1. Úvod

Operace násobení tradičně patří k základním aritmetickým poznatkům. Učitelé, s nimiž jsme o cílech vyučování tohoto tématického celku diskutovali, měli shodný názor, že hlavním cílem je naučit žáka malou násobilku a písemné násobení vícemístných čísel.

Náš názor je odlišný. Vytvořili jsme si jej na základě experimentů, studiem literatury a zejména během dlouhodobého experimentálního vyučování na ZŠ. Podle nás hlavním cílem tohoto celku nejsou dovednosti, ale porozumění. Porozumění dvojího druhu: sémantické a strukturální. Řečeno podrobněji, jde o to zvyšovat schopnost žáka:

a) rozeznat životní situace, v nichž je operace násobení přítomna;
b) porozumět operaci násobení jako organické části aritmetické struktury.

Netvrdíme, že nácvik písemného násobení je třeba z osnov vypustit. Naopak, v kapitole 7 zdůvodňujeme, proč doporučujeme tuto dovednost cvičit i nadále. Důraz ale klademe více na porozumění než na nácvik. Jsme přesvědčeni, že žák, který násobit neumí, ale násobení rozumí, je na tom podstatně lépe než ten, který umí skvěle násobit, ale podstatě operace nerozumí.

Uvedené stanovisko se pokusíme vyložit v dialogu se čtenářem. Budeme jej vybízet ke kritickému hodnocení našich názorů. Čtenář, který najde pádné argumenty svědčící o nepřesnosti některých našich úvah nebo představ, bude mít ze čtení větší potěšení.

Text je určen učiteli, který chce na sobě pracovat. Lze jej číst tak, jak je napsán, ale lze jej číst i na přeskáčku. Například čtenář, který rád řeší zajímavé úlohy, může začít kapitolou 4. Nebo začít kapitolou 9, ve které formulujeme náš názor na edukační styl.

2. Pohled do historie

V průběhu posledních čtyř tisíciletí vymysleli lidé mnoho způsobů písemného násobení. Každý z těchto způsobů může být pro nás, učitele, inspirativní. Dva způsoby ukážeme. V ilustracích pracujeme s naší číselnou soustavou, nikoli s tou původní.

Egyptské násobení. Ve starověkém Egyptě neznali násobilku, jak ji používáme dnes. Násobili pomocí zdvojování. Například součin 17 × 5 počítali tak, že číslo 5 rozložili na 1 + 4 a číslo 17 zdvojovali: 17 × 2 = 34, 17 × 4 = 34 × 2 = 68. Pak sečetli 68 + 17 = 85.
Stručně to lze psát: 17 × 5 = 17 × (4 + 1) = 17 × (2 × 2 + 1) = 17 × 2 × 2 + 17 = 85.

Uvedeme i složitější výpočet, například 314 ×69. Číslo 314 budeme zdvojovat a číslo 69 rozložíme na součet 64 + 4 + 1. Počítáme pomocí tabulky 1. Ve druhém sloupci jsou mocniny dvojky: 1, 2, 4, 8, 16, 32 a 64. V prvním sloupci zdvojováním najdeme příslušné násobky čísla 314. Jsou to 628 = 2 × 314, 1256 = 4 × 314 = 2 × 628, 2512 = 8 × 314 = 2 × 1256 atd. Teď z tabulky 1 vybereme ty řádky, které vstoupí do výpočtu. Tyto řádky jsme označili znakem „+“. Je totiž 69 = 1 + 4 + 64. Čísla prvního sloupce těchto řádků jsou 314, 1256 a 20096. Jejich součet dá výsledek: 314 + 1256 + 20096 = 21666. Tedy 314 ×69 = 21666

314	1	+
628	2	
1256	4	+
2512	8	
5024	16	
10048	32	
20096	64	+

Tab. 1

V třináctém století se v Evropě násobilo stejně, jako ve starém Egyptě. Moje babička, která základní vzdělání získala v Uhersku, často používala tento způsob násobení. Říkala mu „duplicírka“ a naučila se jej ve třetí třídě (tenkrát se psal rok 1887).

PRACOVNÍ VERZE

	3	1	4	
2	1 / 8	0 / 6	2 / 4	**6**
1	2 / 7	0 / 9	3 / 6	**9**
	6	6	6	

Tab. 2

Indický (brahminský) způsob písemného násobení se více podobá našemu způsobu, ale používá formu tabulky. Postup ilustrujeme opět na součinu 314 ×69. Číslo 314 zapíšeme do horní řádky tabulky 2 a číslo 69 do pravého sloupce. Každé okénko jádra tabulky rozdělíme úhlopříčně na dvě části. Do okénka zapíšeme součin příslušného horního a pravého tučně psaného čísla. Například do pravého horního okénka jádra tabulky zapíšeme číslo 4 × 6 = 24 a to tak, že 2 napíšeme do horní a 4 do dolní části okénka. Když je všech šest okének jádra tabulky zaplněno, sčítáme tato čísla ve směru dokreslovaných úhlopříček a výsledek píšeme do dolní řádky a levého sloupce kolem jádra tabulky. V řádu jednotek se „sčítá“ jen číslo 6. V řádu desítek je to součet 4 + 3 + 9, ve stovkách je to 2 + 6 + 0 + 7, v tisících 0 + 8 + 2 a v desetitisících jen číslo 1. Tedy:

6 + 10 × (4 + 3 + 9) + 100 × (2 + 6 + 7) + 1 000 × (8 + 2) + 10 000 × 1 = 21 666.

4. Úlohy pro čtenáře

Poznáme dva efektivní způsoby, jak získat vhled do jisté problematiky. Prvním je řešení úloh, druhým je tvoření úloh pro žáky z dané oblasti. Níže uvedený soubor 8 náročných úloh pomůže učiteli hlouběji proniknout do problematiky násobení. Může mu sloužit i jako inspirace k tvorbě náročných úloh pro žáky. Komentáře k úlohám najde čtenář v kapitole 5.

Úloha 1. Paměťové počítání. Najděte součet 98 + 4 a součin 12 × 25. Zapište, jak jste při řešení postupoval(a).

Úloha 2. Zadání stejné jako v předcházející úloze. Bez písemné opory vypočítejte
a) 88 × 5, b) 16 × 35, c) 36 × 11, d) 4 × 7 × 25, e) 8 × 7 × 25, f) 101 × 74,
g) 1001 ×47, h) 12 × 11 × 25, i) 16 × 125, j) 11 × 620, k) 22 × 125, l) 7 × 11 × 13.

Úloha 3. Jen pomocí římských čísel vynásobte a) XII × X, b) XI × XII, c) XXII × XV, d) CCLXII × XVII, e) XV × IV, f) XIX × XVII, g) CXCIV × XVI, h) XCVI × XIV.

Komentář. Předpokládáme, že čtenář je seznámen s římskými čísly. Z didaktických důvodů zde mírně uvolníme pravidla pro zacházení s římskými čísly. Připustíme i takové zápisy čísel, které jsou jinak zakázány. Například: psát IIIII namísto standardního V, nebo XXXX namísto standardního XL, nebo CCCCLL, namísto D apod. Tedy počet stejných znaků C, X, I neomezíme na tři a počet stejných znaků V, L a D neomezíme na jediný. Můžeme jich psát tolik, kolik potřebujeme. Na druhé straně někdy použijeme zápis úspornější, než je standardní. Například číslo 1049 budeme psát MIL i MXLIX a číslo 449 budeme psát i CDIL a nejen CDXLIX.

Úloha 3a (doplňující). Řešení úlohy 3. předpokládá, že řešitel umí v římských číslech sčítat i odčítat. Neumí-li to, naučí se to řešením této úlohy. Najde součty: a) LX + VII, b) LV + XVII, c) XIV + LV, d) CXCIV + IL, e) DIC + CCVC, a rozdíly f) LVII – VI, g) LXIV – VI, h) LXII – VL, i) L – XL, j) CXCVII – VL, k) DXCI – LXIX, l) MCM – V, m) MXMIII – CLIX, n) MXCIV – LDIX.

Úloha 4. Když ve výpočtu 473× 62 = 29 326 číslice nahradíme písmeny, dostaneme nápis ABC × DE = EF CED, kterým je výpočet zakódován. Takový zápis nazýváme *algebrogram*. Úloha „řešte algebrogram ABC × DE = EF CED“ žádá, abychom každé z písmen A, B, C, D, E, F nahradili jednou číslicí tak, aby vznikl správný výpočet. Stejná písmena musíme nahradit stejnými číslicemi, různá písmena, různými číslicemi. Uvedený algebrogram je velice náročný. My budeme řešit algebrogramy lehčí:

PRACOVNÍ VERZE

a) A × A = A, b) A × A = B, c) A × A = BA,
d) AB × AB = ABB, e) AA × AA = ABA, f) AA × AA = CBC,
g) AA × B = BBC, h) AA × AA = CCBB, i) AA × B = CCD,
j) AB × CB = DCB k) AB × BA = ACA l) ABA × BAB = CCCDB

Úloha 5. Řešte algebrogramy a), b) a c) s indickým násobením

a)

	A	B	
F	F / D	C / B	B
F	E / C	E / D	C
	G	D	

Tab. 3a

b)

	A	
B	D / A	B
B	E / F	C
	F	

Tab. 3b

c)

	A	B	C	
B	E / K	D / E	D / F	C
D	E / D	G / H	D / E	B
	J	F	E	

Tab. 3c

Úloha 6. Dány jsou 4 číslice (například 2, 5, 7, 8). Z nich vytvoříme dvě dvoumístná čísla a najdeme jejich součin (např. 57 × 82 = 4674). Jaké největší a jaké nejmenší číslo tak můžeme získat, jestliže dané 4 číslice jsou a) 1, 2, 3, 4; b) 2, 5, 7, 8; c) 2, 6, 6, 9 ? Pokuste se úlohu řešit obecně – najít pravidlo, jak se taková čísla sestaví, jestliže daná čtveřice jednomístných čísel je A < B < C < D.

Úloha 7. Máte kalkulačku, na které lze zobrazit pouze 8-místné číslo. Potřebujete najít součin a) 503 729 × 843, b) 503 729 × 84 316, c) 269 107 × 843 556. Jak to uděláte?

Úloha 8. Dány jsou dvě čísla: u = 100…002 a v = 300…004. V čísle u je m nul, v čísle v je n nul. Kolik nul je v čísle $u \times v$?

5. Komentáře k úlohám, některá řešení

Ú1. Při písemném sčítání 98 + 4 sečteme 8 + 4 = 12, zapíšeme 2 a 1 si zapamatujeme; pak sečteme 9 + 1 = 10 a zapíšeme; výsledek je 102. Výpočet můžeme udělat šikovněji: číslo 4 rozložíme na 2 + 2 a počítáme 98 + 4 = 98 + 2 + 2 = 100 + 2 = 102.

Součin 12 × 25 bývá počítán postupem 12 × 25 = 10 × 25 + 2 × 25 = 250 + 50 = 300. Někdy též postupem 12 × 25 = 12 × 20 + 12 × 5 = 240 + 60 = 300. Oba postupy jsou blízké písemnému násobení. Méně často se setkáme s postupem, který je založen na rozkladu čísla 12 na 3 × 4. Tedy 12 × 25 = (3 × 4) × 25 = 3 × (4 × 25) = 3 × 100 = 300.

Podobně jako u úlohy 98 + 4 = ?, je i u úlohy 12 × 25 = ? poslední způsob šikovnější. V obou případech se jedná o stejnou myšlenku: jedno z čísel je vhodně rozloženo, a tím je výpočet zjednodušen. Řešitel, který rozklad použije, dokazuje svůj vhled do operace.

Ú2. V pěti výpočtech lze vhodně rozložit sudé číslo: a) 88 × 5 = 44 × 2 × 5 = 440; b) 16 × 35 = 8 × 70 = 560; d) 4 × 7 × 25 = 7 × 4 × 25 = 7 × 100 = 700; e) 7 × 8 × 25 = 14 × 100 = 1400; i) 16 × 125 = 4 × 4 × 125 = 4 × 500. Navíc v úlohách d) a e) jsme využili komutativnost násobení (tj. 4 × 7 = 7 × 4) a v úloze i) jsme využili i to, že si pamatujeme součin 4 × 125 = 500.

V dalších třech úlohách vidíme výsledek přímo: c) 36 × 11 = 396, protože 3 + 6 = 9, f) 101 × 74 = 7474, g) 1001 ×47 = 47047.

Kombinací uvedených triků najdeme h) 12 × 11 × 25 = 33 × 100 = 3300, j) 11 × 620 = 11 × 62 × 10 = 682 × 10 = 6820, k) 22 × 125 = 11 × 250 = 275 × 10 = 2750.

Konečně výsledek l) 7 × 11 × 13 = 1001 je dobré zapamatovat si. Má mnohá využití.

PRACOVNÍ VERZE

Ú3. Řešení předpokládá, že řešitel má dostatečné zkušenosti se sčítáním a odčítáním pomocí římských čísel. Není-li tomu tak, doporučujeme nejprve vyřešit úlohu 3a, která čtenáři pomůže potřebné zkušenosti nabýt.
K násobení římskými čísly je vhodné používat zápis pomocí tabulky.

a) Do horní řádky tabulky 4a napíšeme číslo XII, do posledního sloupce
číslo X. Dvě prázdná okénka doplníme běžným způsobem. Dopsaná čísla C a XX sečteme. Dostaneme výsledek: CXX.

X	**II**	
C	XX	**X**

Tab. 4a

Další výpočty: b) (Tab. 4b), c) (Tab. 4c) a d) (Tab. 4d)

X	**I**	
C	X	**X**
XX	II	**II**

Tab. 4b

Sečteme 4 čísla jádra tabulky 4b:
C + X + XX + II.
Výsledek:
CXXXII

XX	**III**	
CC	XXX	**X**
LL	VVV	**V**

Tab. 4c

Sečteme 4 čísla jádra:
CC + XXX + LL + VVV = CCCXXXXXV
Upravíme a máme
CCCVL

Jádro tabulky 4d tvoří 12 okének. Nejnáročnější je násobení: L × V = L × IIIII = LLLLL = CCL.

Sečteme 12 čísel jádra tabulky 4d a dostaneme MMDDDCCCCCCCLLLLXXXXVVIIII, co po úpravě dá výsledek MMMMCCCCLIV.

CC	**L**	**X**	**II**	
MM	D	C	XX	**X**
DD	CCL	L	VV	**V**
CCCC	LL	XX	IIII	**II**

Tab. 4d

Složitější situace vznikne, když máme násobit například číslem IV, ve kterém se jednotka I odčítá.
V takovém případě se všechna čísla této „mínus řádky“ nebo „mínus sloupce“ od výsledku odečítají. Uvedeme 3 ilustrace.

e) Prostřední řádek v tabulce 5 je „mínusový“. Výsledné číslo dostaneme, když od součtu L + XXV = LXXV odečteme součet X + V = XV. Tedy LXXV – XV = LX. Výsledek: LX

X	**V**	
-X	-V	**-I**
L	XXV	**V**

Tab. 5

X	**-I**	**X**	
D	-L	D	**L**
L	-V	L	**V**
XX	-II	XX	**II**

Tab 6a

f) Když v tabulce 6a od plusového čísla DDLLXXXX = MLLXXXVIIIII odečteme mínusové LVII, máme výsledek: MLXXXIII.

Výpočet urychlíme seskupením plusových sloupců. To je uvedeno v tabulce 6b.

XX	**-I**	
DD	-L	**L**
LL	-V	**V**
XXXX	-II	**II**

Tab 6b

g) (Tab. 7). Číslo CXCIV rozdělíme na část kladnou CCV a zápornou XI. Dva plusové sloupce dáme vlevo, dva mínusové sloupce vpravo. Od kladné části MMDDCCLXXV odečteme zápornou CLXXVI. Dostaneme výsledek: MMMCI.

CC	**V**	**-X**	**-I**	
MM	L	-C	-X	**X**
DD	XXV	-L	-V	**V**
CC	V	-X	-I	**I**

Tab. 7

Nejsložitější situace nastane, když se mínusová část vyskytne v obou číslech součinu. Zde dochází k odebrání z odebraného, co je vlastně přidání. Jestliže mi někdo odebere 50 Kč a pak z tohoto odběru odebere 20 Kč (a vrátí

PRACOVNÍ VERZE

mi je), znamená oněch 20 Kč pro mne vlastně přidání. Případ odběru z odběru ilustruje následující úloha.

h) Číslo XCIV rozdělíme na část kladnou CV a zápornou XI. Do tabulky 8 dáme dva sloupce plusové, pak dva mínusové. Stejně rozdělíme číslo XIV na část kladnou XV a zápornou I. Do tabulky 8 nahoru dáme dva plusové řádky a mínusový dáme dolu.

Od kladné části jádra tabulky 8 tj. od čísla MDLXXXVI odečteme zápornou část tj. číslo CXVV. Výsledek je MCCCXVI.

C	**V**	**-X**	**-I**	
M	L	-C	-X	**X**
D	XXV	-L	-V	**V**
-C	-V	+X	+I	**-I**

Tab. 8

Ú3a (doplňující). a) LX + VII = LXVII;

b) LV + XVII = LXVVII = LXXII (neboť VV = X);

c) XIV + LV = (od součtu X + V + L + V = LXX nutno odebrat I) = LXX – I = LXIX;

d) CXCIV + IL = (od součtu C + C + V + L = CCLV odebereme X + I + I = XII) = CCLV – XII = (místo čísla L píšeme XXXXX a místo čísla V píšeme IIIII, aby bylo možné odebírat) = CCXXXXXIIIII – XII = (teď X a II odebereme) = CCXXXXIII;

e) DIC + CCVC = (od D + C + C + C + C odebereme V + I) = DCCCC – VI = (jedno C „rozměníme“ na LXXXXVIIIII) = DCCCLXXXXVIIIII – VI = DCCCLXXXXIIII;

f) LVII – VI = LI;

g) LXIV – VI = LXV – VII = LX – II = LVIII, (neboť číslo I v čísle LXIV je odebrání);

h) LXII – VL = (číslo V je odebrání z menšitele, tedy přidání) = LXVII – L = XVII;

i) L – XL = (číslo X je odebrání z menšitele, tedy přidání) = LX – L = X;

j) CXCVII – VL = (do výsledku přispívá kladně CCVII z menšence a V z menšitele a záporně X z menšence a L z menšitele) = CCVVII – LX = CCII – L = CLII;

k) DXCI – LXIX = DCII – LXXX = DLXXXXXII – LXXX = DXXII;

l) MCM – V = MM – CV = MDCCCCLXXXXVV – CV = MDCCCLXXXXV;

m) MXMIII – CLIX = MMIIII – CLXX = MDCCCCLXXXXXIIII – CLXX = MDCCCXXXIIII = MDCCCXXXIV;

n) MXCIV – LDIX = MCLVI – DXXI = DDCXXXXXVI – DXXI = DCXXXV.

Ú4. V šesti případech existuje jediné řešení: d) A = 1, B = 0, tj. 10 × 10 = 100; e) A = 1, B = 2, tj. 11 × 11 = 121; f) A = 2, B = 4, C = 8, tj. 22 × 22 = 484; dále uvedeme jen číselné řešení: h) 88 × 88 = 7744, k) 12 × 21 = 252; l) 151 × 515 = 77765.

Ve čtyřech případech existují dvě řešení: a) A = 0 a A = 1, tj. 0 × 0 = 0 a 1 × 1 = 1; b) 2 × 2 = 4 a 3 × 3 = 9; c) 5 × 5 = 25 a 6 × 6 = 36; j) 26 × 16 = 416 a 26 × 36 = 936.

Ve dvou případech existuje 8 řešení: g) A = 1, B je kterákoli z číslic 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9, C = 0, i) 55 × 2 = 110, 55 × 4 = 220, 55 × 6 = 330, 55 × 8 = 440, 22 × 5 = 110, 44 × 5 = 220, 66 × 5 = 330, 88 × 5 = 440.

Ú5. a) Existuje jediné řešení: A = 6, B = 5, C = 2, D = 0, E = 1, F = 3, G = 8.

b) Čtyři řešení. Ve všech je B = 1 a D = 0. Dále je A = 6, C = 9, E = 5, F = 4, nebo A = 7, C = 6, E = 4, F = 2, nebo A = 8, C = 4, E = 3, F = 2, nebo A = 9, C = 3, E = 2, F = 7.

c) Jediné řešení: A = 7, B = 3, C = 4, D = 1 E = 2 F = 6, G = 0, H = 9, J = 6, K = 8.

Ú6. Největší možné číslo je a) 41 × 32 = 1312, b) 82 × 75 = 6150, c) 92 × 66 = 6072. Obecné pravidlo: DA × CB.

PRACOVNÍ VERZE

Nejmenší možné číslo je a) 13 × 24 = 312, b) 27 × 58 = 1566, c) 26 × 69 = 1794. Obecné pravidlo: AC × BD.

Komentář. Úlohu jsme předkládali žákům čtvrtých ročníků, které jejich učitelé označili jako tvořivé a matematicky vyspělé. Sledovali jsme, jak jednotliví žáci odhalovali obě uvedená pravidla. Asi 10% testovaných žáků již po vyřešení první úlohy s konkrétními čísly umělo formulovat obecné pravidlo. Asi 30% žáků našlo obecné pravidlo při řešení druhé konkrétní úlohy. Dosti často se objevila následující chyba: žák objevil pravidlo pro největší číslo (tedy DA × CB) a u první konkrétní úlohy, kterou řešil pro nejmenší číslo, psal ihned výsledek ve tvaru AD × BC. Všichni testovaní žáci bez výjimky označili tyto úlohy za velice zajímavé.

Ú7. Velké číslo rozložíme na součet a každou část násobíme zvlášť. V případě a) je to 503 729 × 843 = (503000 + 729) × 843 = 503 × 843 × 1000 + 729 × 843 = 424 029 000 + 614 547 = 424 643 547.

U větších součinů je vhodné použít indický zápis. V tabulkách 9. a 10. jsou součiny b) 503 729 × 84 316 = 42 472 414 364 a c) 269 107 × 843 556 = 227 006 824 492.

	503	**729**	
42	42 / 252	61 / 236	**84**
472	158 / 948	230 / 364	**316**
	414	364	

Tab. 9

	269	**107**	
227	226 / 767	90 / 201	**843**
006	149 / 564	59 / 492	**556**
	824	492	

Tab. 10

Ú8. Označme p počet nul v čísle $u \times v$. Začneme experimentovat. Nejprve položíme $n = 0$ (tj. číslo 34 bude bez nul) a měníme $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Dostaneme: 12 × 34 = 408, 102 × 34 = 3468, 1002 × 34 = 34068, 10002 × 34 = 340068, 100002 × 34 = 3400068, atd. Vidíme, že v součinu je o jednu nulu méně, než v prvním součiniteli. Tedy: je-li $n = 0$, pak $p = m - 1$; výjimku tvoří případ $m = 0$, kde $p = 1$.

Stejnou úvahu zopakujeme pro $n = 1$. Máme 12 × 304 = 3648, 102 × 304 = 31008, 1002 × 304 = 304608, 10002 × 304 = 3040608, 100002 × 304 = 30400608, 1000002 × 304 = 304000608, atd. Vidíme, že v součinu je stejný počet nul jako prvním součiniteli. Tedy: je-li $n = 1$, pak $p = m$. Výjimkou je případ $m = 1$, kde $p = 2$.

Úvahu zopakujeme pro $n = 2$. Je 12 × 3004 = 36048, 102 × 3004 = 306408, 1002 × 3004 = 3010008, 10002 × 3004 = 30046008, 100002 × 3004 = 300406008, 1000002 × 3004 = 3004006008, atd. Tedy: je-li $n = 2$, pak $p = m + 1$; výjimku tvoří případ $m = 2$, kde $p = 4$.

Popsaným postupem najdeme podobné výsledky pro $m = 3, 4, \ldots$atd. Pak všechna pozorování zapíšeme do tabulky 11. Z ní vidíme například, že pro $m = 3$ a $n = 2$ je $p = 4$. Tabulka je skoro pravidelná, řídí se vztahem

$$p = m + n - 1$$

		m					
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
n	**0**	1	0	1	2	3	4
	1	0	2	2	3	4	5
	2	1	2	4	4	5	6
	3	2	3	4	6	6	7
	4	3	4	5	6	8	8

Tab. 11

jedině pro $m = n$ platí jiný vztah: je-li $m = 0$ je $p = 1$, je-li $m > 0$ je $p = 2m$.

PRACOVNÍ VERZE

8. Individuální přístup k nadaným žákům

Nadaní žáci s nevolí dělají stereotypní výpočty, když mají dojem, že jim tato práce nic nepřináší. Proto je potřebné násobení vložit do motivačně přitažlivých úloh. Uvedeme čtyři takové série úloh. V prvních třech je dáno číslo nebo skupina čísel (nebo číslic) a pravidlo, jak se tvoří další čísla. Má se najít posloupnost, která splňuje jistou podmínku.

8.1. První série

Ilustrace. Zvolím trojmístné číslo, například 735. Z jeho číslic 3, 5, 7 vytvořím jedno dvoumístné a jedno jednomístné číslo, například 35 a 7. Čísla vynásobím: 35 × 7 = 245. Získané číslo rozložím na číslice 2, 4, 5. Z nich vytvořím jedno dvoumístné a jedno jednomístné číslo, například 52 a 4. Čísla vynásobím: 52 × 4 = 208. Z číslem 208 pokračuji stejně. Například 80 × 2 = 160. Další číslo bude 10 × 6 = 60. Už mám pouze dvě číslice 0, 6. Vynásobením těchto čísel dostanu nulu a hra končí. Moje posloupnost tedy začala číslem 735 a měla ještě dalších 5 členů: 245, 208, 160, 60, 0.
Posloupnost končí, když dospějeme k jednomístnému číslu, nebo když se v ní objeví některé číslo dvakrát. Příkladem takové posloupnosti je 618, 128, 168, 128. (Podrobně: 618, 16 × 8 = 128, 21 × 8 = 168, 16 × 8 = 128). Číslo 128 je druhým i čtvrtým a posledním členem posloupnosti. Tato posloupnost má 4 členy. Teď tři úlohy.

Úloha A. Najděte všechny posloupnosti, které začínají číslem 123.

Úloha B. Najděte posloupnost, která začíná číslem 357 a končí číslem a) 5, b) 2, c) 8, d) 4, e) 6, f) 7, g) 9.

Komentář. Soubor výpočtů můžeme psát přehledně v tabulce 16. Z ní vidíme, že z čísla 357 umíme vytvořit 371 i 171, z čísla 371 umíme vytvořit 51, 37, 217, 213 i 91, atd.

		51	→	5						
		37	→	21	→	2				
	371	217	→	27	→	14	→	4		
		213	→	23	→	6				
		91		9						
357										
		77	→	49	→	36	→	18	→	8
	171	71	→	7						
		17	→	7						

Tab. 16

Úloha C. Najděte posloupnost, ve které jdou po sobě dvě stejná trojmístná čísla.

Úloha D. Najděte posloupnost, která začíná číslem 375 a má více než 8 čísel.

Komentář. Žák experimentuje. Jeho činnost má přinejmenším tři důležité vrstvy:
Organizační – jak z daného čísla vytvořit číslo další; jak získaná čísla posloupnosti skladovat, jak hledat posloupnost delší než je ta nalezena.
Výpočetní – nácvik písemného násobení; žákům je možné povolit použití kalkulačky (použití kalkulačky lze omezit pravidlem, že při řešení jedné posloupnosti může žák kalkulačku použít nejvýše třikrát).
Objevitelskou – nalezení zákonitostí, přítomných v procesu. Například:

- Ze tří různých číslic A, B, C lze o vytvořit 6 čísel: AB × C, BA × C, AC ×B, CA × B, BC × A, CB × A; jsou-li dvě z číslic stejné, lze o vytvořit pouze 3 čísla, jsou-li všechny tři číslice stejné, lze vytvořit pouze jedno číslo.

PRACOVNÍ VERZE

- Jsou-li dvě z číslic A, B, C nuly, posloupnost končí v následujícím kroku nulou.
- Je-li jedna z číslic A, B, C nula a jedna jednotka, posloupnost končí v následujících dvou krocích.

Řešení úloh

Ú A. Je to šest posloupností. Všechny začínají číslem **123**

21×3 = **63**, 6×3 = **18**, 8×1 = **8**; 12×3 = **36**, 6×3 = **18**, 8×1 = **8**;
31×2 = **62**, 6×2 = **12**, 2×1 = **2**; 13×2 = **26**, 6×2 = **12**, 2×1 = **2**;
23×1 = **23**, 2×3 = **6**; 32×1 = **32**, 2×3 = **6**.

Ú B. Každý případ má více řešení. Zde uvádíme pouze jediné.

a) 53 × 7 = **371**, 17 × 3 = **51**, 5 × 1 = **5**;
b) 53 × 7 = **371**, 37 × 1 = **37**, 7 × 3 = **21**, 2 × 1 = **2**;
c) 57 × 3 = **171**, 11 × 7 = **77**, 7 × 7 = **49**, 4 × 9 = **36**, 3 × 6 = **18**, 1 × 8 = **8**;
d) 53 × 7 = **371**, 31 × 7 = **217**, 27 × 1 = **27**, 7 × 2 = **14**, 1 × 4 = **4**;
e) 53 × 7 = **371**, 71 × 3 = **213**, 23 × 1 = **23**, 2 × 3 = **6**;
f) 57 × 3 = **171**, 17 × 1 = **17**, 1 × 7 = **7**;
g) 53 × 7 = **371**, 13 × 7 = **91**, 1 × 9 = **9**.

Ú C. Například: **636**, 36 × 6 = **216**, 21 × 6 = **126**, 21 × 6 = **126**, konec.
Nebo **917**, 17 ×9 = **153**, 51 ×3 = **153**.

Ú D. Příklad posloupnosti, která má 12 členů: **375**, 53 × 7 = **371**, 31 ×7 = **217**, 21 ×7 = **147**, 41 ×7 = **287**, 28 ×7 = **196**, 91 × 6 = **546**, 54 × 6 = **324**, 42 × 3 = **126**, 12 × 6 = **72**, 7 × 2 = **14**, 1 × 4 = **4**, konec. Dá se najít ještě delší posloupnost?

8.2. Druhá série

Předchozí situaci zobecníme. Místo trojmístných čísel pracujeme analogickým způsobem s čísly čtyř- nebo více-místnými.

Ilustrace. Zvolím například číslo **74 911** a tvořím posloupnost čísel 4 171 × 9 = **37 539**, 9 533 × 7 = **66 731**, 1 673 × 6 = **10 038**, 3 008 × 1 = **3 008**, 300 × 8 = **2 400**, 400 × 2 = **800**, 80 × 0 = **0**. Vytvořená posloupnost má 8 členů: 74 911, 37 539, 66 731, 10 038, 3 008, 2 400, 800, 0. Lze najít posloupnost začínající číslem 74 911, která skončí po 7 krocích, nebo dokonce po 6 krocích?

Úloha A. Najděte posloupnost, která začíná číslem 7 624 a jejíž čtvrtý člen je číslo 125.

Úloha B. Najděte posloupnost, která začíná číslem 1 426 a prvních pět členů této posloupnosti roste; tj. druhý člen je větší než první, třetí člen je větší než druhý,…

Úloha C. Vymyslete takové sedmimístné číslo neobsahující ani jedinou nulu, že z něj nelze vytvořit posloupnost obsahující více než 9 čísel.

Řešení úloh

Ú A. 674 × 2 = 1348, 138 × 4 = 552, 25 × 5 = 125

Ú B. 241 × 6 = 1 446, 416 × 4 = 1 664, 416 × 6 = 2496, 426 × 9 = 3 834

Ú C. Tím číslem je 1 111 111.

8.3. Třetí série

Zvolte jedno-, nebo dvojmístné číslo n. To bude první číslo a_1 naší posloupnosti. Druhé číslo a_2 bude poslední dvojčíslí čísla $n \times a_1$. Třetí číslo a_3 bude poslední dvojčíslí čísla $n \times a_2$ atd. Dodejme, že zde číslo 04 chápeme jako 4, číslo 07 jako 7 a číslo 00 jako 0.

PRACOVNÍ VERZE

Ilustrace. Zvolím $n = a_1 = 4$. Najdu $a_2 = n \times a_1 = 4 \times 4 = 16$ i $a_3 = n \times a_2 = 4 \times 16 = 64$. Protože $n \times a_3 = 4 \times 64 = 256$ je číslo trojmístné, je $a_4 = 56$. Dále $4 \times 56 = 224$, tedy $a_5 = 24$, dále $4 \times 24 = 96$, tedy $a_6 = 96$. Stejným způsobem najdeme $a_7 = 84$, $a_8 = 36$, $a_9 = 44$, $a_{10} = 76$, $a_{11} = 4$. Vidíme, že $a_1 = a_{11}$, proto bude $a_{12} = a_2$, $a_{13} = a_3$, $a_{14} = a_4$, atd. Prvních 10 čísel se bude dále periodicky opakovat. Řekneme, že *délka periody posloupnosti* je 10.

Úloha A. Najděte posloupnost, která začíná číslem a) 5, b) 6, c) 7, d) 10, e) 9, f) 2, g) 3, h) 11, i) 12, j) 8, k) 13,

Úloha B. Zjistěte, jaké jsou délky period i předperiod posloupností, které začínají čísly 21, 31, 41, …, 91 i čísly 16, 26, 36, …, 96.

Úloha C. Hledejte zákonitosti u některých z těchto posloupností.

Řešení úloh

Ú A. a) $a_1 = 5$, $a_2 = 25$, $a_3 = a_4, = a_5 = \ldots 25$. Délka periody posloupnosti je 1.
b) $a_1 = 6$, $a_2 = 36$, $a_3 = 16$, $a_4, = 96$, $a_5 = 76$, $a_6 = 56$, $a_7, = 36$, … Délka periody této posloupnosti je 5. Stručně budeme uvedené řešení psát jen pomocí čísel takto:
6 – 36, 16, 96, 76, 56, (5). První číslo, 6, se v posloupnosti vyskytne jen na začátku a později se neopakuje. Nazveme jej *předperiodou*. Následuje pět čísel, které tvoří periodu a na závěr v závorce je délka periody. V uvedené posloupnosti je to číslo 5.
c) 7, 49, 43, 1 (4); d) 10 – 0 (1); e) 9, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 1 (10);
f) 2 – 4, 8, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52 (20);
g) 3, 9, 27, 81,43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 7, 21, 63, 89, 67, 1 (20);
h) 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 1, (10);
i) 12, 44, 28, 36, 32, 84, 8, 96, 52, 24, 88, 56, 72, 64, 68, 16, 92, 4, 48, 76 (20)
j) 8, 64, 12, 96, 68, 44, 52, 16, 28, 24, 92, 36, 88, 4, 32, 56, 48, 84, 72, 76, (20)
k) 13, 69, 97, 61, 63, 9, 17, 21, 73, 49, 37, 81, 53, 89, 57, 41, 33, 29, 77, 1 (20)
l) 17, 89, 13, 21, 57, 69, 73, 41, 97, 49, 33, 61, 37, 29, 93, 81, 77, 9, 53, 1 (20)

Ú B. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 17. Zde n je první číslo posloupnosti, D.p. je délka periody a D. pp. je délka předperiody.

n	21	31	41	51	61	71	81	91	16	26	36	46	56	76	86	96
D.p.	5	10	5	2	5	10	5	10	5	1	5	5	5	1	5	5
D. pp	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0

Tab. 17

Ú C. Dvoumístné číslo n označme dj (d = desítky, j = jednotky). Například pro $n = 13$ je $d = 1$, $j = 3$. Pro $n = 54$ je $d = 5$, $j = 4$, pro $n = 8$ je $d = 0$, $j = 8$, apod .
Uvedeme pět zákonitostí, žáci jistě najdou ještě více dalších

- Když je $j = 1$, ($j = 6$) pak má každé číslo této posloupnosti poslední číslici 1 (6).
- Když je j číslo liché (sudé) jsou poslední číslice všech čísel posloupnosti čísla lichá (sudá).
- Posloupnost začínající číslem 11 je možné popsat pomocí sčítání: následující člen je předchozí člen plus 10.
- V posloupnosti začínající číslem 9 platí, $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8 = a_9 + a_{10} = 90$.
- V posloupnosti začínající číslem 4 platí, $a_1 + a_6 = a_2 + a_7 = a_3 + a_8 = a_4 + a_9 = a_5 + a_{10} = 100$.

8.4. Čtvrtá série

PRACOVNÍ VERZE

Čtvrtá série úloh se odehrává na čtverečkovaném papíře. Kreslíme *síťové* pravoúhelníky – obdélníky a čtverce. Strany těchto čtyřúhelníků leží v přímkách sítě, které nazýváme vodorovné a svislé. Zajímáme se o *obvod* a *obsah* těchto útvarů. Protože první písmeno obou těchto termínů je stejné, vypůjčíme si slova anglická a obvod budeme značit P (perimeter), obsah A (area). Čtyřúhelník o rozměrech $m \times n$ budeme značit (m,n). Tedy P(5,2) = 14 značí, že obvod čtyřúhelníka (5,2) je 14 a A(5,5) = 25 značí, že obsah čtverce (5,5) je 25. Obecně je $P(a,b) = 2(a + b)$ pro obvod a $A(a,b) = a.b$ pro obsah.
Níže uvedené úlohy mohou žákům výrazně přispět k budování strukturálního chápání matematiky, neboť propojují geometrii, aritmetiku a trochu i teorii čísel.

Ilustrace. Najděte pravoúhelník (x,y) tak, aby bylo $P(x,x) = y$ a současně $A(x,y) = 36$. Číslo y zde vystupuje jednou jako délka, jednou jako obsah.
Řešení. Protože obsah pravoúhelníka (x,y) je 36, nastává těchto deset možností: (x,y) = (1,36), (2,18), (3,12), (4,9), (6,6), (9,4), (12,3), (18,2), (36,1). Ze vztahu $P(x,x) = y$ víme, že $4x = y$. Ten případ nastává, právě když (x,y) = (3,12). To je hledaný pravoúhelník. Skutečně, jeho obsah je 36 a obvod čtverce o straně 3 je 12.

Ú A. Kolik existuje navzájem různých pravoúhelníků s obvodem rovným a) 14, b) 15, c) 56, d) n, kde n je libovolné přirozené číslo? Poznámka: pravoúhelníky (x,y) a (y,x) jsou shodné, tedy nejsou různé.

Ú B. Dva pravoúhelníky mají stejný obvod, ale rozdíl jejich obsahů je 1. Najděte ty pravoúhelníky, jestliže obvod je a) 20, b) 28, c) 30. Pokuste se úlohu zobecnit. Rozdíl obsahů změníte. Místo čísla 1, budete uvažovat o rozdílu 2, nebo 3, nebo obecně r.

Ú C. Nakreslete čtverec (20,20) a označte jej AUQV. Nakreslete všechny síťové pravoúhelníky ABCD takové, že bod B leží na úsečce AU, bod C na úsečce UV a bod D na úsečce AV. Který z těchto pravoúhelníků má největší/nejmenší obvod/obsah?

Řešení úloh

Ú A. a) jsou tři: (1,6), (2,5), (3,4); b) žádný, obvod síťového pravoúhelníka musí být sudé číslo, c) je jich 14: (1,27), (2,26), (3,25),…(12,16), (13,15), (14,14); d) když je n číslo liché, žádný požadovaný pravoúhelník neexistuje; když je n dělitelné 4, pak požadovaných pravoúhelníků je $n/4$; když zbytek při dělení n:4 je 2, pak požadovaných pravoúhelníků je $n/4 - ½$.

Ú B. a) Je to dvojice (5,5) a (6,4); b) Je to dvojice (7,7) a (8,6); c) Hledaná dvojice pravoúhelníků neexistuje. Do úvahy přichází pravoúhelníky (1,14), (2,13), …, (6,9), a (7,8). Jejich obsahy jsou 14, 26, 36, 44, 50, 54, 56. Rozdíl žádných dvou není 1.
Situaci lze zobecnit. Hledaných dvojic pravoúhelníků je nekonečně mnoho. Když zvolím jakékoli přirozené číslo $n > 1$, pak (n,n) a $(n-1,n+1)$ je taková dvojice. Skutečně, $P(n,n) = P(n-1,n+1) = 4n$. A též $P(n,n) - P(n-1,n+1) = n \times n - (n \times n - 1) = 1$.
Zobecnění. Nechť r = 2. Dvojice pravoúhelníků se stejným obvodem a obsahem lišícím se o 2 jsou například (4,1) a (3,2), nebo (5,2) a (4,3), nebo (6,3) a (5,4), atd. I zde je hledaných dvojic nekonečně mnoho. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak dvojice $(n+3,n)$ a $(n+2,n+1)$ je hledanou dvojicí.
Čtenář, který bude řešit úlohu pro $r = 3$, $r = 4$, … si může svoje výsledky prověřit pomocí tabulky 18. Zde n je libovolné kladné přirozené číslo.

r	hledané dvojice
1	$(n+2,n)$ a $(n+1,n+1)$
2	$(n+3,n)$ a $(n+2,n+1)$

r	hledané dvojice
4	$(n+5,n)$ a $(n+4,n+1)$
5	$(n+6,n)$ a $(n+5,n+1)$

r	hledané dvojice
7	$(n+8,n)$ a $(n+7,n+1)$
8	$(n+9,n)$ a $(n+8,n+1)$

PRACOVNÍ VERZE

3	$(n+4,n)$ a $(n+3,n+1)$	**6**	$(n+7,n)$ a $(n+6,n+1)$	**9**	$(n+10,n)$ a $(n+9,n+1)$

Tab. 18

Dodejme, že tabulka 18 uvádí jen některé výsledky. Když je r prvočíslo, pak výsledky, které uvádí tabulka 18 jsou všechny. Když je r číslo složené, pak kromě dvojice uvedené v tabulce, existují ještě další dvojice. Například:
pro $r = 4$ je hledanou dvojicí pravoúhelníků i dvojice $(n+4,n)$ a $(n+2,n+2)$;
pro $r = 6$ je hledanou dvojicí pravoúhelníků i dvojice $(n+6,n)$ a $(n+3,n+2)$
pro $r = 24$ existuje dokonce čtyři typy hledaných dvojic; jsou to $(n+10,n)$ a $(n+6,n+4)$ a též $(n+11,n)$ a $(n+8,n+3)$ a též $(n+14,n)$ a $(n+12,n+2)$ a též $(n+25,n)$ a $(n+24,n+1)$.

Ú C. Obvod všech těchto pravoúhelníků je 40, pro jejich obsah platí A(19,1) = 19, A(18,2) = 36, A(17,3) = 51, A(16,4) = 64, A(15,5) = 75, A(14,6) = 84, A(13,7) = 91, A(12,8) = 96, A(11,9) = 99, A(10,10) = 100. Tedy nejmenší obsah má pravoúhelník (19,1) a největší má čtverec (10,10).
Řešením podobných úloh žáci objeví důležitý *izoperimetrický* zákon pro pravoúhelníky: ze všech pravoúhelníků s daným obvodem právě čtverec má největší obsah. Zákon zůstane v platnosti, i když zde místo slova „pravoúhelníky“ dáme slovo „čtyřúhelníky“.

PRACOVNÍ VERZE

Dodatek

První tři úlohy vytvořili žáci třetího ročníku učitelky J. Michnové (ZŠ Neratovice):

1. Vyřeš

a) AA + A = 12 e) AA + B = 39 i) CC – C.C =18
b) AB + A = 22 f) AA + 2 . A = 52 j) DD = 80 + D
c) AB + AB = 50 g) AA = 50 + A k) EE + E = 96
d) A . A + A . A = 50 h) B:B + B.B = 17 l) EF + F = 44

2. Vyřeš

a) AA – A = 30 d) AA + A = 60 g) AB – A = 24
b) A . B + A . B = 16 e) AB + A = 26 h) AB + B = 38
c) AB + AB = 56 f) AB + A = 16 i) AB + B = 80

3. Vyřeš

a) GH + HH = 50 c) BB + BBB = 244 e) AA . BA = 231
b) AA + AB = 107 d) CG + CG – AG = 75

4. Sčítání

a) AA = 30 + A d) DD + D + D = 65 g) HG + H = 41
b) BB = 50 + B e) EE + E + E = 39 h) KJ + J = 52
c) CC + C = 24 f) FF + F + F = 52 i) LM + L = 17

5. Vyřeš

a) A . A = A + A, b) B . B = B + B + B, c) C . C = C + C + C + C
d) D . D = 30 + D, e) E . E = 30 – E, f) F . F = 35 + G, g) HH = H . H + 30
h) JJ = J . J + J + J

6. Vyřeš

a) AA = 36 – A, e) H . H + HH = 42 i) OO + O . O = 100 + P
b) BB = 40 – C, f) JJJ – JJ = 100 j) QQ + R . R = 20 + S
c) DD = 50 – E g) K . K + L . L = 10 k) TT + U . U = 40 – V
d) FG + F = 78 h) M . M + N . N = 20 l) XX + Y . Y = 40 + Z

7a. Řeš algebrogramy, u nichž některé číslice znáš. Hledej více řešení.

	A	B				A	B				A	B				A	B
+	7	2			+	6	3			+	5	4			+	4	5
	B	A				B	A				B	A				B	A

a) b) c) d)

	A	B				A	B				A	B				A	B
+	3	6			+	2	7			+	1	8			+	0	9
	B	A				B	A				B	A				B	A

e) f) g) h)

7b. Řeš algebrogramy

a) AB – BA = 72; b) AB – BA = 63; c) AB – BA = 54; d) AB – BA = 45.
e) AB – BA = 36; f) AB – BA = 27; g) AB – BA = 18; h) AB – BA = 9.

PRACOVNÍ VERZE