
Kombinatorika na želvách

Tomáš Roskovec

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.



Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti."

Kombinatorika na želvách

Tomáš Roskovec, MFF UK

Abstrakt: Během přednášky si budeme často klást otázku: Kolika způsoby...? I když si tuto otázku často klademe již během běžných hodin středoškolské matematiky, není těžké vymyslet úlohu, na kterou již běžné metody nestačí a je zapotřebí užít nových metod nebo triků.

Dobrou motivační úlohou je například tato: Kolika způsoby můžeme rozmístit 30 želv do terárií očíslovaných 1 až 12? A co pokud si přidáme podmínku, že v každém teráriu musí být alespoň 2 želvy?

Právě na takové příklady se během přednášky podíváme a navíc využijeme krásné přednosti kombinatoriky, totiž toho, že úlohy lze velice snadno interpretovat v podobě slovních úloh bez jakýchkoli matematických termínů.

Klíčová slova: Kombinatorika, počet způsobů, kombinační číslo

Úvod a pomocné pohledy na věc

Kombinatorika je velice obsáhlé téma, a než se pustíme do látky, zavedeme některé kombinatorické pojmy a vyložíme principy, které nám usnadní pochopení dalších kroků.

Matematická indukce

Matematickou indukci používáme k dokazování vzorců nebo tvrzení, které mají platit pro všechna přirozená čísla. Například aritmeticko-geometrická nerovnost platí pro libovolný počet čísel, množina o n prvcích má 2^n podmnožin a podobně. Matematická indukce je důkazová metoda, která nám umožňuje ve dvou krocích dokázat takové tvrzení nebo vzorec. V prvním kroku ukážeme, že tvrzení platí pro jednu počáteční hodnotu, například nulu nebo jedničku. V druhém kroku pak ukážeme, že za předpokladu platnosti tvrzení pro $n - 1$ prvků platí tvrzení pro n prvků. Velká část kombinatorických výsledků „je vidět“ právě díky této technice.

Věta 1. *Bud' $V(n)$ výrok závisející na proměnné $n \in \mathbb{N}$. Nechť dále platí:*

1. *Výrok $V(1)$ platí.*
2. *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí, že $V(k)$ implikuje $V(k + 1)$.*

Pak výrok $V(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka 1. *První krok se obvykle označuje jako základ nebo báze, druhý krok se obvykle nazývá indukční krok.*

Příklad 1 (Vzorový příklad). *Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Řešení. Stačí postupovat přesně podle tvrzení. Pro $n = 1$ je ověření triviální, následuje indukční krok. Předpokládáme rovnost $1 + 3 + \dots + (2n - 3) = (n - 1)^2$ a snažíme se dokázat rovnost $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Platí totiž

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = (1 + 3 + \dots + (2n - 3)) + (2n - 1).$$

Z indukčního předpokladu je výraz na pravé straně vyjádřitelný jako

$$(1 + 3 + \dots + (2n - 3)) + (2n - 1) = (n - 1)^2 + (2n - 1).$$

Po roznásobení pak dostáváme požadovanou rovnost. □

Poznámka 2. *Možná vás napadne případ výroku závislého na parametru, na který by se hodila matematická indukce, ale který neplatí pro hodnoty parametru 0 ani 1. Můžeme samozřejmě začít dokazovat od kteréhokoli jiného čísla, 0 a 1 uvádíme proto, že se používají nejběžněji.*

Počítání dvěma způsoby

V kombinatorice se často setkáme s příklady, při jejichž řešení se lze ubírat více různými cestami. Vyjádření jednoho výsledku dvěma vzorci nám umožňuje dokázat některé na první pohled nejasné rovnosti. Myšlenkou přitom není nic jiného než přiřazení kombinatorického významu jednotlivým výrazům. Typickým příkladem je rovnost

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Tuto rovnost si dokážeme jako vzorový příklad.

Příklad 2 (Vzorový příklad). *Dokažte pro $n \in \mathbb{N}$ rovnost*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Řešení. Místo algebraických úprav se budeme soustředit na kombinatorický význam pravé a levé strany rovnosti. Pravá strana má význam počtu podmnožin množiny o velikosti n . Levá strana obsahuje součet $n + 1$ členů, kde k -tý člen vyjadřuje počet podmnožin velikosti $k - 1$ vybraných z množiny o velikosti n . Okamžitě vidíme, že obě strany mají stejný význam a musí se tedy rovnat. □

Princip inkluze a exkluze

Poznámka 3. V tomto odstavci budeme používat pojem mohutnost množiny, což pro nás bude znamenat počet jejích prvků. Pro nekonečné množiny je třeba zavést tento pojem precizněji, ale pro tento text si s touto interpretací vystačíme. Mohutnost množiny M značíme $|M|$.

Princip inkluze a exkluze je vlastně velice jednoduchá záležitost. V nejjednodušším případě nám říká, že vezmeme-li dvě konečné množiny, pak počet prvků sjednocení obou množin je roven součtu mohutností obou množin minus počet prvků náležících do obou množin. Po zobecnění tohoto případu dostáváme dobrý návod, jak spočítat mohutnost sjednocení konečně mnoha konečných množin, které ovšem nemusí být nutně disjunktní. Uvědomíme si, které prvky jsme připočetli vícekrát, a odečteme je a naopak si uvědomíme, které prvky jsme vícekrát odečetli, a přičteme je. Tuto myšlenku lze vyjádřit následujícím matematickým tvrzením.

Věta 2. Nechť M_1, M_2, \dots, M_n jsou konečné množiny. Pak platí rovnost

$$\left| \bigcup_{i=1}^n M_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{A \text{ splňuje } (*)} \left| \bigcap_{i=A_1}^{A_k} M_{A_i} \right|,$$

kde A splňuje $(*)$, právě když

1. A je k -tice přirozených čísel menších nebo rovných n .
2. Platí $A_1 < A_2 < \dots < A_k$.

Poznámka 4. Tvrzení vypadá neprůhledně, ale musíme si uvědomit, že suma velikostí průniků na pravé straně vlastně říká, že pro každou k -tici množin z M_i spočteme velikost průniku a součty velikostí těchto průniků střídavě přičítáme a odčítáme podle velikosti k .

Příklad 3 (Vzorový příklad). Cvičitel má 19 vytrénovaných cirkusových želv. Víme, že každá želva umí alespoň jeden trik¹. 9 želv umí chodit po předních nohách, 15 želv dokáže chytat míč ze vzduchu a 8 želv skočí salto vzad. Víme také, že 6 želv zvládne chůzi i chytání, 7 želv dokáže skákat salto vzad i chytat míč a 2 želvy umí chodit po předních i skákat salta vzad. Zvládla už některá želva všechna tři čísla?

¹Jinak bychom ji ostatně nemohli nazvat vytrénovanou.

Řešení. Pomocí předchozího tvrzení si sestavíme rovnici vyjadřující počet želv na základě příslušnosti do jednotlivých skupin, zde dělených podle dovedností. Označme Z množinu všech vytrénovaných želv, P, M a S množiny želv zvládajících jednotlivé triky – chůzi po předních, chytání míče a salto vzad. Z předchozího tvrzení platí rovnost

$$|Z| = |P| + |M| + |S| - |P \cap M| - |M \cap S| - |P \cap S| + |P \cap M \cap S|.$$

Po sestavení rovnice je zbytek příkladu triviální, stačí dosadit za velikosti množin čísla ze zadání. Zůstane nám jediná neznámá $|P \cap M \cap S|$. Pokud vyjde kladné číslo, pak některé želvy umí všechny tři kousky, pokud vyjde 0, pak žádná želva ještě tři triky neumí, a pokud vyjde záporné číslo, pak vidíme, že některé čísla ze zadání nemohla být správná. Po dosazení dostáváme $19 = 9 + 15 + 8 - 6 - 7 - 2 + |P \cap M \cap S|$, tedy $|P \cap M \cap S| = 2$ a dvě želvy již všechny triky zvládly. \square

Poznámka 5. V některé literatuře se pro výše uvedený princip používá pojem „princip zahrnutí a vyloučení“.

Pascalův trojúhelník

Prohlédněte si následující tabulku, známou jako Pascalův trojúhelník. Dokázali byste sestavit další řádku?

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & 1 \\
 & & 1 & 2 & 1 & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array} \tag{1}$$

Pravděpodobně jste si všimli, že číslo v novém řádku dostaneme jako součet dvou čísel předchozího řádku, které se vyskytují nad ním, případně jako 1, pokud se nové číslo vyskytuje na kraji a má nad sebou pouze 1. Popíšeme každé číslo v tabulce dvěma parametry, číslem řádku n a číslem pořadí v řádce k , a označíme ho $c(n, k)$. Z důvodů, které se ukážou později, číslujeme oba parametry od 0. Pak lze generování čísel v novém řádku popsat pro $n \in \mathbb{N}_0$, $k = 0, \dots, n - 1$, vztahem

$$c(n + 1, k + 1) = c(n, k) + c(n, k + 1)$$

a pro $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{-1, n\}$, tedy pro čísla na krajích, vztahem

$$c(n + 1, k + 1) = 1.$$

Abychom uvedli Pascalův trojúhelník do souvislosti s kombinačními čísly, dokážeme si následující větu.

Věta 3. *Pro libovolná přirozená čísla n, k splňující podmínku $k < n$ platí následující identita*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Důkaz. Důkaz můžeme zkusit provést algebraicky, ale mnohem snazší je použít metodu počítání dvěma způsoby. Levá strana má samozřejmě význam počtu možností výběru $k+1$ prvků z množiny o $n+1$ prvcích. Označme jeden pevně zvolený prvek jako p . Pak počet $k+1$ prvkových podmnožin je součtem počtu podmnožin obsahujících p a počtu podmnožin neobsahujících p . Vybíráme-li podmnožiny obsahující p , pak vlastně vybíráme k prvkové podmnožiny z n prvkové množiny, jelikož jeden prvek p již máme vybraný. Vybíráme-li podmnožiny neobsahující p , pak musíme vybrat $k+1$ prvků z množiny o n prvcích, protože prvek p vybrat nesmíme. Zapišeme-li to kombinačními čísly, dostáváme pravou stranu rovnosti a důkaz je tím hotov. \square

Z předchozí věty lze snadno odvodit, že pro libovolné číslo v Pascalově trojúhelníku platí předpis

$$c(n, k) = \binom{n}{k}.$$

Dále platí, že součet čísel v n -tém řádku je roven 2^n . Dostáváme tak nový pohled na některé kombinatorické výrazy, který nám může pomoci při dokazování pomocí počítání více způsoby.

Příklad 4 (Vzorový příklad). *Upravte následující výraz do kombinačního čísla*

$$\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{3} + \binom{5}{1} + \binom{6}{3}.$$

Řešení. Příklad je samozřejmě velice jednoduchý, takže by šel vyřešit mnoha způsoby, včetně vyčíslení výrazů a vyjádření součtu pomocí vhodného kombinačního čísla. Řešení přes Pascalův trojúhelník bude ovšem velmi elegantní a jediné, co budeme muset použít, je základní vlastnost týkající se počítání čísel nové řádky pomocí řádky předchozí, symetrie čísel v řádce a vlastnost, že vybíráme-li prázdnou podmnožinu, pak máme stejně možností, ať už vybíráme z jakkoli velké množiny. Postačí nám tedy zakreslit zadané sčítance do

trojúhelníku a snažit se nahrazovat dvě sousední čísla v řádce jejich součtem v řádce nižší, dokud nedostaneme v 7. řádce 4. číslo. Výsledné kombinační číslo je tedy $\binom{7}{4}$. \square

Příklady k procvičení

Vyzkoušíme si nyní známé postupy z hodin matematiky na lehce komplikovanějších příkladech. Některé úlohy si ale budeme moci výrazně zjednodušit užitím triků z první části textu.

Příklady na rozebrání

Příklad 5. *V kupé pro osm osob sedí sedm želv. Kolika způsoby se mohou posadit, víme-li, že dvěma z nich se dělá špatně, pokud sedí proti směru jízdy, a Michelangelo chce sedět u okýnka a vedle Leonarda? Michelangelovi ani Leonardovi se špatně nedělá.*

Řešení. Od začátku je jasné, že Michelangelo má pouze dvě možnosti, kam si sednout. Leonardo pak nemá vůbec žádnou možnost volby, sedne si vedle Michelangela. Musíme tedy usadit zbývajících pět želv. Rozdělíme řešení na dvě části. Nejprve spočítáme možnosti, kdy Michelangelo sedí po směru jízdy. Dvě želvy, které nemohou sedět proti němu, si pak musí sednout vedle Leonarda na dvě prázdná místa a zbývajících tři želvy si mohou sednout libovolně na čtyři sedadla proti směru jízdy. Počet možností je tedy $2! \binom{4}{3} 3!$. Druhou skupinou možností je případ, kdy sedí Michelangelo s Leonardem proti směru jízdy. V tom případě si dvě želvy, kterým se dělá zle, mohou vybrat ze 4 míst. Zbudou nám 4 místa pro 3 želvy, které na ně libovolně rozsadíme. Počet těchto možností je $\binom{4}{2} 2! \binom{4}{3} 3!$. Celkový počet možností je tedy roven

$$2! \binom{4}{3} 3! + \binom{4}{2} 2! \binom{4}{3} 3! = 48 + 288 = 336.$$

\square

Příklad 6. *Kolika způsoby můžeme přeskládat písmena ve slově ŽÉÉÉLVY tak, aby žádná dvě písmena É nestála vedle sebe?*

Řešení. Představme si, že místo slova ŽÉÉÉLVY budeme upravovat slovo ZÉÉÉZZZ. K prvnímu a druhému É připojíme Z a spojíme je v nerozdělitelný prvek ÉZ. Počet přerovnání písmen ze slova ZÉÉÉZZZ dostaneme tak, že počítáme možnosti seřazení tří nerozlišitelných znaků É (k prvním dvěma

z nich připišeme zprava Z) a dvou nerozlišitelných nepřipsaných Z. Ty můžeme srovnat celkem $\binom{3+2}{3}$ způsoby. Nakonec pak rozlišíme jednotlivá Z do původních písmen. Každá varianta ze slova ZÉÉÉZZZ má celkem $4!$ možností rozlišení písmen Z, takže celkový počet možností je $\binom{5}{3}4! = 240$. \square

Příklad 7. *Krotitel plazů uvádí do manéže n hodných želv a m zlých krokodýlů. Pokud by dva z těchto krokodýlů šli bezprostředně po sobě, určitě se začnou prát. Kolika způsoby (v závislosti na n a m) může plazy přivést?*

Řešení. Tato úloha je vlastně zobecněním té předchozí a budeme ji řešit obdobným způsobem. Nejprve si uvědomíme, že aby bylo možné mezi každé dva krokodýly nějakou želvu umístit, potřebujeme alespoň $m - 1$ želv. Pokud tedy tyto želvy odebereme a zařadíme mezi krokodýly, tak nám zbývá na zařazení ještě $n - m + 1$ nezařazených želv. Nyní si místo krokodýlů představíme takzvané „krokodýlželvy“, což je krokodýl, za nímž jde želva, s výjimkou poslední „krokodýlželvy“, což je obyčejný krokodýl. Díky této úvaze můžeme „krokodýlželvy“ a nezařazené želvy uspořádat libovolně, protože již nehrozí možnost rvačky. Počet možností je tedy $\binom{(m)+(n-m+1)}{n-m+1} = \binom{n+1}{n-m+1}$ pro $n \geq m - 1$ a 0 v opačném případě. Pokud bychom navíc rozlišovali jednotlivé plazy, tak musíme výsledek ještě vynásobit $m!n!$. \square

Příklad 8. *Želvy hrají v kanalizaci poker. Kolika způsoby může Rafaelo Michelangelovi rozdat karty, nechce-li, aby měl od nějaké barvy více než 3 karty? Připomínám, že rozdává 5 karet z balíčku 52, kde jsou obsaženy 4 barvy po 13 kartách.*

Řešení. Rozdává se celkem z 52 karet, vždy 13 je jich stejné barvy. Z toho 5 karet dostane do ruky Michelangelo. Rafaelovi vyhovuje každá situace kromě té, kdy má Michelangelo na ruce 4 nebo 5 karet stejné barvy. Výsledný počet možností dostaneme tak, že od celkového počtu možností odečteme ty, kdy mají alespoň 4 karty stejnou barvu. Celkový počet možností rozdání je zřejmě $\binom{52}{5}$, protože nezáleží na pořadí, v jakém bude těchto pět karet rozdáno. Nejsnáze spočítáme počet nevyhovujících případů jako součet rozdání právě 4 karet stejné barvy a právě 5 karet stejné barvy. Dostáváme tedy výraz $4\left(\binom{13}{4}\binom{39}{1} + \binom{13}{5}\right)$ a výsledný počet případů je tedy $\binom{52}{5} - 4\left(\binom{13}{4}\binom{39}{1} + \binom{13}{5}\right)$.

Zadání lze poměrně snadno zkomplikovat, například tím, že rozdáno bude 9 karet místo 5. V takovém případě bychom museli použít princip inkluze a exkluze, protože by mohl nastat případ, kdy jsou rozdány alespoň 4 karty shodné barvy hned pro dvě různé barvy. Tyto případy bychom při výše uvedeném postupu započítali dvakrát a výsledek by byl chybný. \square

Mírně pokročilé příklady

Příklad 9. *Donatelo vymyslel pro své kamarády veselou hru. Musí vymyslet co nejvíce slov složených z písmen ŽELVYVAKCI tak, aby byly samohlásky seřazeny podle abecedy. Kolik různých slov mohou sestavit?*

Řešení. Při řešení nejprve rozdělíme souhlásky a samohlásky. Pro určení pořadí 6 souhlásek a 4 samohlásek, nerozlišujeme-li jednotlivá písmena, máme $\binom{10}{4}$ možností. Po seřazení samohlásek a souhlásek přiřadíme každé z nich konkrétní písmeno ze spojení. Přiřazení samohlásek je pevně dáno kvůli abecední podmínce, pořadí 6 souhlásek lze určit $\frac{6!}{2!}$ způsoby, kvůli nerozlišitelnosti dvou písmen V. Celkově tedy máme $\binom{10}{4} \frac{6!}{2!}$ možností, jak slovo poskládat.

Jiné řešení problému je toto. Budeme si pro začátek myslet, že písmena V jsou rozlišitelná. Mám 10 možností, kam umístit první souhlásku, 9 možností, kam umístit druhou. . . , 5 možností, kam umístit šestou souhlásku a nakonec jednu možnost, jak umístit samohlásky. Výsledek vydělím dvěma kvůli nerozlišitelnosti těch dvou V a dostávám stejné řešení. \square

Příklad 10. *V rezervaci Serengeti byla jedna obzvlášť velká bažina vymezena pro mnoho druhů želv. Kvůli nebezpečí křížení a rvaček bylo nutno oblast rozdělit pomocí plotů, aby v každé ohraničené oblasti mohl žít jeden druh. Bohužel firma na stavbu plotů Xixao & syn umí postavit pouze ploty rovné a dlouhé přes celou bažinu, takže si oblast můžeme představit jako rovinu dělenou pomocí přímek. Na kolik oblastí může být bažina rozdělena za použití n plotů?*

Řešení. Úloha je snadné cvičení na matematickou indukci. Je dobré si nejprve rozmyslet, že pokud je bažina rozdělena na několik výběhů, tak nejlepší způsob, jak vést nový plot, je libovolný takový, aby tento plot nebyl rovnoběžný s žádným již postaveným a aby neprocházel žádným místem, kde se dva ploty již kříží. Přejdeme nyní k představě o rovině a přímkách. Pokud povedeme přímkou takovým způsobem, tak n -tá přidaná přímka protne $n - 1$ předchozích přímek. Také si uvědomíme, že projde n oblastmi, které tyto přímkou vymezovaly, a každou tedy rozdělí na dvě nové. Tímto algoritmem tedy s n -tou přímkou přidáme n oblastí. Uvážíme-li tedy počáteční stav 1 oblast, pak snadno indukci ověříme platnost vzorce pro počet oblastí

$$o(n) = 1 + \sum_{i=1}^n i = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Jako zdůvodnění nejvyšší efektivity tohoto algoritmu můžeme považovat fakt, že s každým ubraným bodem, ve kterém se nová přímka protne s předchozími, se okrademe o jednu protnutou oblast, a tedy i o jednu přidanou. A rovnoběžnost přímek, případně existence průsečíku více přímek znamenají zmenšení počtu průsečíků. \square

Příklad 11. *2n želv stojí srovnáno do kruhu (jde o želvy kruhové, takže se není čemu divit). Kolika způsoby z nich můžu vybrat v želv, které se vydají na výpravu, za předpokladu, že žádná želva nepůjde se svou sousedkou.*

Řešení. Vzpomeneme-li si na úlohu o hodných želvách a zlých krokodýlech, pak tento problém je poměrně analogický. Pokud vyřešíme problém převedení kruhu na posloupnost, je myšlenka řešení totožná. Zvolme si tedy pevně jednu želvu. Přiřadíme jí číslo 1 a po směru hodinových ručiček želvy očíslováme až do $2n$. Spočítáme zvlášť případy, kdy želva s číslem 1 na výpravu jde a kdy nejde. Ke každé želvě, která se na výpravu vydá, připojíme pevně jednu nevypravenou želvu, která půjde v číslování před ní. Pokud první želva na výpravu nejde, tak po spárování budeme místo $2n - 1$ prvků za první želvu řadit $2n - 1 - v$ prvků, tedy máme $\binom{2n-1-v}{v}$ možností. Pokud první želva na výpravu půjde, pak musí na pozici $2n$ stát nevypravená želva. Spárováním snížíme počet seřazovaných prvků bez pozice 1 a $2n$ na $2n - 2 - v + 1$, protože připojených nevypravených želv budeme potřebovat pouze $v - 1$ na $v - 1$ zařazovaných vypravených želv. Dostáváme tedy dalších $\binom{2n-2-v+1}{v-1}$ možností. Celkově tedy dostáváme $\binom{2n-1-v}{v} + \binom{2n-1-v}{v-1} = \binom{2n-v}{v}$ možností. \square

Příklad 12. *Michelangelo hraje s Donatelem a Leonardem volený mariáš (Rafaela nechtěli, protože podváděl při rozdávání). Kolika způsoby mohou být rozdány karty, víme-li, že volí Donatelo? Kolika způsoby mohou být karty rozděleny mezi hráče po odložení talonu? Pravidla jsou taková, že se rozdá 7 karet hráči volícímu barvu a ten z nich volí trumfy, pak 5 karet druhému a třetímu a nakonec ještě jednu pěticí karet každému hráči. Do talonu odhazuje hráč volící barvu dvě karty, nesmí to být eso ani desítka. V balíčku jsou celkem 4 esa a 4 desítky.*

Řešení. Podstatný na úloze o rozdávání je fakt, že nezáleží na pořadí, v jakém hráči dostali karty do ruky, ale záleží pouze na tom, jaké karty dostali. Rozdané karty si můžeme rozdělit do čtyř sad, karty Leonarda, karty Michelangela, pět karet Donatela a sedm karet, ze kterých Donatelo volí. Jednoduše tedy postupně vybíráme příslušný počet z balíčku 32 karet, dokud nemáme všechny karty rozdány. Pro jednotlivé sady tedy dostáváme

počty možností

$$\binom{32}{10}, \binom{22}{10}, \binom{12}{5}, \binom{7}{7}.$$

Počet možností dostaneme součinem těchto kombinačních čísel. Výsledek první části je tedy $\frac{32!}{10!10!5!7!}$.

Druhá úloha je analogická. Důležité jsou ale dvě změny, v případě Donatelových karet není podstatné, kterou z deseti karet dostal z prvních sedmi a kterou v druhých pěti, a navíc do talonu nelze odhodit desítku ani eso. Nejprve tedy spočítáme možnosti výběru talonu, těch je $\binom{32-8}{2}$, u ostatních karet dostáváme opět kombinační čísla

$$\binom{30}{10}, \binom{20}{10} a \binom{10}{10}.$$

Výsledek dostaneme opět jako součin všech těchto kombinačních čísel. Na rozdíl od předchozího případu záleží na tom, že nejprve vybereme karty do talonu, protože pokud bychom nejprve přiřadili část karet některému hráči, tak neznáme počet karet, které lze odhodit do talonu, protože nevíme, kolik desítek a es je již rozdáno. \square

Příklad 13. *Tři želvy byly poslány na výměnný pobyt do zahraniční ZOO. Zde jsou ubytovány společně se třemi místními želvami do kotců seřazených v řadě. Kolika způsoby může ošetřovatel želvy umístit, pokud nesmí být tři želvy ze stejné ZOO umístěné v řadě vedle sebe?*

Řešení. Příklad je typickou úlohou na princip inkluze a exkluze. Počet vhodných rozmístění je roven počtu všech rozmístění minus počet těch, kde je alespoň domácí trojice pohromadě, minus počet těch, kde je alespoň hostující trojice pohromadě, plus počet těch, kde jsou pohromadě obě trojice. Při počítání budeme uvažovat domácí a hostující želvy za nerozlišitelné v rámci trojic, jinak bychom počet možností navíc vynásobili $3!3!$ a tím přiřadili konkrétním želvám jejich kotce.

Počet všech možností je zřejmě $\binom{6}{3}$. Počítáme-li s tím, že alespoň jedna trojice bude pohromadě, pak ji spojíme do jednoho pomyslného trojkotce a ten řadíme se třemi samostatnými kotci, počet je tedy $2\binom{4}{1}$, kde násobením dvojkou přidáme, protože do trojkotce mohou být sestěhovány domácí nebo hostující želvy. A nakonec jsou li obě trojice pohromadě, pak nám stačí uvažovat pouze počet možných seřazení dvou prvků, tedy $\binom{2}{1}$. Počet přípustných umístění je tedy $\binom{6}{3} - 2\binom{4}{1} + \binom{2}{1}$. \square

Pokročilé příklady

Příklad 14. Dokažte pro $n > 0$ identitu

$$\sum_{i=1}^n i^2 \binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Řešení. Jedná se o typickou úlohu na počítání dvěma způsoby. Budeme matematizovat následující situaci. Skupina n želv sestavuje delegaci. Delegaci tvoří nejméně jedna z želv a v maximálním případě půjdou všechny. Navíc je třeba jmenovat z delegátů dvě zvláštní funkce, tajemníka a předsedu, které ovšem může zastávat i stejná želva.

Nejprve se podíváme na situaci, kdy se zvolí celá delegace a pak se vyberou tajemník s předsedou. Postupně pro různé velikosti celé delegace dostáváme sčítance, které tvoří sumu na levé straně rovnosti.

Druhou možností je zvolit speciální funkce a pak dovybrat zbytek želv do delegace. Pokud obě funkce zastává stejná želva, pak počet možností je $n2^{n-1}$, kde nejprve vybereme želvu funkcionáře a pak podmnožinu zbytku, která doplní delegaci. Pokud budeme vybírat do funkcí dvě různé želvy, dostáváme $n(n-1)2^{n-2}$ možností. Sečteme-li tyto dva výsledky, pak po úpravě dostaneme pravou stranu rovnosti a důkaz je hotov. \square

Příklad 15. Dokažte pro $n > 0$ identitu

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} \cdots = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \cdots$$

Obě sumy jsou konečné, končí výrazy $\binom{n}{n}$ a $\binom{n}{n-1}$, ale která suma končí kterým členem, závisí na paritě n .

Řešení. Pro zajímavost si můžeme všimnout, že pro n lichá je identita samozřejmě díky rovnosti $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ale protože pro sudá n nemáme tuto rychlou úvahu k dispozici, pomůžeme si Pascalovým trojúhelníkem. Identita nám říká, že součet čísel na lichých pozicích v n -tém řádku je roven součtu čísel na sudých pozicích tamtéž. Ale součet čísel na lichých pozicích vygenerujeme jako součet všech čísel z $n-1$. řádku. Stejným způsobem si ovšem můžeme vyjádřit i součet čísel na sudých pozicích. Tím je identita dokázána \square

Dělení do přihrádek

Příklady na dělení do přihrádek lze rozlišit podle několika kategorií a při počítání jednotlivých příkladů je důležité tyto typy rozlišovat.

Dělení rozlišitelných předmětů do přihrádek s pevnou velikostí

Tyto úlohy nevyžadují nové pohledy, řeší se jako typické kombinatorické úlohy.

Příklad 16. Čtyři želvy si mezi sebe dělí 28 dominových kostiček. Kolika způsoby to mohou provést, aby každá měla 7 kostiček?

Řešení. Není těžké nahlédnout, že úloha je analogická příkladu s rozdáváním karet při mariáši. Výsledek dostaneme jako součin

$$\binom{28}{7} \binom{21}{7} \binom{14}{7} \binom{7}{7} = \frac{28!}{7!7!7!7!}.$$

Alternativním způsobem řešení je seřadit si kostičky do pevně daného pořadí a očíslovat je. Každé želvě pak přiřadíme 7 značek, kterými může označit čísla kostiček, které jí budou přiděleny. Jde tedy o úlohu počtu seřazení 4 sad po sedmi značkách, tedy o úlohu na permutaci s opakováním. \square

Příklad 17. Po napínavé soutěži v dominu jsou vyhlášeny tři nejlepší želvy a pořadatel má mezi ně rozdělit šest různých cen. Vítěz dostane tři ceny, druhý dvě a třetí jednu cenu. Kolika způsoby si mohou ceny rozdělit?

Řešení. Opět úloha není těžká a opět se lze odvolat na úlohu o mariáši. Řešení dostaneme jako součin

$$\binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = \frac{6!}{3!2!1!}.$$

Úlohu lze opět převést na permutaci s opakováním. \square

Příklad 18. Zmoženy intelektuálně náročným dominem, rozhodly se želvy uspořádat turnaj v judu. Pro první kolo je zapotřebí z 16 želv vylosovat osm dvojic, které spolu budou zápasit. Kolika způsoby můžeme první kolo vylosovat?

Řešení. Úloha je na rozdíl od dvou předchozích obtížnější v jednom bodě, nezáleží totiž na tom, jestli bude vylovaná dvojice tažená v prvním, nebo ve třetím tahu, podstatné je pouze to, kdo s kým bude zápasit. Nejprve spočítáme počet možností, jako by na pořadí dvojic záleželo, a analogicky k předchozím úlohám dostáváme $\frac{16!}{(2!)^8}$. Vidíme, že pro jedno přiřazení do dvojic existuje 8! různých možností, v jakém dvojice vylosovat. Tímto číslem vydělíme, abychom stejné losy s různým pořadím počítali pouze jako jeden los. Počet možností je tedy roven $\frac{16!}{(2!)^8 8!}$. \square

Dělení nerozlišitelných předmětů do přihrádek s pohyblivou velikostí

Před řešením úloh se nám bude hodit krátká úvaha. Představíme-li si jedno konkrétní rozdělení jako přihrádky srovnané za sebou s předměty srovnanými za sebou, dostaneme jakousi posloupnost složenou z předmětů a hranic mezi přihrádkami. Tím jsme ale převedli problém přihrádek na základní kombinatorickou úlohu zjištění počtu posloupností se zadaným počtem prvků². Například pokud budeme hledat počet rozmístění 5 stejných mincí do 3 kasiček, pak si lze úlohu převést na zařazení 2 přepážek mezi kasičkami mezi 5 mincí, tedy na výběr dvou předmětů ze 7 pozic. Řešením je tedy $\binom{5+(3-1)}{3-1}$.

Příklad 19. *Dvanáct želv chytlo na rybářské výpravě sedm tresek a pět platýsů. Kolik je možností, jak si mohou úlovek rozdělit, víme-li, že každá želva dostane rybu? A kolik je možností rozdělení v případě, že některé želvy možná žádnou rybu nedostanou, například protože jsou vegetariánky nebo býložravci?*

Řešení. Pokud má každá želva dostat svou rybu, tak je úloha jednoduše řešitelná a výsledek je $\binom{12}{7}$. Mnohem zajímavější je případ, kdy nemusí některé želvy dostat nic a jiné mohou dostat více ryb. Jednoduše nejprve rozdělíme mezi želvy tresky a potom stejným způsobem platýse. Podle návodu ze začátku odstavce můžeme tresky rozdělit $\binom{11+7}{7}$ způsoby. Poté máme $\binom{11+5}{5}$ možností, jak rozdělit platýse. Výsledný počet možností je tedy $\binom{11+7}{7} \binom{11+5}{5}$. \square

Příklad 20. *Kolika způsoby lze naklást šest želvích vajec do čtyř seřazených děr v písku, víme-li, že kvůli bezpečnostním předpisům se nesmí klást více než dvě vejce do jedné díry?*

Řešení. Řešení příkladu se může ubírat více cestami, jednou z pracnějších by bylo počítání přes principi inkluze a exkluze. Mnohem jednodušší je uvědomit si, že číslo 6 můžeme rozdělit na součet 4 nezáporných celých čísel nepřevyšujících číslo 2 pouze dvěma způsoby, a totiž $0+2+2+2$ a $1+1+2+2$. Každé číslo ve čtveřici nám udává počet vajec v některé díře. Zbývá nám pouze přiřadit čísla ze čtveřic konkrétním dírám, což lze udělat $\binom{4}{3}$, respektive $\binom{4}{2}$ způsoby. Vejce lze tedy naklást $\binom{4}{3} + \binom{4}{2}$ způsoby. \square

²Prvky zde rozumíme dvojího druhu; umísťované předměty a hranice mezi dvěma přihrádkami.

Příklad 21. *Starý terarista odkazuje svým dvěma synům své vzácné želvy. Rozděluje jim $2n$ želv sloních, $2n$ kajmanek a $2n$ karet³. Kolika způsoby je může rozdělit, aby oba dostali stejný počet želv, za předpokladu, že mezi želvami stejného druhu nerozlišujeme?*

Řešení. Okamžitě vidíme, že pokud určíme želvy přidělené jednomu synovi, pak jsou pevně určeny i želvy pro druhého syna. Použijeme princip inkluze a exkluze. Pokud by otec měl každému synovi přidělit $3n$ želv za neomezeného počtu od jednotlivých druhů, tak by stačilo do množiny o $3n$ prvcích umístit dvě přihrádky, které budou oddělovat jednotlivé druhy, a měl by tedy $\binom{3n+2}{2}$ možností. Od těchto případů musíme odečíst ty, kde počet želv jednoho druhu překročí $2n$. Příklad, že by hranici překročili dva druhy, nemůže nastat. Označíme-li p_1 počet sloních želv, p_2 počet kajmanek a p_3 počet karet prvního bratra, pak je například $p_1 > 2n$ ekvivalentní $p_2 + p_3 < n$. Počet těchto možností je tedy roven počtu řešení nerovnice $p_1 + p_2 < n$ v \mathbb{N}_0 , tedy $\binom{n+1}{2}$. Tento mezivýsledek vynásobíme počtem druhů želv a odečteme od počtu možných rozdělení bez omezení. Dostáváme tedy výsledek $\binom{3n+2}{2} - 3\binom{n+1}{2}$ možností. \square

Dělení rozlišitelných předmětů do přihrádek s pohyblivou velikostí

Poslední typ úloh může být při ošklivých vymezení podmínek velice obtížný, ale bez přidaných podmínek je počet možností rozřazení z předmětů do t přihrádek t^z . Pro příklady s přidanými podmínkami je zapotřebí zdravého rozumu a základních kombinatorických dovedností.

Příklad 22. *Čtyři želví nindžové i s Třískou jedou výtahem skrz osmipatrovou budovu. Každá želva (i Tříska) vyskočí do nějakého patra. Kolika způsoby se mohou rozmístit po budově? Kolik z toho bude případů, kdy v každém patře vyskočí nejvýše jedna želva (případně jeden Tříska)? A co pokud povolíme výskok na patro i dvou želv v tandemu?*

Řešení. Bez omezení na počet je úloha triviální, každá želva má na výběr z 8 pater a celkově je tedy 8^5 možností, jak rozmístění provést. Úloha pro jednočlenné výskoky je díky omezení na jednu želvu velice jednoduchá, jedná se o variaci bez opakování a dostáváme $\frac{8!}{3!}$ možností. Pokud povolíme tandemové seskoky, bude nejsnazší sečíst počet možností pro jednu dvojici a tři jednotlivce a pro dvě dvojice a jednoho jednotlivce. Pro jednu dvojici nejprve vybereme, kdo do dvojice bude patřit, máme $\binom{5}{2} \frac{1}{2}$ možností. Pak

³Od slova kareta, nikoli karta.

postupujeme jako v předchozím případě, ale existují už pouze 4 různé výsadky, čili dostáváme $\frac{8!}{4!}$ možností a celkově můžeme rozmístit jednu dvojici a tři jednotlivce $\frac{8!}{4!} \binom{5}{2} \frac{1}{2}$ způsoby. Pro dvě dvojice počítáme analogicky a dostáváme $\frac{8!}{5!} \binom{5}{2} \frac{1}{2} \binom{3}{2} \frac{1}{2}$. Celkový počet možností dostaneme jako součet třech předchozích mezivýsledků. \square

Příklad 23. *Kolika způsoby můžeme uspořádat dvacet čísel týdeníku „Chovatel želv“ do knihovničky o pěti policích, víme-li, že do každé police se vejde jakýkoli počet časopisů?*

Řešení. Pro řešení použijeme již osvědčený trik a nejprve rozdělíme nerozlišené časopisy do pěti polic. To můžeme na základě předchozího odstavce (o nerozlišitelných předmětech v přihrádkách s pohyblivou velikostí) udělat $\binom{20+4}{20}$ způsoby. Následně časopisům dodáme čísla a rozlišíme je, což můžeme udělat $20!$ způsoby. Dostáváme tedy výsledek $\frac{24!}{4!}$.

Alternativním přístupem je použít permutaci s opakováním, kde uvažujeme 20 různých prvků (týdeníků) a 4 nerozlišitelné prvky (rozdělovníky mezi policemi). \square

Příklad 24. *Při řazení „Chovatele“ se ukázalo, že jedno číslo chybí. Proto je zapotřebí zorganizovat 33 želv do tří neprázdných pátracích skupin, které prohledají obývací, ložnici a terárium. Kolika způsoby můžeme skupiny zorganizovat za předpokladu, že na prohledání ložnice je zapotřebí právě polovina želv co na terárium a obývací dohromady?*

Řešení. Složitá podmínka o velikosti skupin nám říká pouze to, že ložnici prohledává právě 11 želv a je tedy $\binom{33}{11}$ možností, jak tuto skupinu sestavit. Pokud určíme želvy pátrající v obývací, tak bude již i třetí skupina pevně určena. Možností sestavení skupiny na prohledání obývací je tolik, kolik je podmnožin množiny s 22 prvky, pokud ovšem vyloučíme prázdnou a 22 prvkovou množinu, aby v každé skupině byla alespoň jedna želva. Dostáváme tedy $\binom{33}{11} (2^{22} - 2)$ možností. \square

Varianty Hanojských věží

Hanojské věže jsou známý hlavolam, kde máme na třech kolicích navlečených 8 kotoučů různé velikosti. Začíná se z pozice, kde jsou na prvním kolíku navlečeny kotouče seřazené podle velikosti⁴. Úkolem řešitele je pak přesunout pomocí povolených tahů celý sloupek z prvního kolíku na kolík třetí.

⁴Tedy nejširší je nejnižší, nad ním druhý nejširší atd.

Povolený tah je přesun jednoho kotouče, který je na vrcholku sloupce na svém kolíku, na jiný kolík tak, abychom nikdy nepoložili širší kolík na užší, tedy aby na všech kolících byly neustále kotouče seřazené podle velikosti.

Hlavolam není příliš složitý, řeší se rekurentně a jeho řešení si můžete přečíst v učebním textu Antonína Slavíka Kombinatorika. My problém vyřešíme způsobem, který on zadává jako cvičení, tedy matematickou indukcí.

Věta 4 (Řešení Hanojských věží). *Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, kde n je počet kotoučů na prvním kolíku, existuje řešení Hanojských věží a minimální počet tahů je $2^n - 1$.*

Důkaz. V prvním kroku, nazývaném báze nebo základ, ověříme platnost tvrzení pro $n = 1$. Okamžitě vidíme, že tvrzení platí, a jedním krokem problém vyřešíme.

V druhém kroku předpokládáme platnost tvrzení pro $n - 1$ kotoučů ale řešíme problém s n kotouči. Musíme si ale uvědomit, jaká situace musí nastat před prvním přesunutím nejširšího kotouče. Je jasné, že tento přesun bude na 3. kolík, protože přesouvat nejširší kotouč na prostřední kolík nijak nepřiblíží požadovaný stav. Navíc pokud by některý z ostatních kotoučů ležel na prvním nebo třetím kolíku, pak přesun není povolen, protože nejširší kotouč není na vrcholu sloupce nebo bychom jej položili na užší. Proto jediný možný stav je ten, kdy všechny ostatní kotouče tvoří sloupec na 2. kolíku, řazený samozřejmě podle šířky. Po přesunutí nejširšího kotouče pak stačí prostřední sloupec přesunout na třetí kolík a problém je vyřešen. Je nyní důležité si uvědomit, že z indukčního předpokladu umíme přesunout sloupec $n - 1$ seřazených kotoučů, tedy že se dokážeme dostat do stavu před přesunem nejširšího kotouče a že po přesunu umíme prostřední sloupec opět přesunout. Poslední myšlenkou je pak sečtení kroků, kde dvakrát přesuneme sloupec výšky $n - 1$ a jednou přesuneme široký kotouč. Pro počet kroků $k(n)$ tedy platí

$$k(n) = 2k(n - 1) + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1.$$

Tím je dokončen indukční krok a celý důkaz. \square

Zkusme si nyní hlavolam ztížit. Pokud bychom místo jednoho každého kotouče dané velikosti vzali od každé velikosti kotoučů m , pak nikoho nepřekvapí, že počet kroků $k(n, m) = m(2^n - 1)$. Ale co kdybychom vzali od každé velikosti m kotoučů a popsali je od spodního po horní 1 až m . Ponecháme pravidlo pro krok, ale budeme požadovat, aby na konci stál sloupec kotoučů na třetím kolíku seřazený nejen podle velikosti, ale i podle čísel, přesně jako

stál na začátku na prvním sloupci. Problém nazveme Hanojské věže s čísly a podíváme se na řešení i této verze.

Věta 5 (Řešení Hanojských věží s čísly). *Pro libovolné $n, m \in \mathbb{N}$, kde n je počet velikostí kotoučů na prvním kolíku a m je počet kotoučů stejné šířky, existuje řešení Hanojských věží s čísly a pro $m > 1$ je minimální počet tahů $2m(2^n - 1) - 1$.*

Důkaz. První pozorování říká, že pokud přesouváme sloupec kotoučů stejné velikosti, pak máme s výjimkou nejužších kotoučů pouze jeden způsob, jak to udělat, protože nejméně jeden z kolíků má na sobě užší kotouče, a proto můžeme přesouvat pouze tak, že „převrátíme“ sloupek na kolík, kam přesunujeme.

Druhé pozorování je takové, že každý sloupek musíme převrátit v počtu dělitelném dvěma, aby bylo zachováno pořadí.

Nyní bychom mohli zkusit jednoduché řešení, a totiž řešení ignorující čísla, a zkontrolovat, jestli bude fungovat. Pokud by fungovalo, pak je jistě na nejméně kroků. Řešení ovšem selže na sloupku nejširších kotoučů, které přesunujeme pouze jednou a čísla tak převrátíme. Znamená to tedy, že musíme přidat nějaké kroky. Nutně tedy spodní sloupec převrátíme, než ho přesuneme na třetí kolík. Jediný způsob, jak to udělat, je přenést spodní sloupec nejprve na druhý a pak teprve na třetí kolík. Kvůli přesunu nejprve musíme vše užší přenést na třetí kolík. Pak sloupec nejširších kotoučů přesuneme na druhý kolík. Nyní máme dva možné způsoby dokončení. Přesuneme-li vše z třetího sloupce na první a pak vše z druhého na třetí, pak nám stačí přesunout vše z prvního na třetí, což se ale neobejde bez „mezipřesunu“ na druhý, protože jinak budeme mít převrácený sloupec druhých nejširších kotoučů. Zdánlivě ekvivalentní je potom přesun třetího na druhý a pak přesun celého sloupce na třetí, stejně jako jsme ho přenesli na druhý. Oba dva způsoby nám vychází na $2m(2^n - 1)$ tahů, ale při druhém dokážeme „odečíst“ jedničku. Z nejširšího sloupce totiž ponecháme nejspodnější kotouč na prvním kolíku. Pak po přesunu užších kotoučů z třetího na druhý kolík tento kotouč prostě přesuneme na třetí kolík. Tuto metodu už nejde dále vylepšit, třebaže pro pořádný důkaz by bylo třeba mnohem více rozebírání. \square

V závěru kapitoly o Hanojských věžích už jen zmíním, že je zajímavé si všimnout, kolik přesunů čeká na každý kotouč. Bez očíslování je to 1 přesun pro nejširší kotouč, 2 přesuny pro druhý, 4 pro třetí až 2^{n-1} pro n -tý. Po očíslování všechna čísla vynásobíme ještě dvojkou. Jedinou výjimkou je nejširší kotouč s číslem odpovídajícím nejspodnějšímu kotouči v sloupečku, který bude jako jediný přesunut pouze jednou.

Kombinatorika na želvách

Tomáš Roskovec, MFF UK

Domácí úloha č.1. Pro $n \in \mathbb{N}$ zjednodušte následující výraz do tvaru kombinačního čísla

$$\binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{n+1} + \binom{n+3}{n+3} + \binom{n+3}{n+2}.$$

Snažte se výraz upravovat pomocí znalostí z přednášky, nestačí pouze zapsat ve tvaru

$$\left(\binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{n+1} + \binom{n+3}{n+3} + \binom{n+3}{n+2} \right).$$

Kombinatorika na želvách

Tomáš Roskovec, MFF UK

Domácí úloha č.2. *Přírodovědec chová 31 želv. Želvy mají rozličný apetit, živí se rybami, řasami anebo ovocem. Víme, že 18 želv může jíst ovoce, 10 želv jí ryby. Navíc víme, že 6 želv se nají i ovoce i řas a 5 želv může jíst ryby i ovoce. Dvě želvy jsou všežravé a spořádají cokoli. Kolik želv může přírodovědec nakrmit řasami, víme-li, že počet želv pojídajících řasy je druhou mocninou počtu těch, které sní řasy i ryby?*

Kombinatorika na želvách

Tomáš Roskovec, MFF UK

Domácí úloha č.3. *Na výroční schůzi se sešlo 5 snášelivých želv ozdobných a 3 nesnášelivé želvy dravé. Kolika způsoby můžeme tyto želvy usadit na očíslovaná křesla kolem kulatého stolu, pokud žádné dvě nesnášelivé želvy nesmí sedět vedle sebe.*

Kombinatorika na želvách

Tomáš Roskovec, MFF UK

Domácí úloha č.4. *Negramotná želva rozstříhala nápis KOMBINATORIKA na jednotlivá písmenka. Pokusí se nápis slepit zase dohromady, ale příliš se jí to nedaří. Kolik různých slov by mohla z písmenek složit, použijeli všechna? A kolik z těchto slov dodrží pravidlo, že žádné dvě souhlásky ani žádné dvě samohlásky nebudou následovat bezprostředně po sobě?*

Kombinatorika na želvách

Tomáš Roskovec, MFF UK

Domácí úloha č.5. *Stará želva kreslí do písku kruhy. Po nakreslení několika kružnic si všimne, že pokud nakreslí kružnice tak, aby rozdělily pískoviště na co nejvíce oblastí, tak lze počet těchto oblastí vyjádřit jednoduchým vzorečkem. Zkuste také objevit vzoreček, který počtu kružnic n přiřadí maximální počet oblastí $p(n)$, na které může být rovina těmito kružnicemi rozdělena. Zkuste také dokázat, proč je vzorec platný.*

Stará želva radí, pro malá n si případ dokážete nakreslit a spočítat jim přiřazené hodnoty $p(n)$. A pokud vám nejde vypočítat vzorec pro $p(n)$, můžete napřed zkusit vymyslet předpis pro $p(n+1) - p(n)$.