Automaty a gramatiky

Převzato po předchůdcích R. Barták, P. Surynek, mírně upraveno M. Vomlelová.

Cvičení 1

1. Navrhněte konečné automaty na počítání symbolů ve slovech. Pro popis automatů použijte ohodnocený graf (stavový diagram) nebo tabulku.

   (a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k\}$

   (b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 2k\}$

   (c) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ [(\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \vee (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 2\ell]\}$

   (d) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \ \& \ (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 2\ell\}$

   (e) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ [(\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \vee (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_b = 2\ell]\}$

   (f) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \ \& \ (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_b = 2\ell\}$

   (g) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_a = 3k \ \& \ (\forall \ell \in \mathbb{N}_0)|w|_b \neq 2\ell\}$

2. Navrhněte konečné automaty, které přijímají slova obsahující určité podslovo:

   (a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u \in \{a,b\}^*)w = abba.u\}$ Jazyk obsahuje slova, která začínají *abba*.

   (b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u \in \{a,b\}^*)w = u.abba\}$ Jazyk obsahuje slova, která končí *abba*.

   (c) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u, v \in \{a,b\}^*)w = u.abba.v\}$ Jazyk obsahuje slova, v nichž se vyskytuje podslovo *abba*.

   (d) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u \in \{a,b\}^*)w = u.ab \ \& \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w| = 3k+1\}$

   (e) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ [(\exists u \in \{a,b\}^*)w = u.ab \ \vee \ (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w| = 3k+1]\}$.

3. Navrhněte konečné automaty, které přijímají slova, u nichž začátek souvisí s koncem:

   (a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u, v \in \{a,b\}^*)(|u| = 1 \ \& \ w = u.v.u\}$. Jazyk obsahuje slova, která mají délku aspoň 2 a začínají a končí stejným symbolem.

   (b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u, v \in \{a,b\}^*)(|u| = 2 \ \& \ w = u.v.u\}$. Jazyk obsahuje slova, která mají délku aspoň 4 a začínají a končí stejnou (uspořádanou) dvojicí symbolů.

   (c) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u, v, z \in \{a,b\}^*)(|u| = 2 \ \& \ w = u.v \ \& \ w = z.u)\}$. Jazyk obsahuje slova, která začínají a končí stejnou (uspořádanou) dvojicí symbolů.

   (d) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \& \ (\exists u, v, z \in \{a,b\}^*)(|u| = 2 \ \& \ |z| = 2 \ \& \ w = u.v.z \ \& \ u \neq z)\}$. Jazyk obsahuje slova, která mají délku aspoň 4 a začínají a končí různými (uspořádanými) dvojicemi symbolů.

4. Vyjádřete množinově (jako v předchozích úlohách) jazyky, které jsou přijímány následujícími automaty popsanými tabulkou:

   (a)

	0	1
→* p	q	p
q	r	q
r	p	r

   (c)

	0	1
→ p	p	q
q	p	r
* r	p	r

   (b)

	0	1
→ p	q	p
* q	r	q
* r	p	r

   (d)

	0	1
→ p	p	q
* q	r	q
* r	p	q

5. Nechť posloupnost kóduje průběh tenisového zápasu. Z hlediska prvního hráče nechť znamená získání bodu, nechť znamená získání bodu protihráčem. Navrhněte konečný automat, který přijímá posloupnost 0,1 kódující hru, právě když kód odpovídá výhře prvního hráče.

Cvičení 2

1. Rozhodněte, zda jsou následující jazyky regulární:

   (a) $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   (b) $L = \{ww \mid w \in \{a\}^*\}$
   (c) $L = \{a^i b^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (d) $L = \{a^i a^i b^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (e) $L = \{a^i b^j a^i \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (f) $L = \{a^i b^i a^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (g) $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k = 0,1,2,\ldots\}$
   (h) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   (i) $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^* \;\&\; |w|_a = |w|_b\}$
   (j) $L = \{a^{2i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (k) $L = \{a^{i^2} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (l) $L = \{a^{3i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (m) $L = \{a^{i^3} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (n) $L = \{a^{3^i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (o) $L = \{a^p \mid p$ je prvočíslo$\}$
   (p) $L = \{a^p \mid p, q$ jsou prvočíslo $\&\; p \neq q\}$

2. Najděte ekvivalentní stavy v následujících konečných automatech:

(a)

	a	b
→* 0	0	5
1	1	3
2	2	7
3	3	2
* 4	4	1
5	5	1
* 6	6	2
7	7	0

(c)

	a	b
→* 1	2	3
2	2	4
* 3	3	5
4	2	7
* 5	6	3
* 6	6	6
7	7	4
8	2	3
9	9	4

(e)

	a	b
→* 0	1	2
1	3	0
2	4	5
3	0	2
4	2	5
5	0	3

(f)

	a	b
→ 0	1	2
1	0	3
2	4	1
3	0	1
* 4	2	2
5	4	3

(b)

	a	b
A	A	F
B	B	A
C	C	D
D	D	B
E	E	C
→* F	F	E

(d)

	a	b
A	H	G
B	B	A
C	E	D
D	D	B
E	C	D
F	F	E
G	G	F
→* H	A	G

Cvičení 3

1. Rozhodněte, zda jsou některé z následujících automatů po dvojicích ekvivalentní:

(a)

A	a	b
→* 0	0	5
1	1	3
2	2	7
3	3	2
* 4	4	1
5	5	1
* 6	6	2
7	7	0

(b)

B	a	b
A	A	F
B	B	A
C	C	D
D	D	B
E	E	C
→* F	F	E

(c)

C	a	b
→* 1	2	3
2	2	4
* 3	3	5
4	2	7
* 5	6	3
* 6	6	6
7	7	4
8	2	3
9	9	4

(d)

D	a	b
A	H	G
B	B	A
C	E	D
D	D	B
E	C	D
F	F	E
G	G	F
→* H	A	G

2. K nedeterministickému automatu **E** sestrojte ekvivalentní deterministický konečný automat. Výsledný FA zredukujte.

D	a	b
→*A	{A,C}	{B}
B	{B,D}	∅
*C	E	D
→ D	{A}	{C,D}

3. Zkonstruujte nedeterministický konečný automat, který přijímá jazyk:
   (a) $L(A).L(B)$
   (b) $L(A)^*$
   (c) $L(A)^R$

   Sestrojte příslušné deterministické automaty.

4. Navrhněte dvojici kkonečných automatů, které jsou
   (a) redukované a neizomorfní
   (b) ekvivalentní a neizomorfní

Cvičení 4

1. Nechť L je regulární jazyk. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je jazyk $K = \{w \mid \#w\$ \in L\}$ regulární.

2. Uvažujme konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Navrhněte dvousměrné automaty, které přijímají jazyky:
   (a) $L_1 = \{\#w\$ \mid ww^R \in L(A)\}$
   (b) $L_2 = \{\#w\$ \mid ww \in L(A)\}$
   (c) $L_3 = \{\#w\$ \mid (\exists v \in \Sigma^*)wv \in L(A)\&|w| = |v|\}$
   (d) $L_4 = \{\#w\$ \mid (\exists u, v \in \Sigma^*)w = uv\&uu^Rv \in L(A)\}$

3. Navrhněte nedeterministický konečný automat přijímající jazyk $L_1 = \{\#w\$ \mid ww^R \in L(A)\}$. Přitom nevyužívejte znalosti dvousměrných automatů.

4. Popište princip konstrukce ekvivalentního konečného automatu k danému dvousměrnému automatu.

5. Pro jazyky L_1, L_2, L_3, L_4 navrhněte (nedeterministické) konečné automaty, které je přijímají. Při návrhu využijte znalosti dvousměrných automatů.

6. Uvažujme zjednodušené HTML, kde jsou k dispozici konstrukce

<p>	</p>
<a>	
<table>	</table>
<tr>	</tr>
<td>	</td>

všechny bez atributů. Využijte tvrzení o regulární substituci k rozhodnutí, zda texty ve formátu zjednodušeného HTML tvoří regulární jazyk.

Cvičení 5

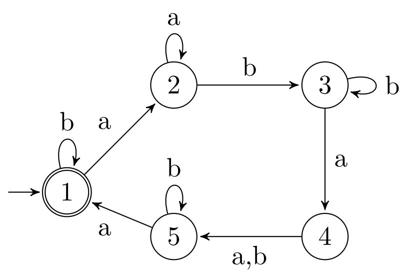
1. Navrhněte převod mezi Mealyho a Mooreovým strojem.

2. Navrhněte Mealyho nebo Moorův stoj, který realizuje operaci:
   (a) bitového součtu bitových vektorů
   (b) bitového součinu bitových vektorů
   (c) aritmetického součtu bitových vektorů

3. Nechť A a B jsou konečné automaty pracující nad abecedou Σ. Navrhněte algoritmus, který rozhodne zda:
   (a) $L(A) = \emptyset$
   (b) $L(A) = L(B)$
   (c) $L(A) \subset L(B)$
   (d) $L(A) = \Sigma^*$
   (e) $L(A)$ je nekonečný

4. Nechť $L = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \;\&\; (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_1 = 2k\}$ a $K = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \;\&\; (\exists k \in \mathbb{N}_0)|w|_1 = 3k\}$. Jak vypadají jazyky L/K a $K \setminus L$? Sestrojte konečné automaty přijímající L/K resp. $K \setminus L$.

5. Uvažujme konečný automat A zadaný následujícím stavovým diagramem:



Sestrojte konečné automaty, které přijímají jazyky:

- $L_1 = \{w \mid (\exists u, v \in \{a,b\}^*) w = uv \;\&\; uav \in L(A)\}$
- $L_2 = \{w \mid (\exists u, v \in \{a,b\}^*) w = uv \;\&\; (uav \in L(A) \vee ubv \in L(A)\}$
- $L_3 = \{w \mid (\exists u, v \in \{a,b\}^*) w = uav \;\&\; uv \in L(A)\}$

Cvičení 6

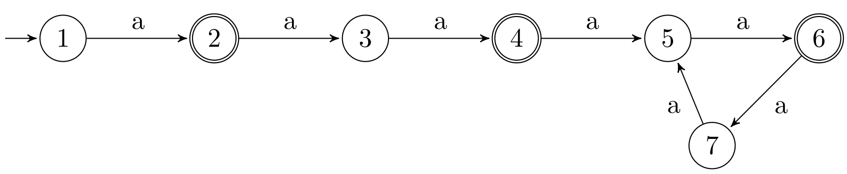
1. Navrhněte regulání výrazy reprezentující následující jazyky nad $\Sigma = \{a, b\}$:
   (a) jazyk sestávající ze slov, která obsahují *abba* jako podslovo
   (b) jazyk sestávající ze slov, která mají prefix *abb* a sufix *bbaa*
   (c) jazyk sestávající ze slov, kde počet výskytů a je dělitelný 3
   (d) jazyk sestávající ze slov, která začínají a končí stejnou dvojicí symbolů
   (e) jazyk sestávající ze slov, která neobsajují podslovo *aa*

2. Navrhněte algoritmus pro rozhodování, zda je dvojice vstupních regulárních výrazů ekvivalentní, tj. zda repezentují stejný jazyk. Algoritmus aplikujte na dvojici regulárních výrazů:

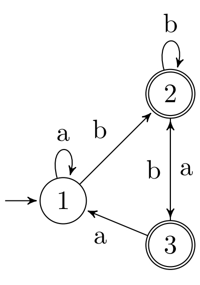
$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* \text{ a } \mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* + \mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*$$

3. Pro následující regulární výrazy zkonstruujte konečné automaty, které přijímají jimi reprezentované jazyky:
   (a) $\mathbf{ab}+\mathbf{ba}$
   (b) $\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{ab}$
   (c) $\mathbf{a}+\mathbf{b}^*$
   (d) $(\mathbf{ab}+\mathbf{c})^*$
   (e) $((\mathbf{ab}+\mathbf{c})^+\mathbf{a}(\mathbf{bc})^*+\mathbf{b})^*$
   (f) $((\mathbf{ab}+\mathbf{c})^*\mathbf{a}(\mathbf{bc})^*+\mathbf{b})^*$
   (g) $(\mathbf{01}^*+\mathbf{101})^*\mathbf{0}^*\mathbf{1}$
   (h) $(\mathbf{01})^*\mathbf{11}(\mathbf{01})^*(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{00}$

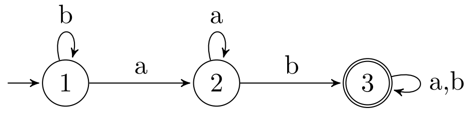
4. Pro následující konečné automaty sestrojte regulární výrazy, které reprezentují stejný jazyk:
   (a)



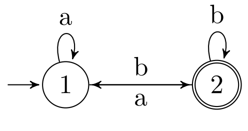
(b)



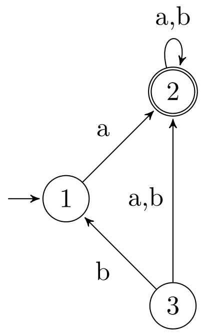
(c)



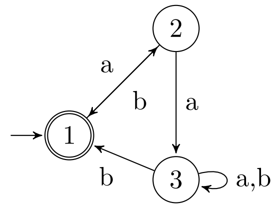
(d)



(e)



(f)



Cvičení 7

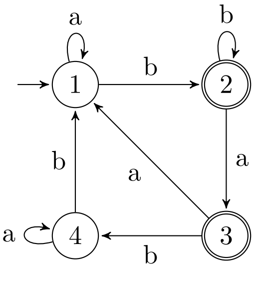
1. Navrhněte gramatiky, které generují následující jazyky. Lze gramatiku zkonstruovat ve všech případech?

   (a) $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   (b) $L = \{ww \mid w \in \{a\}^*\}$
   (c) $L = \{a^i b^i \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (d) $L = \{a^i b^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (e) $L = \{a^i b^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (f) $L = \{a^i a^i b^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (g) $L = \{a^i b^j a^i \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (h) $L = \{a^i b^i a^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (i) $L = \{a^i b^i a^j \mid i,j = 0,1,2,\ldots\}$
   (j) $L = \{a^i b^j a^k \mid i,j,k = 0,1,2,\ldots\}$
   (k) $L = \{a^i b^i c^i \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (l) $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k = 0,1,2,\ldots \& i \leq j \leq k\}$
   (m) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^* \& |w|_a = |w|_b\}$
   (n) $L = \{a^{2i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (o) $L = \{a^{i^2} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (p) $L = \{a^{i^2+i+1} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (q) $L = \{a^{2^i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (r) $L = \{a^{3i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (s) $L = \{a^{i^3} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (t) $L = \{a^{3^i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$
   (u) $L = \{a^p \mid p$ je prvočíslo $\}$
   (v) $L = \{a^p a^q \mid p,q$ jsou prvočísla prvočíslo $\& p \neq q\}$

2. Je následující gramatika kontextová? Je jazyk gramatikou generovaný kontextový? Pokud ano, nalezněte ekvivalentní kontextovou gramatiku.

   $S \to aSbA|\lambda$
   $A \to aBbA|bCB|CD$
   $B \to bbBa|aS$
   $C \to aAaA$
   $D \to SC|aABb$

3. Pro následující konečný automat nalezněte ekvivalentní gramatiku. V jaké třídě Chomského hierarchie se budete pohybovat?



4. Pro následující gramatiku nalezněte ekvivalentní konečný automat. Lze to provést s libovolnou gramatikou?

   $S \to abS|babA|\lambda$
   $A \to abA|aB|bC$
   $B \to abS|B|bC|\lambda$
   $C \to aab|A|aA|\lambda$

Cvičení 8

1. Zredukujte následující gramatiky. U jakého typu gramatik provádíme redukci?

   (a) $G_1 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to abS|babA|\lambda \\ A \to abA|aB|bC \\ B \to abS|B|bC|\lambda \\ C \to aab|A|aA|\lambda \end{array}\right\}$

   (b) $G_2 = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b, c\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to aA|bB|aSa|bSb|\lambda \\ A \to bCD|Dba \\ B \to bB|AC \\ C \to aA|AC \\ D \to DE \\ E \to \lambda \end{array}\right\}$

2. Následující bezkontextovou gramatiku převeďte do Chomského a Greibachové normální formy. Pokuste se sestrojit LL(1) analyzátor pro jazyky generované danými gramatikami.

   (a) $G_3 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to A|0SA|\lambda \\ A \to 1A|1|B1 \\ B \to 0B|0|\lambda \end{array}\right\}$

   (b) $G_4 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to 0A10B10 \\ A \to 1A0|\lambda \\ B \to 1B00|\lambda \end{array}\right\}$

   (c) $G_5 = (\{S, E, F\}, \{(,), *, +, , 1\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{array}{l} S \to (E) \\ E \to F + F|F * F \\ F \to S|1 \end{array}\right\}$

3. Rozhodněte, zda jsou následující jazyky bezkontextové.

   (a) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
   (b) $L = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$
   (c) $L = \{a^i b^j a^i \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$
   (d) $L = \{a^i b^j a^k \mid i, j, k = 0, 1, 2, \ldots\}$
   (e) $L = \{a^i b^i c^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$
   (f) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k = 0, 1, 2, \ldots \& i \leq j \leq k\}$
   (g) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
   (h) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^* \& |w|_a = |w|_b\}$
   (i) $L = \{a^{i^2} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$
   (j) $L = \{a^{i^2+i+1} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$
   (k) $L = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo }\}$

Cvičení 9

1. Navrhněte zásobníkové automaty pro následující jazyky (nebo zdůvodněte, proč neexistuje):

   (a) $L_1 = \{w2w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$

   (b) $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$

   (c) $L_3 = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \& |w|_0 = |w|_1\}$

   (d) $L_4 = \{u2v \mid u, v \in \{0,1\}^* \& |u| \neq |v|\}$

   (e) $L_i = \{u2v \mid u, v \in \{0,1\}^* \& u\,[i] \neq v\,[i]\}$

   (f) $L_5 = \{u2v \mid u, v \in \{0,1\}^* \& u \neq v\}$

   (g) $L_6 = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (h) $L_7 = \{a^i b^j c^{i*j} \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$

2. Dokažte následující variantu pumping lemmatu pro bezkontextové jazyky: jazyk L nad Σ je bezkontextový, pak existuje $n \in \mathbb{N}$, že

   $$\forall z \in L\,|z| \geq n \Rightarrow (\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*)\left[u.v.w.x.y = z \ \&\ |vwx| \leq n \ \&\ vx \neq \lambda \ \&\ (\forall i \in \mathbb{N}_0) u.v^i.w.x^i.y \in L\right]$$

3. Uvažujme $G_5 = (\{E, T, F\}, \{(,), *, +, , 1\}, E, P)$, kde $P = \left\{\begin{matrix} E \to E + T|T \\ T \to T * F|F \\ F \to 1|(E) \end{matrix}\right\}$. Sestrojte zásobníkové automaty Z_1, Z_2 že $L(Z_1) = L(G)$ a $N(Z_2) = L(G)$.

4. Zásobníkové automaty z úlohy 1 převeďte na bezkontextové gramatiky.

Cvičení 10

1. Jaký jazyk generuje gramatika G? Je gramatika kontextová? Nalezněte ekvivalentní kontextovou gramatiku. $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{matrix} S \to aSBC|aBC \\ B \to BBC \\ C \to CC \\ CB \to BC \\ aB \to ab \\ bB \to bb \\ bC \to bc \\ cC \to cc \end{matrix}\right\}$.

2. Uvažujme bezkontextovou gramatiku G_2. Rozhodněte, zda je slovo *abcbb* generováno gramatikou G_2. K rozhodnutí použijte algoritmus CYG. $G_2 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$, kde $P = \left\{\begin{matrix} S \to CA|CB \\ B \to CBA|CB|BA|BB \\ C \to ABC|BC \\ A \to a \\ B \to b \\ C \to c \end{matrix}\right\}$.

3. Najděte podmínky, podle kterých leze určit, zda je jazyk generovaný danou bezkontextovou gramatikou nekonečný. Instpirujte se pumping lemmatem pro bezkontextové jazyky.

4. Nechť $b \in \mathbb{N}$. Navrhněte gramatiku, která generuje jazyk $L = \{u\#v\#w | u, v, w \in (0, 1, \ldots, (b-1))^* \ \&\ u_b \circ v_b = w_b\}$, u_b kde značí interpretaci slova u jako čísla v soustavě o základu b (tj. například $0101_2 = 5$) a $\circ$ nějakou binární aritmetickou operaci.

   (a) $\circ$ je +

   (b) $\circ$ je -

(c) $\circ$ je *

(d) $\circ$ je div (celočíselné dělení)

(e) $\circ$ je mod (zbytek po celočíselném dělení)

5. Nechť $b \in \mathbb{N}$. Navrhněte gramatiky, které generují jazyky:

   (a) $L = \{w | w \in (0, 1, \dots, (b-1))^* \ \& \ w_b$ je složené číslo$\}$

   (b) $L = \{w | w \in (0, 1, \dots, (b-1))^* \ \& \ w_b$ je prvočíslo$\}$

Cvičení 11

1. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, který ze zadaného vstupního slova vytvoří jeho zrcadlový obraz. Přesněji, počáteční konfiguraci (λ, q_0, w) převede na (λ, f, w^R), kde $f \in F$.

2. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, který prohodí obsah dvou paměťových bloků, přičemž paměť je představována páskou. Počáteční konfiguraci $(\lambda, q_0, u\#v\#w\#x\#y)$, kde $u, v, w, x, y \in (\Sigma \setminus \#)^*$ převede na $(\lambda, f, u\#x\#w\#v\#y)$, kde $f \in F$. Vynasnažte se, aby využíval co nejméně dalšího prostoru na pásce a co nejméně stavů.

3. Naprogramujte na Turingově stroji *a*sociativní paměť. Například můžete předpokládat Turingův stroj se dvěma páskami, kde první slouží k dotazování a odpovídání, a druhá reprezentuje obsah paměti. Na první pásce lze položit dotaz: k, kde $k \in (\Sigma \setminus \#)^*$ je klíč, přičemž jako odpověď na první pásce očekáváme data asociované s klíčem k. Dotazem $k\#w$, kde $k, v \in (\Sigma \setminus \#)^*$ jsou po řadě klíč a data, vložíme do paměti asociaci klíče k s daty w. Vstupní páska je v tomto případě smazána, pokud klíč v paměti ještě není reprezentován, jinak je ponechána beze změny.

4. Nechť $b \in \mathbb{N}$. Navrhněte **Turingův stroj**, který přijímá jazyk $L = \{u\#v\#w | u, v, w \in (0, 1, \dots, (b-1))^* \ \& \ u_b \circ v_b = w_b\}$, u_b kde značí interpretaci slova u jako čísla v soustavě o základu b (tj. například $0101_2 = 5$) a $\circ$ nějakou binární aritmetickou operaci.

   (a) $\circ$ je +

   (b) $\circ$ je -

   (c) $\circ$ je *

   (d) $\circ$ je div (celočíselné dělení)

   (e) $\circ$ je mod (zbytek po celočíselném dělení)

5. Nechť $b \in \mathbb{N}$. Navrhněte **Turingovy stroje**, které přijímají jazyky:

   (a) $L = \{w | w \in (0, 1, \dots, (b-1))^* \ \& \ w_b$ je složené číslo$\}$

   (b) $L = \{w | w \in (0, 1, \dots, (b-1))^* \ \& \ w_b$ je prvočíslo$\}$