, že jestliže změníme tvar stavby tak, že přemístíme jednu nebo více krychlí, její objem se nezmění. Tedy poznávají různé mnohostěny se stejným objemem. Později k tomu přibude ještě sledování dalších dvou metrických vlastností mnohostěnu, a to povrchu a kostry (tj. součet délek všech hran).

Schéma výška tělesa je obohacováno o žákovské zkušenosti s měřením vlastní výšky, porovnáváním výšek několika žáků, zkoumáním, zda jsou vyšší hoši nebo dívky třídy.

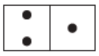
Vše dosud uvedené se odehrává v prvním ročníku. Dále ve 2. ročníku je schéma objem tělesa obohacováno o následující úlohy:

Úloha. Vytvoř podle plánu cimbuří. Pokračuj ve stavbě cimbuří tak, aby v něm bylo použito 23 krychlí.

Žáci mohou úlohu řešit mnoha různými způsoby počínaje řešením geometrickým, při němž žák postupně sleduje instrukce úlohy – (1), a konče řešením aritmetickým využívajícím rytmu – (2).

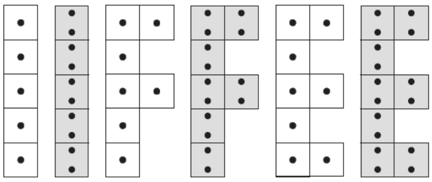
(1) Žák vytvoří cimbuří podle předkresleného plánu, pak pokračuje, jak úloha žádá. Po chvíli spočítá použité krychle a upraví své cimbuří na požadovaný počet krychlí (objem).

(2) Žák si všimne, že v plánu stavby se pravidelně opakují čtverce s jednou a dvěma tečkami a že celou řadu je možné vidět jako řadu „dvojčtverců“ celkem se třemi

tečkami . Jestliže má být cimbuří vytvořeno z 23 krychlí, je třeba, aby v řadě bylo celkem 23 teček. Zjistí, že takovýchto dvojčtverců tam bude 7. Řada končí čtvercem s jednou tečkou a je tedy třeba doplnit ještě čtverec se dvěma tečkami.

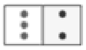
Zde je vidět, že schéma objem krychlové je propojeno s aritmetickým schématem pravidelnost, rytmus a dělitelnost. S aritmetickým schématem násobení přímo propojuje schéma krychlová stavba následující úloha.

Úloha. Vytvoř nejdříve bílou stavbu I. Zjisti, z kolika krychlí se skládá. Zapiš číslo do tabulky. U dalších staveb postupuj stejně.

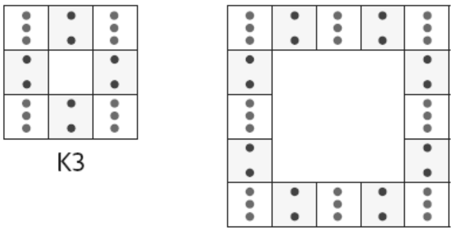


	I	F	E
Počet krychlí ve stavbě	5		

Myšlenka vidět nebo sestrojit krychlovou stavbu z menších krychlových staveb je zdůrazněna v úloze 3. ročníku. Propojení do aritmetiky je zřejmé.

Úloha. Postav stavbu **J** 

Z několika staveb J vytvoř hradby K3, K5, …



K3 K5

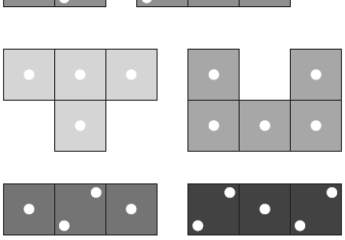
Úloha Nakresli plán jednopodlažní stavby ze 4 krychlí. Kolik takových plánů dokážeš nakreslit? otevírá dveře kombinatorice a shodným zobrazením v prostoru při posuzování stejnosti dvou staveb.

Přímo do kombinatoriky míří úloha:

Úloha. Kolik různých třípodlažních věží umíš postavit z jedné krychle bílé, jedné červené a jedné modré.

Další úloha již přímo zaměřuje pozornost na dvě metrické vlastnosti krychlové stavby. Obdobně jako v minulé úloze je zde přítomna evidence metrických jevů tabulkou, tedy příspěvek do oblasti Práce s daty. Evidence tabulkou se vyskytovala i dříve, když se tabulkou evidoval počet krychlí v jednotlivých podlažích.

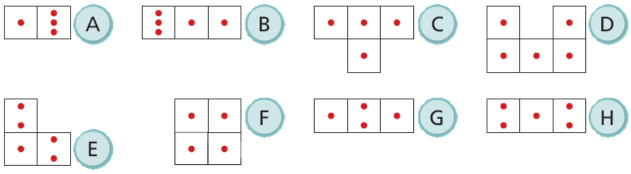
Úloha. Vytvoř stavby a vyplň tabulku.



kolik má podlaží	3					
kolik má krychlí	4					
Počet krychlí v 1. podlaží						
Počet krychlí ve 2. podlaží						
Počet krychlí ve 3. podlaží						
Počet krychlí celkem						

Metrické vlastnosti krychlové stavby jsou použity jako kritéria třídění ve hře SOVA v další úloze. Tedy další schéma, schéma klasifikace a třídění, je propojeno na schéma krychlové stavby.

Úloha. Vytvoř stavby a uhodni, na kterou stavbu myslí Aleš a na kterou Dana.



Aleš:

Má stavba 5 krychlí?	NE
Má jedno podlaží?	ANO
Má čtvercový půdorys?	NE

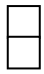
Dana:

Má stavba 5 krychlí?	ANO
Má ve 2. podlaží 2 krychle?	NE
Má ve 2. podlaží 1 krychli?	NE

Ve 3. ročníku žáci řeší úlohy, ve kterých získávají zkušenosti s povrchem mnohostěnu. V této úloze se ale pracuje s krychlovou stavbou a povrch krychlové stavby je úlohou zaveden jako počet čtverců, stěn krychlí, které můžeme vidět, když krychlová stavba stojí na podložce. Slovo povrch se ještě nepoužívá, ale počítá se s tím, co je na povrchu.

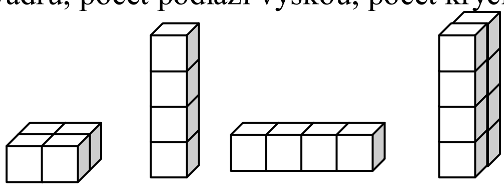
Úloha. Vytvoř stavbu J (viz výše). Je složená ze tří červených a dvou modrých krychlí. Celkem můžeš vidět 18 stěn krychlí. Kolik jich je červených a kolik modrých? Kolik modrých a kolik červených stěn krychlí můžeš vidět na hradbách K3, K5, …, ?

Zavedením *pohledu shora, zepředu, z boku* na krychlovou stavbu zepředu, ze strany a shora se úlohy, ve kterých je přítomen objem, zobtížňují. Například

Úloha. Z 5 krychlí postav stavbu tak, abys ji zepředu viděl takto:  . Najdi více řešení.

Tvorba generického modelu pojmu výška tělesa

Nyní se jisté typy krychlových staveb pojmenují názvem geometrického tělesa, kvádr, a žáci zjišťují jejich rozměry. Kvádr jako krychlová stavba se pro žáky stává generickým modelem kvádru, počet podlaží výškou, počet krychlí, ze kterých je vytvořen, objemem.



Žáci řeší dále úlohy na objem kvádru a generický model obohacují. Následující úloha dává žákům zkušenost s vazbou mezi objemem a rozměry kvádru.

Úloha. Kolik různých kvádrů můžeš vytvořit ze 6, 7, 9, 12 krychlí.

V další úloze je propojena 2D a 3D míra.

Úloha. Podstavou kvádru je obdélník o rozměrech 3 cm × 2 cm. Obsah jedné boční stěny je 10 cm^2, obsah druhé boční stěny je 15 cm^2. Jaká je výška kvádru?

Úloha. Jedna stěna kvádru má obsah 20 cm^2 a druhá stěna má obsah 15 cm^2. Jaký je obsah třetí stěny? Urči rozměry kvádru.

Úloha. Podstavou hranolu je čtverec s obvodem 12 cm. Celková délka všech hran hranolu je 44 cm. Jaká je výška hranolu?

Kromě kvádru se ve 3. ročníku zavádí další tělesa, která jsou rotační tělesa válec, koule a kužel a z mnohostěnů jehlan.

Zkušenosti s metrickými vlastnostmi uvedených těles žáci získávají činnostmi v následující úloze.

Úloha. Řekni, co všechno musíme změřit na válci (krabička lentilek, puk, váleček na těsto), abychom uměli podle změřených čísel vymodelovat stejný válec z plastelíny.

Úloha. Jak bys změřil velikost koule?

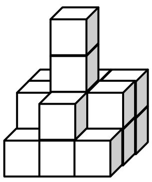
Úloha. Co všechno musíš na jehlanu/kuželi změřit, abys mohl vyrobit podle naměřených hodnot stejný jehlan/kužel? Jak změříš výšku jehlanu/kužele?

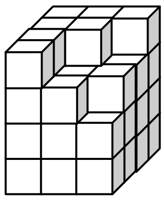
Generický model pojmu výška kvádru se rozšiřuje na výšku dalších uvedených těles.

Povrch tělesa

V dalších úlohách pokračuje pojmotvorný proces pojmu povrch obohacováním repertoáru izolovaných modelů.

Úloha. Franta si chce přebarvit zelenou stavbu na žlutou. Přelepuje jednotlivé čtverečky žlutými nálepkami. Potřebuje jich 41. Kolik nálepek potřebuje na přebarvení pravé stavby?





Informace, že Franta potřebuje 41 nálepek, připomíná, že povrch stavby je tvořen jen těmi stěnami krychlí, které můžeme vidět, když stavba stojí na podložce.

Objem

Počet krychlí stavby dobře znázorňuje také další jazyk, který popisuje konstrukci stavby. Nebudeme zde jazyk představovat, jen si uvědomíme, že to jsou pro žáka další zkušenosti s objemem stavby, která je znázorněna procesuálně.

Další aritmetické schéma, které je propojeno s krychlovými stavbami, je schéma pojmu zlomek. Ten se vyskytuje v popisu stavby. Například:

Úloha. Postav stavbu, když víš, že polovina krychlí stavby je v prvním podlaží, třetina ve druhém a šestina ve třetím podlaží.

V 5. ročníku se začne mluvit o *objemu a povrchu kvádru* a evidují se rozměry kvádru. Zavedou se jednotky míry a precizuje se pojem *kostra*. Objem se dává do souvislosti s rozměry kvádru.

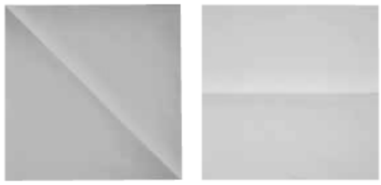
Představuje se první izolovaný model pojmu trojboký hranol pomocí tělesa, které je již osobností pro žáky, pomocí krychle. Krychle je rozpůlena úhlopříčným řezem. Tedy i metrické vlastnosti trojbokého hranolu se vyvozují ze vztahu ke krychli.

Je to zatím jeden z izolovaných modelů. Obdobně se pracuje se čtyřbokým jehlanem, který je vepsán do krychle.

Dále se seznámíme s jednotlivými prostředími 2D geometrie a ukážeme, jak se buduje schéma míry

Prostředí 2D geometrie: Origami, neboli překládání papíru

Při skládání papíru tvaru čtverce podle obrázku získávají žáci manipulativní zkušenosti s pojmem čtverec a jeho průvodními jevy strana, vrchol (izolovaný model pojmu bod), úhlopříčka a střední příčka, s pojmy trojúhelník a obdélník spolu s průvodními jevy, s pojmem osová souměrnost a shodnost úseček – stran čtverce, shodnost trojúhelníků a obdélníků a také s pojmem obsah. To jsou schémata, do kterých tato jednoduchá úloha přispívá.

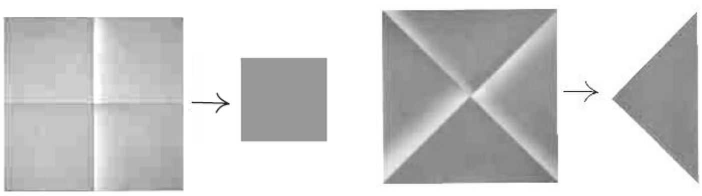


Na obsah čtverce poukazuje sdělení, že čtverec je složen ze dvou stejných (přesněji shodných) trojúhelníků, nebo ze dvou stejných obdélníků. Jiným slovy říkáme, že obsah čtverce je 2 a jednotkou míry je v prvním případě pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, ve druhém obdélník.

Při dalším překládání čtverce vstupuje do hry střed čtverce jako další izolovaný model budoucího pojmu bod, středová souměrnost, pojem jedna čtvrtina a dělení na 4 části.

Ze schématu míra 2D útvarů se zde při těchto aktivitách vyskytla

- shodnost úseček – její izolovaný model shodnost stran čtverce, obdélníka, trojúhelníka. Strany čtverce, obdélníka, trojúhelníka jsou shodné, když se při přeložení na sebe překrývají;
- shodnost 2D obrazců – její izolovaný model shodnost čtverců, obdélníků, trojúhelníků. Dva čtverce, obdélníky, trojúhelníky jsou shodné, když se při přeložení na sebe překrývají;
- obsah obrazce – izolovaný model obsah čtverce: čtverec je tvořen dvěma obdélníky, trojúhelníky, čtyřmi čtverci, trojúhelníky.
-



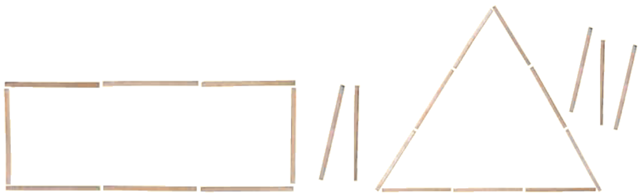
Prostředí 2D geometrie: Dřívka

Která tyčka je nejkratší, která nejdelší – Příběh, porovnávání provázku

Úloha. Vytvoř trojúhelník ze 6 dřívek. Přilož jedno dřívko tak, abys vytvořil další trojúhelník. Přilož dvě dřívka, abys vytvořil další dva trojúhelníky. Přilož tři dřívka a vytvoř další čtyři trojúhelníky.

Je zřejmé, že 6 dřívek, ze kterých je trojúhelník vytvořen, je obvod trojúhelníku, jeden izolovaný model pojmu obvod. Jednotkou délky je jedno dřívko. Vytvoření trojúhelníku ze 6 dřívek se přispívá do schématu trojúhelník jedním rovnostranným trojúhelníkem. Velice často se žáci i studenti pokouší sestrojit trojúhelník nerovnostranný o stranách 1, 2, 3 dřívka. Obvykle si žáci i samy mezi sebou vydiskutují, že to není možné. Poznávají vazbu mezi délkami stran trojúhelníka – trojúhelníkovou nerovnost. Dále se při přikládání prvního dřívka poznává v činnosti střed úsečky, střední příčka, rovnostranný trojúhelník s obvodem 3 dřívka, podobnost trojúhelníků a rovnoramenný lichoběžník. Přiložením druhého dřívka žákům projde rukama kosočtverec a shodnost trojúhelníků. Přiložením třetího dřívka, kdy je původní trojúhelník rozdělen na čtyři shodné trojúhelníky, je otevřena cesta do schématu zlomek – jedna čtvrtina a obsah – trojúhelník je tvořen čtyřmi malými trojúhelníky. Tedy obsah původního trojúhelníku je 4, měřeno malým trojúhelníkem, obdobně jako u překládání papíru.

Při řešení dalších úloh, kdy se přikládají tři dřívka a tvoří se tři čtverce a tři další trojúhelníky, navíc vstupuje do hry zlomek jedna třetina a čtverec jako jednotka obsahu, eventuelně jedna devítina.

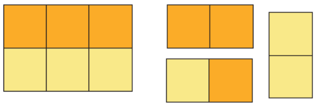


Poměřováním délek jednotlivých dřívek se obohacuje schéma shodnost a neshodnost úseček. Jedna paní učitelka 1. ročníku, BK z Jablunkova, tuto úlohu nápaditě realizovala takto: Přinesla žákům nastříhané provázky. Vždy dva provázky byly stejně dlouhé. Žáci měli za úkol najít toho, kdo měl stejně dlouhý provázek. Pak měli za úkol v lavici rozstřihnout na půlku. Někteří žáci položili provázek na lavice a někde jej rozstřihli. „Jsou ty dvě poloviny provázku stejně dlouhé?“ zeptala se paní učitelka. Žák dva provázky poměřil a nijak překvapeně řekl, že ne.

Z toho plynou dvě věci. 1. Předpojem půlka u některých žáků je jedna ze dvou ne nutně stejných částí a je vázán na tvar – půlka bochníku chleba, půlka jablka, půl rohlíku.
2. Technika dělení něčeho na dvě stejné části je náročná.

Prostředí 2D geometrie: Parkety

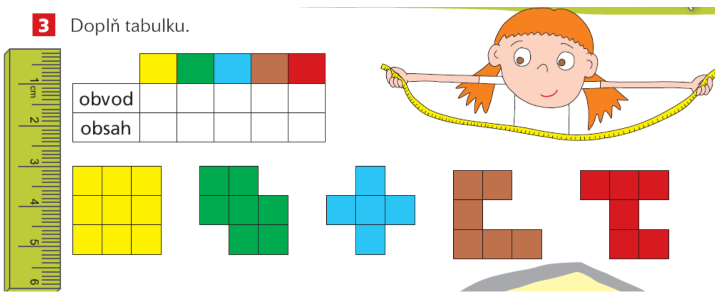
V prostředí parkety žáci získávají bohatě zkušeností s pojmem obsah. Již řešením jednoduchého úvodního úkolu položit parkety na danou podlahu získávají žáci zkušenost s obsahem obdélníku, obsahem parket, ale také přispívají do schématu násobení – třemi parketami o dvou čtverečcích pokryjí obdélník o šesti čtverečcích.



V tomto prostředí se pracuje s různými tvary i velikostmi parket a různými podlahami – různě velkými obdélníky i jinými tvary. V prostředí parket se prolínají schémata shodné zobrazení a kombinatorika.

3 Nakresli podlahu o rozměrech 4 × 4 a pokryj ji parketami , , , ,
tak, že parketa a) , b) , c) sousedí s ostatními parketami.

3 Doplň tabulku.



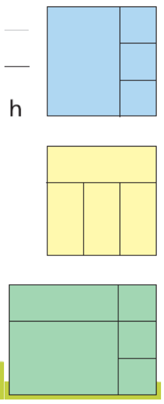
obvod					
obsah					

1 Doplň tabulku.

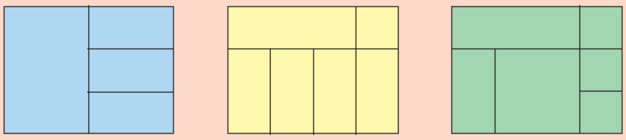
obvod						
obsah						

Kolik je v modrém obrázku obdélníků ze 2 kachlíků?
Kolik ze 3? Kolik ze 4? atd.

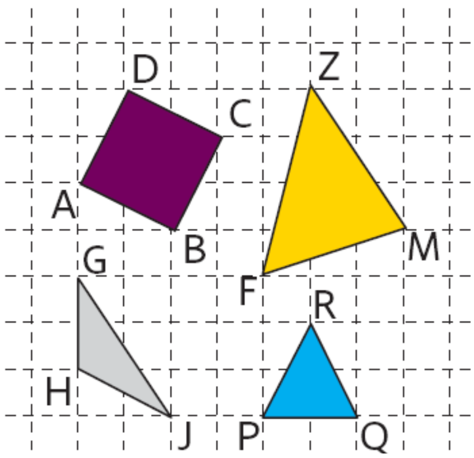
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
MODRÁ											
ŽLUTÁ											
ZELENÁ											



Kolik je v modrém obrázku obdélníků vytvořených ze dvou kachlíků? Kolik ze tří? Kolik ze čtyř? atd.



	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
MODRÁ											
ŽLUTÁ											
ZELENÁ											



Zjisti, která z úseček je delší:

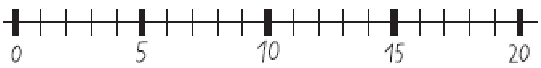
a) AB, nebo FM; b) FZ, nebo PQ; c) PR, nebo QR; d) HJ, nebo MZ; e) GJ, nebo FZ.

Zjisti, které ze čtyř tvarů na str. 30 vyhovují podmínce:

a) uvnitř tvaru se nachází jeden celý čtverec mříže;
b) má dvě strany stejně dlouhé;
c) není jej možné rozdělit úsečkou na dva stejné tvary.

Najdi více úseček, které jsou stejně dlouhé jako úsečka: a) GH; b) AB.

2 Změř v milimetrech vzdálenost mezi čísly: a) 0 a 10; b) 0 a 1; c) 12 a 13.

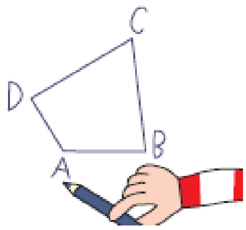


3 Zjisti výpočtem vzdálenost mezi čísly:
a) 2 a 4; b) 0 a 5; c) 5 a 1; d) 2 a 8; e) 9 a 16; f) 8 a 17; g) 15 a 4.
Výsledky ověř měřením.

Do čtvercové mříže narýsuj čtyřúhelník ABCD podle zápisu:

A → → ↓ B → → ↑ ↑ ↑ ↑ C ← ← ← ← D ↓ ↓ ↓ A.

a) Změř jeho strany s přesností na milimetr.
b) Zjisti obvod.
c) Změř délky úhlopříček AC i BD.



Do čtvercové mříže narýsuj trojúhelníky.
a) Pro trojúhelníky ABC, DEF a GHJ platí:

A → → B ↑ ↑ C ← ← ↓ ↓ A; D → → E ↑ ↑ ← F ← ↓ ↓ D;

G → → H ↑ ↑ ← ← J ↓ ↓ G.

b) Zjisti obsah každého z nich.
c) Změř v milimetrech obvod každého trojúhelníku.
d) Vymodeluj trojúhelníky na **geodesce**.

a) Do čtvercové mříže narýsuj čtyřúhelníky a vymodeluj je na geodesce:

ABCD A → → B ↑ C ← ← D ↓ A;
EFGH E → → ↑ F ↑ G ← ← ↓ H ↓ E;
JKLM J → K → ↑ L ↑ M ← ← ↓ ↓ J.

b) Zjisti obsah i obvod každého čtyřúhelníku.

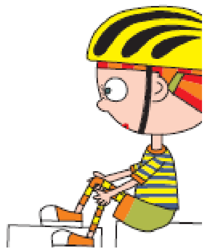
Narýsuj do mříže čtyřúhelníky ABCD, EFGH, IJKL, MNPQ podle šipkového zápisu. Změř obvod každého z těchto čtyřúhelníků:

A → → B ↑ ↑ C ← ← D ↓ ↓ A; E → → ↑ F ↑ ↑ ← G ← ← ↓ H ↓ ↓ → E;
I → → → ↑ J ↑ ↑ ↑ ← K ← ← ← ↓ L ↓ ↓ ↓ → I;
M → → → → ↑ N ↑ ↑ ↑ ↑ ← P ← ← ← ← ↓ Q ↓ ↓ ↓ ↓ → M.

a) Do čtvercové mříže narýsuj čtyřúhelníky a vymodeluj je na geodesce:

ABCD A → → B ↑ C ← ← D ↓ A;
EFGH E → → ↑ F ↑ G ← ← ↓ H ↓ E;
JKLM J → K → ↑ L ↑ M ← ← ↓ ↓ J.

b) Zjisti obsah i obvod každého čtyřúhelníku.

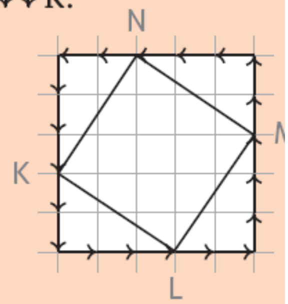


Narýsuj do mříže čtyřúhelníky ABCD, EFGH, IJKL, MNPQ podle šipkového zápisu. Změř obvod každého z těchto čtyřúhelníků:

A → → B ↑ ↑ C ← ← D ↓ ↓ A; E → → ↑ F ↑ ↑ ← G ← ← ↓ H ↓ ↓ → E;
I → → → ↑ J ↑ ↑ ↑ ← K ← ← ← ↓ L ↓ ↓ ↓ → I;
M → → → → ↑ N ↑ ↑ ↑ ↑ ← P ← ← ← ← ↓ Q ↓ ↓ ↓ ↓ → M.

Narýsuj do mříže body A, B, C a D podle zápisu A → → B → C ↑ ↑ D.
a) Narýsuj trojúhelník ACD a zjisti jeho obsah i obvod.
b) Totéž zadání řeš pro trojúhelník BCD.
c) Totéž zadání řeš pro trojúhelník ABD.

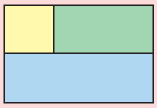
Zápis čtverce KLMN je:
K↓↓→→→L→→↑↑↑M↑↑←←←N←←↓↓↓K.



Kolem čtverce KLMN je nakreslen *rám*.
Je to čtverec tvořený černými šipkami.
Když do rámu vhodně vložíme body
E, F, G a H, dostaneme další čtverec.

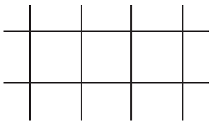
Narýsuj čtvercový rám, jako je na obrázku, a do něj čtverec EFGH.
Čtverec EFGH zapiš pomocí šipek.

Kolik je na obrázku čtverců a kolik obdélníků?



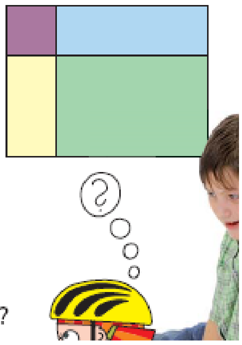
a) Změř jejich rozměry.
b) Zjisti obvod i obsah každého čtyřúhelníku.
c) Obsah zeleného obdélníku je dvojnásobkem obsahu žlutého čtverce. Jakým násobkem obsahu žlutého čtverce je obsah modrého obdélníku?
d) Řekni, jakou částí velkého obdélníku je:
1) modrý obdélník; 2) zelený obdélník; 3) žlutý čtverec.

Narýsuj obdélník o rozměrech 3 × 4:
a) Rozděl jej na 3 části – modrý obdélník 3 × 2, zelený čtverec a žlutý obdélník s obsahem 2 .
b) Řekni, jakou částí velkého obdélníku je:
1) modrý obdélník;
2) zelený čtverec;
3) žlutý obdélník.



4 Kolik je na obrázku čtverců a kolik obdélníků?

a) Změř jejich rozměry.
b) Zjisti obvod i obsah každého čtyřúhelníku.
c) Zina řekla, že je obsah zeleného obdélníku trojnásobkem obsahu žlutého obdélníku. Najdi další podobné vztahy.

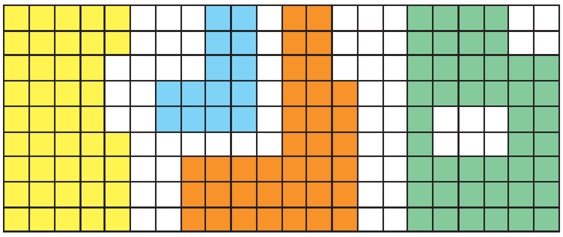


5 Jakou částí velkého obdélníku je:

a) zelený obdélník;
b) modrý obdélník;
c) žlutý obdélník;
d) fialový čtverec?

Měříme výšku a rozpětí.
Výsledky měření zapiš do tabulky.

1 Který způsob výpočtu se ti líbí nejvíce? Najdi si svůj vlastní způsob.

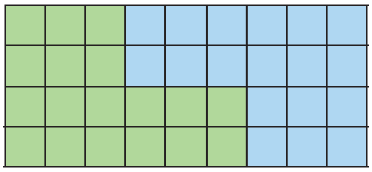


2 Zjisti obsah modrého, hnědého a zeleného útvaru.

3 Nakresli na čtverečkovaný papír útvar, jehož obsah můžeš spočítat podle zápisu:
a) $3 \cdot 4 + 1$; b) $4 \cdot 4 - 2$; c) $5 \cdot 5 + 2 \cdot 3$; d) $5 \cdot 5 - 2 \cdot 3$.

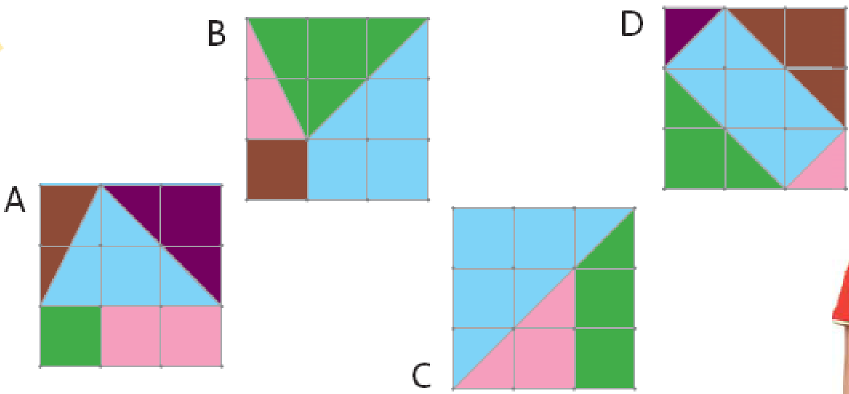
2 Rozstřihni na dvě části:
a) obdélník 6 × 3 a slož z nich obdélník 9 × 2;
b) obdélník 4 × 3 a slož z nich obdélník 6 × 2; najdi dvě řešení;
c) obdélník 6 × 4 a slož z nich obdélník 8 × 3; najdi dvě řešení.

3 Rozstřihni na dvě části:
a) obdélník 9 × 4 a slož z nich čtverec;
b) obdélník 16 × 9 a slož z nich čtverec.



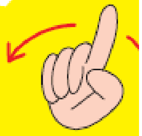
5 Zelený čtverec na obrázku A označíme *zelA*. Podobně označíme růžový obdélník *růžA*. Tři trojúhelníky označíme *hněA*, *modA* a *fiaA*.

a) Popiš stejným způsobem obrázky B, C a D.



b) Kolik je na těchto obrázcích čtyřúhelníků a kolik trojúhelníků? Které útvary jsou stejné (shodné)?

Leoš měřil obvody rovnoramenných trojúhelníků na str. 54. Pak řekl:
a) *Trojúhelník zelD je dvojnásobkem trojúhelníku fiaD.*
b) *Trojúhelník modC je trojnásobkem trojúhelníku fiaD.*



Pavla řekla, že se Leoš mýlí, protože obsah trojúhelníku *zelD* není dvojnásobkem, ale je čtyřnásobkem trojúhelníku *fiaD*, a obsah trojúhelníku *modC* není trojnásobkem, ale je devítinásobkem trojúhelníku *fiaD*.
Jak to vlastně je? Kdo má pravdu?

3 Najdi rovnoramenné trojúhelníky na str. 54:

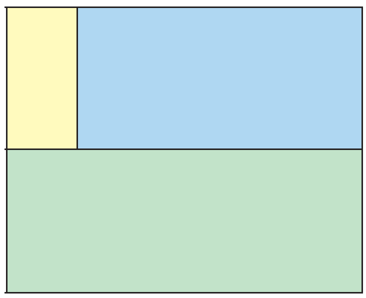
a) Všechny je vyjmenuj (napiš).
b) Změř obvod každého z nich a zapiš jej dvěma způsoby podle vzoru: Obvod *mod*C = 102 mm = 10 cm + 2 mm.
c) Všechny zapsané obvody zaokrouhli na celé centimetry.

3 Kolik je na obrázku čtyřúhelníků?

a) Zjisti jejich rozměry, obsahy i obvody.

b) Kolikanásobkem obsahu žlutého obdélníku je obsah:
- modrého obdélníku;
- zeleného obdélníku?

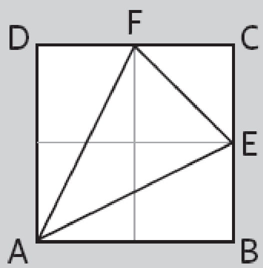
c) Jakou částí velkého obdélníku je:
- zelený obdélník;
- žlutý obdélník?



2 Žáci měřili obvod fialového čtverce ABCD ze str. 30. Hilda změřila stranu AB a napsala: *|AB| = 22 mm*. Vypočítala 4 · 22 = 88 a napsala odpověď: *Obvod čtverce = 88 mm*. Leopold nakreslil úsečku EF (E → → → → ↑ ↑ ↑ ↑ F), změřil délku |EF| = 89 mm, napsal: *Obvod čtverce je 89 mm*. Který z výsledků je chybný?

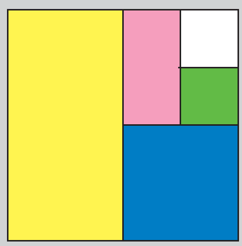
2 Čtverec ABCD s obsahem 4 □ je rozdělen na čtyři trojúhelníky – ABE, AEF, ECF a AFB:

a) Přerýsuj obrázek do čtvercové mříže.
b) Zjisti obsah každého trojúhelníku.
c) Změř v milimetrech obvod každého trojúhelníku.
d) Zapiš trojúhelníky pomocí šipek.



3 Čtverec je rozdělen na pět čtyřúhelníků.

a) Zjisti obsah každého čtyřúhelníku.
b) Zjisti, jakou částí čtverce je žlutý, modrý, růžový, zelený a bílý čtyřúhelník.
c) Bílý čtvereček rozděl na dva stejné obdélníky. Jeden z nich vybarvi hnědě. Jaký obsah má hnědý obdélník? Jakou je částí velkého čtverce?



2 Do čtvercové mříže narýsuj obdélník s obvodem: a) 60 mm; b) 120 mm. Hledej více řešení. Pokaždé zjisti obsah obdélníku.

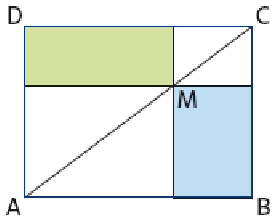
12 Do centimetrové mříže narýsuj obdélník ABCD: A →→→→→→ B ↑↑↑ C.
Tedy |AB| = 60 mm a |BC| = 30 mm.
Střed strany AB označ E, (E = A-o-B), střed strany CD označ F, (F = C-o-D).
Sestroj přímky *u* = AC, *p* = DE, *q* = BF. Označ průsečíky P = *u* × *p*, Q = *u* × *q*.
Změř délky |AP|, |PQ|, |QC|, |AC|, |EP|, |BQ|, |ED|.
Zjisti obsahy trojúhelníků AED, AEP, APD i lichoběžníku EBQP.

13 Narýsuj úsečku AC dlouhou 58 mm.
Narýsuj kružnici *m* se středem A a poloměrem 58 mm.
Narýsuj kružnici *n* se středem C a poloměrem 58 mm.
Průsečíky kružnic *m*, *n* označ B a D.
Sestroj čtyřúhelník ABCD a změř jeho obvod.

AC: |AC| = 58 mm
m: *m* = *k* (A, 58 mm)
n: *n* = *k* (C, 58 mm)
B, D: *m* × *n* = B, D
obvod ABCD = ?

Změř délku úhlopříčky BD.

Narýsuj podobný obrázek na mříž. Zvol |AB| = 90 mm, |BC| = 60 mm. Mřížový bod M leží na úhlopříčce AC tak, že |MC| = 36⁺.
Prověř, že modrý a zelený obdélník mají stejný obsah.
Nakresli další podobné obrázky a hledej takový, u kterého mají tyto obdélníky různý obsah.



2 Zjisti obsah všech čtyřúhelníků na obrázcích A, B, C a D.

2. Aktivity se doprovázejí slovně jazykem intuitivním

Žákovy manipulativní činnosti doprovází učitel slovně. Tím, že na jisté jevy je poukazováno slovy, tím se na dané jevy zaměřuje žákovu pozornost. Přitom slovní doprovod manipulativní činnosti může mít k činnosti samotné dvě různé vazby. Může být řídící – práce dítěte je slovy učitele řízena, nebo průvodní – práce dítěte je komentována, provázena slovy.

Slovní doprovod geometrické činnosti rozdělíme do sedmi etap, přičemž hranice mezi etapami jsou velice neostré. Vstupní nultou etapu beze slov do seznamu sedmi etap nepočítáme.

0. <u>Etapa beze slov.</u>

Žák pracuje samostatně bez jakéhokoliv slovního doprovodu. Získává přitom informace, které nazýváme poznání v činnosti[1]. Když dítě potřebuje své poznání v činnosti verbalizovat, používá slov běžné mluvy každodenního života, ve kterých se odrážejí jeho vlastní zkušenosti.

Učitel svým slovním doprovodem postupně s ohledem na vyspělost žáků postupně zavádí do komunikace geometrickou terminologii.

Žáci o svých aktivitách komunikují. Přitom používají jazyk hovorový, intuitivní. Geometrické objekty, vztahy, situace jsou popisovány převážně jazykem metaforickým. To žákům zajistí

[1] knowledge in action, Begle, E.G. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 13, No. 3 (Aug., 1982), pp. 257-267

celkem dobré porozumění mezi sebou, ale ne vždy s učitelem. Poznání v činnostech z 1. etapy se dostává do kvalitnějšího poznání ve slovech.

3. Učitel postupně precizuje jazyk na matematickou terminologii