Autor: M. Hejný, pracovní materiál, Text neprošel jazykovou kontrolou.

6. Proto-algebra

6.1. Předpona „proto-“

Omezení. Slova *algebra, aritmetika, operace, rovnice,…* chápeme v rozsahu základní školy.

Řecká předpona proto označuje prvotní, základní, původní. Například *protogalaxie* je obrovská plynná koule, uvnitř které se houstnutím tvoří prahvězdy, které posléze utvoří galaxii. Podobně *proto-algebrou* nazýváme to matematické prostředí v hlavě žáka, uvnitř kterého se rodí algebraické myšlení.

Je zřejmé, že algebra se rodí a vyrůstá především ze světa aritmetiky. Přesto nelze říci, že aritmetika je totéž co proto-algebra. Rozdíl je zde trojí:

- Ne každý pojem aritmetiky je zárodkem některého pojmu algebraického. Například pojem *dělitelnost* do algebry ZŠ nevstupuje.
- Těžištěm aritmetiky, tak jak je pojímána v první až páté třídě, jsou operace, žel cílené spíše na počtářské dovednosti než na porozumění aritmetice. Těžištěm proto-algebry jsou soubory vztahů a tedy schémata.
- Významná část algebraického myšlení - modelování jevů pomocí jazyka algebry – leží spíše v geometrii než v aritmetice. Konečně slavná Euklidova kniha Základy, která je prvním uceleným poznáním jisté discipliny v historii lidstva, podává vše, co my dnes zapisujeme pomocí algebry (například součet prvních n členů aritmetické posloupnosti v jazyku geometrie.

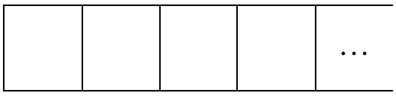
Pozornost zaměříme na tu část schématu proto-algebry, která leží uvnitř aritmetiky. Jejím jádrem je pohyb od izolovaných modelů ke generickému a dva abstrakční zdvihy:

- přechod od explicitního k implicitnímu porozumění úloze a
- přechod od procesuálního ke konceptuálnímu kódování situace.

6.2. Příklad

Žáci třetího ročníku tvoří z dřívek řadu čtvercových oken (viz obr.). Pak řeší úlohu:

Úloha 1. Kolik dřívek je třeba na vytvoření jednoho, dvou, tří,… oken.



Žáci zjistí, že na jedno okno potřebuji 4 dřívka, na dvě okna 7 dřívek, na 3 okna 10 dřívek,… V diskusi třídy se doberou k obecnému poznání o vztahu mezi počtem oken (o) a počtem dřívek (d).
Proces objevování vztahu popíšeme pomocí osmi hypotetických žáků, kteří úlohu ve třídě řeší. Přitom nápad jednoho je dále rozvinut a vylepšen dalším žákem. Při skutečném objevování jednotliví žáci postupují různě rychle a zatím co několik jedinců rychle postupuje k výsledku (Cyril, Filip, Gita), jiní nabývají vhled do situace pomalu přes vlastní izolované modely.

1) Alex zjistil, že na jedno okno potřebuje 4 dřívka. Vedle toho postaví dvě okna a spočítá, že k tomu potřebuje 7 dřívek. Dále postaví tři okna a spočítá, že zde použil 10 dřívek. Pro hocha je každý výpočet nová úloha. Jednotlivé poznatky jsou v jeho mysli uloženy jako **izolované modely**.

2) Blanka začala jako Alex. Zjistila, že na jedno/dvě/tři okna potřebuje 4/7/10 dřívek. Čtvrtou konfiguraci již nestaví od začátku. Využije tu, kterou již postavila a další okno vytvoří přidáním dalších 3 dřívek. Počet dřívek najde součtem 10 + 3 = 12. Tak pokračuje dále. Dívka odhalila **vztah** mezi sousedními izolovanými modely. Zatím svoje poznání neformulovala. Má ho pouze „v rukou“. Je to **poznání v činnosti** (knowledge in action).

3) Cyril počítá jako Blanka, ale navíc si výsledky eviduje tabulkou. Z ní vidí, že: *Ve druhé řádce čísla přibývají po třech*. Svůj objev zveřejní. Již

okna		1	2	3	4	…

dřívka		4	7	10	13	…

nemusí stavět další okna; pouze doplňuje tabulku.

Cyril formuloval **procesuální zákonitost tabulky** tj objevil **procesuální generický model** dané situace. Tím Blančino poznání v činnosti posunul na **poznání ve slovech** (knowledge in words). Na popud učitelky, ukazuje svůj objev třídě.

První klíčový okamžik objevu. Třída se dovídá, že výsledky nutno vložit do tabulky a z ní pak se již další výsledky získávají lehce. Učitelka na objev reaguje radostí a pochvalou a klade dvě otázky. První zní *Proč to tak je?* druhá zní *Uměl by někdo říct, kolik dřívek potřebujeme na 50 nebo dokonce na 100 oken?*

4) Dana, která samostatně dospěla ke stejnému výsledku jako Cyril odpoví ihnedDa: *To je proto, že když mám již dvě okna a chci dodělat třetí, musím přidat tato* (ukazuje) *tři dřívka. A když mám tři okna přidám další tři dřívka* (přidává je) *dostanu 4 okna.* Dana tedy Cyrilem formulovanou zákonitost **vysvětlila**, argumentačně podepřela. Teď již nebudeme mít pochyby, že by Cyrilovo pravidlo platilo jen pro malá čísla. Vidíme, že platí napořád.

5) Ema si udělá dlouhou tabulku a začne ji doplňovat. Když udělá dvacátý sloupek všimne si, že v desátém sloupci bylo pod číslem 10 číslo 31 a ve dvacátém pod číslem 20 číslo 61. Čeká, že pod číslem 30 bude číslo 91. Když to prověří, ohlásí, že pod 50 je 151 a ukáže, jak to počítá. Řekne: *vezmu to co je před nulou, vynásobím třemi a připíši 1* (ilustruje to příkladech 10 → 1 → 1.3 = 3 → 31, nebo 20 → 2 → 2.3 = 6 → 61, nebo 30 → 3 → 3.3 = 9 → 91, a nakonec dopočítá i 50 → 5 → 5.3 = 15 → 151. Ema **odhalila konceptuální zákonitost sloupců 10, 20, 30,…** Její objev se spíše týkal číslic než čísel. Byl to **objev** ještě více **„alchymický“** než matematický. Dává odpověď na některé případy a Ema neví, proč to tak funguje.

6) Filip, který již hledal nějaké pravidlo, jak z čísla horního řádku najít číslo dolního, ihned pravidlo Emy pochopil jako matematickou zákonitost. Řekl: *To platí pro všechny sloupce. Například v tomto sloupci* (ukáže na sedmý) je nahoře 7 a dole 7.3 + 1 = 22. Hoch **objevil** a slovy formuloval **konceptuální zákonitost tabulky.** To že, k ilustraci zvolil sedmý sloupec, je nepodstatné. Co platí pro sedmý sloupec, platí pro každý sloupec. Sedmý sloupec byl zvolen jako **konceptuální generický model** zákonitosti tabulky.

7) Gita řekla: *Když okna vynásobím 3 a přičtu 1 dostanu dřívka.* Na první pohled neřekla nic jiného než Filip. Ale to by byl omyl. Gita **mění generický model na proto-algebraický poznatek** tj. **abstraktní poznání ve slovech**.

Učitelka žádá Gitu, aby svůj objev napsala na tabuli. Ona napíše okna . 3 + 1 jsou dřívka. Učitelka ji radí, jak to napsat více matematicky. S pomocí učitelky pak dívka napíše dřívka = 3.okna + 1.

8) Hugo (někdy v budoucnu, ve 4. ročníku) napíše **abstraktní poznatek** v algebraickém zápisu: $d = 3o + 1$, kde d je počet dřívek a o je počet oken. Tím bude **proto-algebraický** zápis Dity převeden na **algebraický** zápis Huga.

6.3. Aritmetika a Algebra

Předmětem zkoumání **aritmetiky** je jev mnohosti. Nástroji tohoto zkoumání jsou

- objekty - čísla přirozená, později i celá, racionální a reálná
- evidence - relace „větší/menší než“, později i „dělitelnost“,
- činnosti - binární operace sčítání, odčítání, násobení a dělení, a monární operace zaokrouhlování,
- znakový jazyk - číslice, desítková soustava, znaky <, +, -, x, :, později i zlomek, desetinná čárka,. | (dělitelnost); další znaky jako čárky, kolečka, šipky,... dále obrázky, grafy, schémata, tabulky...

Předmětem zkoumání **algebry** jsou aritmetické vztahy a soubory aritmetických vztahů. Nástroji tohoto zkoumání jsou všechny nástroje aritmetiky a navíc

- objekty - vztahy, zejména rovnosti, rovnice, později i nerovnosti a nerovnice zapsány s pomocí písmen; soubory číselných výrazů,
- evidence - přehledně organizované soubory číselných vztahů;

- činnosti - zobecňování souboru aritmetických vztahů do jediného algebraického vztahu, ekvivalentní a později i neekvivalentní úpravy algebraických vztahů.
- znakový jazyk - tabulky, později mocný nástroj, písmeno.

Tedy algebraické myšlení se tvoří v lůně myšlení aritmetického. Svůj algebraický svět si žák začíná vynořovat ze světa algebry od okamžiku, kdy poprvé zaměří svoji pozornost na souvislosti mezi aritmetickými vztahy. Tabelární evidence aritmetických jevů je nejpřirozenější cesta jak takové zaměření pozornosti iniciovat.

6.4. K čemu ta (proto-)algebra vlastně je?

Tématický celek Algebra (jako jazyk písmen) spadá až na 2. stupeň ZŠ. Na 1. stupni tuto oblast připravujeme propedeuticky. V obou případech učitel musí poznat smysl této výuky.

Když jsem učil na 2. stupni algebru, musel jsem občas na otázku z nadpisu odpovědět zvědavému rodiči. Otázku kladli někdy i rodiče s titulem inženýra, kteří tvrdili, že jejich ratolest půjde studovat jazyky a algebru nepotřebuje. Oni ovšem algebrou rozuměli nácvik práce s výrazy pomocí pravidel typu $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Mým úkolem bylo vyvést je z omylu a ukázat jim, že smyslem tohoto jazyka písmen je

Schopnost popisovat a zkoumat sérii (aritmetických) objektů a vztahů najednou.
Například nekonečnou sérii sloupců tabulky z úlohy 1 zachytit jediným vztahem d = 3o + 1. Když zvědavého rodiče takovéto vysvětlení neuspokojí, dám mu úlohu pro třetí ročník:

Úloha 2. Zjisti, kolik existuje součtových trojúhelníků takových, že v první řádce jsou 4 čísla jejichž součet je 5 a číslo v poslední řádce je dělitelné 3.

Úlohu lze řešit i na úrovni 1. stupně, ale chce to trpělivost; pomocí algebry je řešení rychlé. Pomocí algebry najdeme $j = a + 3(b + c) + d$. Protože $3(b + c)$ je dělitelné 3, stačí žádat aby i součet $a + d$ byl dělitelný 3. To nastává v pěti případech: (a,d) = (0,0), (3,0), (2,1), (1,2) a (03). Pak již lehce dopočítáme, že hledaných trojúhelníků je 6 + 4.3 = 18. Ještě ostřeji síla algebry vystoupí, když u úlohy 2 místo čísla 5 dáme číslo 6, nebo dokonce číslo 60.

V knize Hejný, Kuřina: Dítě, škola a matematika, Portál, 2001 v odstavci 1.2 najdete příběh ing. V. Klemona o tom, jak jistý ekonomický inženýr, který nevěděl k čemu mu znalost algebry je, zbytečně dělal stovky dlouhých výpočtů.

6.5. Jak (proto-)algebře učit?

Stejně jako kterékoli jiné oblasti matematiky: Předkládat žákům vhodné kaskády úloh, moderovat třídní diskusi, obdivovat objevitele, povzbuzovat malověrné.

Výše uvedený příklad popisuje řešitelský pohyb, který ilustruje budování proto-algebraického schématu. V něm se najdeme více proudů. Základní je proud generického modelu:

izolovaný model → generický model (= zrod schématu) → budování podle teorie

Uvnitř něj pak teče proud proces → koncept (případně i → procept). Oba tyto proudy popisuje tabulka (ta není definitivní). Řešitelský proud, který mění úlohu implicitní na explicitní bude uveden v 6.6. Žáci, kteří řešíce různé úlohy realizují popsaný poznávací pohyb jsou, podle našeho přesvědčení, učeni dobře. Naopak žáci, kteří jsou vedeni jen k nabytí rutiny při zacházení s písmennými výrazy jsou učeni nevhodně. Jako byl zřejmě ekonom z příběhu ing. Klemona.

<table>
<tr><th>Nástroje</th><th>Úroveň poznání</th><th colspan="4">Úroveň artikulace</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Systemizace modelů do souboru (např. tabulkou)</td><td>izolované modely</td><td rowspan="5">Pouze činnost</td><td rowspan="5">Činnost a čísla</td><td rowspan="5">slova</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">vztah mezi izolovanými modely</td></tr>
<tr><td>Hledání vazeb v posloupnosti</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Hledání vazeb v konceptu</td><td>Generický model procesuální</td><td rowspan="3">písmena</td></tr>
<tr><td>Generický model konceptuální</td></tr>
<tr><td>Hledání obecné vazby</td><td>Abstraktní poznatek</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

6.6. Explicitní a implicitní úloha

Oba termíny osvětlíme nejprve příkladem. Je sestaven ze dvou úloh určených žákovi prvního ročníku.

Úloha 3. $3 + 4 = ?$
Úloha 4. $3 = ? – 4$

Pro žáka 1. ročníku je úloha 3. snadná, ale úloha 4. je náročná. Proč? Protože u úlohy 3. žák ihned ví, jak ji bude řešit. Zná strategii řešení: na počitadle oddělí 3 kuličky, pak k nim přidá 4 kupičky a říkánkou „jedna, dvě, …, sedm zjistí, že výsledek je 7.
Tato úloha je pro daného žáka úlohou *explicitní.*
Naproti tomu úlohu 4. musí žák řešit experimentováním. Místo otazníku dá například číslo 6. Prověřuje rovnost $3 = 6 – 4$ a zjistí, že to nevyhovuje. Zkusí tedy dát místo otazníku číslo 9. Opět špatně. Pak zkusí číslo 7. Sláva, vyšlo. Úloha je vyřešena.
Tato úloha je pro daného žáka úlohou *implicitní.*

Vymezení. Řekneme, že úloha X je pro žáka Y úlohou *explicitní,* jestliže žák Y zná postup, jak najít řešení úlohy X. Žákův postup řešení pak nazveme *přímý.* V opačném případě řekneme, že úloha X je pro žáka Y úlohou *implicitní*. Žákův postup řešení pak nazveme *nepřímý*, nebo, přesněji, řekneme že žák Y použil metodu pokus-omyl.

Slova *explicitnost / implicitnost* nevypovídají o úloze, ale o způsobu jak konkrétní žák úloze rozumí. Řekneme-li přesto, že „úloha X je ex-/im- plicitní“ máme tím na mysli, že je takovou vzhledem ke (skoro) všem žákům, kterým je předkládána.
Poznámka. Důkladnější zkoumání jevu *„plicitnosti“* ukáže, že se nejedná o vlastnost polaritní, ale škálovou. Existují úlohy více a méně implicitní. Rozumíme tím případ, kdy úloha jako celek je pro žáka úlohou explicitní, ale některá její část je implicitní. Proto při studiu „plicitnosti“ doporučujeme uvažovat o míře implicitnosti úlohy X vzhledem k žáku Y.

6.7. Od implicitního k explicitnímu chápání úlohy

Pro žáka prvního ročníku je úloha 4. úlohou implicitní. Pro žáka sedmého ročníku je to již úloha explicitní. Tento žák totiž ví, že vztah $3 = ? – 4$ lze transformovat na vztah $3 + 4 = ?$. A jak je to u žáka třetího ročníku? Je to pro něj úloha explicitní, nebo implicitní? Odpověď není jednoznačná. Pro některé žáky je to ještě stále úloha implicitní, ale pro některé je to již úlohy explicitní. Didaktická otázka tedy zní: Jak může učitel urychlit tento přechod? Jakými prostředky lze žákům usnadnit přechod od implicitního k explicitnímu chápání úlohy 4?

Podívejme se na proces, který úlohu implicitní změnil na explicitní, tedy na to, jak se v žákově vědomí zrodil, rozvinul a domestikoval poznatek, který v jazyku písmen můžeme zapsat jako myšlenkovou transformaci (úpravu)

$$a = ? – b \qquad \to \qquad ? = a + b \tag{i}$$

Zmíníme tři cesty po nichž se poznatek (i) může dostat do vědomí žáka. Jsou to: 1) sdělení učitele, 2) asociace vytvořená nácvikem a 3) objev žáka.

- **Sdělení**. Učitel naučí žáka, že vztah $x – y = z$ lze transformovat na vztah $x = y + z$. Pak nácvikem vede žáka k osvojení si této dovednosti. Tato cesta je i v současné škole asi ta nejběžnější. Několik málo žáků třídy objeví nový poznatek samostatně, ale většině to prozradí učitel.

- **Objev**. Učitel vytvoří kaskádu úloh, které usnadňují objev transformace (i). Například
  Úloha 4a. $a = b – ?$ (čísla a i b jsou pevně dána, například $a = 2$, $b = 9$)
  Úloha 4b. $a + ? = b$ (čísla a i b jsou pevně dána, například $a = 3$, $b = 7$)
  Úloha 4c. $? + a = b$ (čísla a i b jsou pevně dána, například $a = 2$, $b = 9$)

Úlohy těchto typů z času na čas učitel předkládá žákům a žáci se je učí řešit. Nejprve úlohu 4a, protože zde mají srozumitelnou strategii **odpočítávání**: kolik mám od 9 kuliček počitadla ubrat, aby tam zůstaly 2 kuličky? Žák odpočítává ubírané kuličky *jedna, dvě, tři, čtyři, pět, šest, sedm.* Odpověď zní: 7. Úloha 4b je trochu náročnější. Je řešena strategií **dopočítávání**, která je dána otázkou: kolik mám přidat k 3, abych dostal 7? Na jedné ruce žák drží 3 prsty a na druhé pak dopočítává *čtyři, pět, šest, sedm*. K dopočítání bylo zapotřebí 4 prstů, tedy odpověď je 4. Nejnáročnější je přípravná úloha 4c. Žák, který zná prostředí schody, si strategii řešení určí otázkou: na který schod se mám postavit, abych po dvou krocích směrem nahoru stanul na schodu číslo 9? Nejprve žák řeší tyto úlohy metodou pokus-omyl. Pak se ale náhle v jeho hlavě objeví **strategie „od konce“**. Místo toho, abych kráčel nahoru 2 schody na schod 9, budu ze schodu 9 kráčet 2 kroky dolů. To se dostanu na schod 7. Tímto poznáním se úloha 4c stává pro daného žáka úlohou explicitní, protože žák již zná návod k jejímu řešení. Když se pak podobná úloha opět objeví na vyučování, bude tento žák rychle hotov a učitel jej požádá, aby ukázal, jak to řešení tak rychle objevil. Žák vysvětlí svůj postup a i když to vysvětlení bude asi pro většinu žáků nesrozumitelné, několik spolužáků to pochopí a později od nich to převezme celá třída.

Metoda sdělení nevytváří u většiny žáků vnitřní potřebu poznání. Vytváří ji pouze cesta objevu. Každý, kdo nabyl zkušenosti s lopotným hledáním řešení je připraven uvítat myšlenku, která mu pomůže námahu odstranit.

Potřeba najít efektivnější postup je vyvolána energetickou náročností používaného postupu. Učitel, který tento mechanismus nezná, považuje zdlouhavé počítání za plýtvání energií i časem. Spěchá pomoci žákům účinným návodem na řešení. Žák, který ještě neměl příležitost poznat strasti řešitele užívajícího metodu pokus-omyl, pociťuje učitelův zásah do svého kognitivního vývoje nikoli jako pomoc, ale jako nátlak. Proto nabízenou informaci nevítá, ale buď trpně akceptuje jako nutnost, nebo dokonce odmítá. S odmítáním se setkáváme obvykle u těch nejkvalitnějších žáků.

Potřebu poznání nabudou všichni žáci, kteří nabyli zkušenosti s energetickou náročností daných úloh. Nejen ti, kteří nakonec poznání (i) objeví, ale i ti, kteří je pak od svých kamarádů převezmou. Převezmou jej jako poznání potřebné, hledané a vítané. Nikoli jako něco shůry přikázané.

6.8 Metoda uvolňování parametru

Uvedli jsme, že učitel může objev transformace vztahu 3 = ? – 4 na vztah ? = 3 + 4 urychlit vhodnou volbou úloh. Didaktickou techniku, kterou zde máme na mysli, nazýváme *metoda uvolňování parametru.*

Ve vztazích (i) vystupují dvě čísla: a, b. Jedno z těchto čísel fixujeme a druhé - parametr - necháme probíhat posloupnost čísel 1, 2, 3, 4, ... Vytvoříme tím sérii úloh a žáci jejich řešením získají sérii výsledků. Série dvojic (zadání,řešení) poskytne důležitou informaci, když bude zapsána přehledně, například tabulkou. Pro $a = 1$ vznikne tímto postupem levá část tabulky 1.

Zadání	1 = ? – 1	1 = ? – 2	1 = ? – 3	1 = ? – 4	…	1 = ? – číslo
Řešení	? = 2	? = 3	? = 4	? = 5	…	? = číslo + 1

Tab. 1

Vztah mezi zadáním nalezený v prvních sloupcích tabulky formulují žíci jako návod na řešení:

k (zadnímu) číslu přidej jedna.

Pomocí uvedeného návodu je žák schopen rychle a bezpečně řešit i úlohy velice náročné, v nichž zadní číslo je například 37.

Podobnou tabulku vytvoří žáci pro případy $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$ a najdou příslušné návody.

Čtyři získaná pravidla přehledně zapíší:

$a = 1$	k zadnímu číslu přidej 1
$a = 2$	k zadnímu číslu přidej 2
$a = 3$	k zadnímu číslu přidej 3
$a = 4$	k zadnímu číslu přidej 4

Ze zápisu okamžitě vidět, jak to půjde dál. Toto poznání je již zobecnění druhého stupně. Žáci je formulují jako *univerzální pravidlo* na hledání řešení:

k zadnímu číslu přidej číslo přední (ii)

Na učitele zde číhá nástraha netrpělivosti. Když neodolá nutkání usnadnit žákům práci s neobratným slovním vypisováním pravidel a ukáže jim možnost znakového zápisu pomocí písmen, tak

1) urychlí poznávací proces povrchový zaměřený na objev pravidla, ale
2) zpomalí poznávací proces hlubinný zaměřený na objevování světa algebry.

Objevem návodu (ii) získal žák silnou zbraň na řešení všech úloh typu $a = ? - b$. Od této chvíle jsou dané úlohy pro žáka úlohami explicitními. Objevem (ii) se poznávání strategie řešení úlohy typu $a = ? - b$ nekončí. Poznání, které je dáno návodem (ii) je procesuální. To ještě může postoupit na poznání konceptuální.

6.9 Od procesuálního ke konceptuálnímu porozumění

Připomeňme dva způsoby kódování matematického poznatku ve vědomí člověka: procesuální a konceptuální. Podstatou procesuálního způsobu je průběhovost, činnost, produkce, posloupnost myšlenkových kroků odehrávající se v čase. Podstatou konceptuálního způsobu je nadčasovost, produkt, výsledek činnosti, který se při kódování může rozkládat na části, ale tento rozklad nemá žádné pevné časové pořadí. Podstatný je pouze celek.

Polarita procesuální vs. konceptuální je přítomná i v mnoha oblastech lidského snažení. Například v umění. Hudba je procesuální, výtvarné umění je konceptuální. Houslista nemůže hrát skladbu se zpřeházenými takty. Sled tónů je předepsán. Udělá-li houslista chybu, nemůže se k ní později vrátit, aby ji opravil. Chce-li omyl napravit, musí zahrát celou skladu znovu. Výtvorem houslisty je produkce, která je časově pomíjivá. Naproti tomu malíř nemá předepsáno, zda nejprve nakreslí obličej a pak šaty. Namaluje-li něco špatně, může chybu později opravovat. Způsob, kterým maluje, čas, který na to spotřebuje, jsou druhořadé. Prvořadý je obraz, produkt.

Mnohé matematické (a asi i nematematické) poznání přichází do našeho vědomí většinou jako proces a často se později ekonomizuje do konceptu. Rozšíření porozumění procesuálního na konceptuální patří k fundamentálním zdvihům kognitivní ontogeneze (konečně i fylogeneze). Setkáváme se s ním v průběhu celého matematického vzdělávání. E.M.Gray a D.O.Tall zavedli pro konceptualizovaný proces termín *procept.* Anglický novotvar je složeninou slov proces a koncept. Viz [1].

Ke konceptualizaci dochází již při poznávání prvních čísel, například pojmu TŘI. Nejprve se dítě naučí říkanku "jeden, dva, tři,..." (proces). Pak při řešení úkolu "Kolik jablek leží na stole?" dítě počítá "jeden, dva, tři, tři". První tři slova jsou proces, určují pořadové číslo každého z počítaných jablek. Poslední číslo je již koncept vypovídající o celku: Zde jsou tři jablka. Později dítě nebude počítat, ale řekne pouze poslední slovo, tři. Proces již nebude potřebný. Již byl konceptualizován. Dítě ví co je tři.

Exemplární případ přechodu od procesuálního ke konceptuálnímu kódování je příběh o tom, jak žáček K.F.Gauss vyřešil úmornou úlohu 1 + 2 + 3 + ... + 100 = ?, kterou dostala celá třetí třída za trest, protože zlobila. Učitel předpokládal, že žáci budou dlouho přičítávat další a další čísla. Malý Karl Fridrich však uchopil zadání nikoli jako návod na proces, ale jako hotový celek. Tento celek přeformuloval do tvaru 100 + 99 + ... + 2 + 1 = ?, oba celky napsal pod sebe a sčítal:

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = ? \\ \underline{100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1 = ?} \\ 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101 = ? + ? \end{array}$$

V posledním řádku je součet sto čísel 101, což je 10100. Tedy ? + ? = 10100 a po vydělení dvěma máme ? = 5050.

Motivační impuls, který vytváří potřebu přechodu od procesuálního ke konceptuálnímu chápání jevu tkví v energii. Energetický a časový výdaj, ke kterému je žák procesuálním řešením nucen, vytváří silnou potřebu najít snazší cestu, objevit konceptuální vhled.

6.10. Konceptualizace poznání (ii)

Vraťme se k části 6.6 Tam jsme řekli, že poznáním (ii) proces poznávání řešitelské strategie úloh typu $a = ? - b$ nekončí. Poznání (ii) obsahuje totiž *jistou* nedostatečnost. Čísla a,b (v jazyku žáků nazvána jako "přední" a "zadní") v něm vystupují nerovnocenně. Číslo b je základní a číslo a se k němu přidává. Tedy b je *stav (mnohost)*, a je *operátor.* Hierarchická různost obou čísel byla do vědomí žáka vložena způsobem objevu pravidla (ii). První zobecnění uvolnilo parametr b, druhé pak parametr a. Informace o hierarchii objektů a, b je přinejmenším zátěží žákovy paměti. Často působí jako šum a někdy dokonce jako překážka (obstakl) při použití pravidla v jiné souvislosti.

Nadbytečnou nežádoucí informaci si kognitivní síť obvykle odstraní sama v rámci procesu krystalizace nového poznatku. Bude-li žák pravidlo (ii) častěji používat, začne nepodstatná informace slábnout. Zejména bude-li pravidlo aplikováno v různých kontextech. Jakmile žák objeví že vložená hierarchie čísel a, b je umělá, objeví konceptuální reprezentaci poznání (ii) tj. návod

Přední a zadní číslo sečti (iii)

Přechod od poznání (ii) k poznání (iii) je přechodem od procesuálního ke konceptuálnímu kódování poznatku.

Poznání (iii) je

- blíže k transformaci (i) než bylo poznání (ii),
- poskytuje hlubší vhled do celé situace,
- samo může být východiskem dalšího poznávání.

Poslední z uvedených tří myšlenek ukazuje jak může učitel u daného žáka diagnostikovat míru procesuality/konceptuality daného poznatku. K tomu uvedeme ilustraci. Žákovi předložíme složitější úlohu, jejíž částí bude původní úloha. Například zadání

<u>Úloha 3</u>. Vyřeš úlohy 3 = ? – 4 a 6 = ? – 7 a jejich výsledky sečti.

(Barvou zde – ale i ve třídě na tabuli – odlišujeme čísla ? a ?.) Žák znalý pravidla (ii) bude postupovat ve třech krocích:

1. Najde řešení první úlohy, tedy vypočte ? = 3 + 4 = 7.
2. Najde řešení druhé úlohy, tedy vypočte ? = 6 + 7 = 13.
3. Oba dílčí výsledky sečte; obdrží 7 + 13 = 20.

Řešení je dobré, ale řešitelskou strategii lze urychlit. Žák, který bude řešit několik podobných úloh může použít pravidlo (iii) účinněji. Nebude hledat dílčí výsledky ? a ?, ale rovnou jejich součet: 3 + 4 + 6 + 7. Ten se hledá lehce, protože 3 + 7 = 10 i 4 + 6 = 10. Tato nová strategie je již více konceptuální, protože přeskakuje dílčí výpočtové kroky. Uvedená úloha je nejen diagnostickým nástrojem, ale může být použita i jako urychlovač procesu objevu návodu (iii).