ZÁKLADY DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Michael Kubesa

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Michael Kubesa
Základy diskrétní matematiky

ISBN

Předmluva

Vážení čtenáři, tento učební text je a bude dynamický, tzn. bude průběžně doplňován, opravován a vylepšován. Autor Vám bude vděčen, pokud jej jakýmkoliv možným způsobem upozorníte na případné chyby, možná doplnění a vylepšení.

Zároveň se autor omlouvá, že text není zatím vybaven obrázky. Bude napraveno!

V Ostravě 28. 8. 2011 Michael Kubesa

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Pojem *diskrétní matematika* neoznačuje jakousi taktní, ohleduplnou či šetrnou matematiku, ale matematiku nespojitou. Již od pradávna lidé při zkoumání okolní reality používali dva zcela odlišné filozofické přístupy. Oba shodně pracovaly s představou, že Svět se skládá z nějakých základních (dále nedělitelných) částic, přičemž první přístup říkal, že v jakémkoliv okolí (sebemenším) libovolné základní částice je vždy nějaká jiná základní částice (spojitá nebo-li kontinuální představa Světa) a druhý, že ke každé základní částici umíme najít takové okolí, že v něm žádná další základní částice není (nespojitá představa Světa). Je třeba dodat, že tyto dva přístupy si při zkoumání objektivní reality (pokud existuje) neodporují, ale naopak se doplňují.

Pohled spojitý je v dnešní technické praxi uplatňován při tvorbě tzv. analogových přístrojů, zatímco nespojitý v případě digitálních. Protože žijeme v době bouřlivě se rozvíjející digitalizace, je přirozené, že nespojitá představa Světa nabývá vrchu.

Nejdramatičtější rozvoj diskrétní matematiky je proto neoddělitelně spojen s rozvojem digitální počítačové techniky, jenž probíhá od poloviny 20. století do dnešních dnů.

Uvědomme si, že matematika při zkoumání Světa nahrazuje jednotlivé objekty čísly a k tomu si vytvořila různé číselné množiny. Zopakujme si je. *Množinu přirozených čísel* budeme značit $\mathbb{N}$, kde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Na tomto místě si ihned řekněme, že v diskrétní matematice často přidáváme do množiny přirozených čísel nulu, takovou množinu budeme značit $\mathbb{N}_0$. Dále známe *množinu celých čísel* $\mathbb{Z}$, kde $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, *množinu racionálních čísel* $\mathbb{Q}$, kde $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ a *množinu reálných čísel* $\mathbb{R}$, kde $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, přičemž $\mathbb{I}$ je množina iracionálních čísel, to jsou ta, která nelze vyjádřit číslem racionálním (např. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \mathrm{e} = 2,7812\dots$). Zmiňme ještě *množinu komplexních čísel* $\mathbb{C}$, kde $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Jistě jste si všimli, že číselné množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ vlastně charakterizují Svět nespojitý a proto jsou téměř všechna zkoumání v diskrétní matematice popsatelná právě těmito čísly. Zatímco například *matematická analýza* (kontinuální matematika) se při svých výzkumech neobejde bez čísel reálných.

1.1 Množiny, podmnožiny a operace s nimi

Již v úvodu jsme používali pojem *množina*, aniž by byl, byť intuitivně, definován. Množinou rozumíme nějaký souhrn vzájemně rozlišitelných objektů, přičemž objektům, které množina obsahuje, říkáme *prvky množiny.* Množiny obvykle označujeme velkými písmeny $A, B, M, V, U, X, Y \dots$ a prvky množiny malými $a, b, \mathrm{e}, u, v, x, y \dots$. Skutečnost, že prvek x do množiny M náleží, zapíšeme $x \in M$, zatímco pokud prvek x do množiny M nepatří, zapíšeme $x \notin M$. *Prázdnou množinu* (množina bez prvků) označíme symbolem $\emptyset$.

Množiny zadáváme buď *výčtem prvků* nebo-li *taxativně* (např. $M = \{5, 7, 9, 11\}$) nebo *charakteristickou vlastností* (např. $M = \{x \in \mathbb{N} : 5 \leqq x \leqq 11, x \text{ je liché } \}$ nebo $M = \{2k + 1 : k = 2, 3, 4, 5\}$). Předešlý zápis můžeme také přepsat takto: $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leqq x \leqq 11 \wedge x \text{ je liché } \}$ nebo $M = \{2k + 1 \mid k = 2, 3, 4, 5\}$. V obou případech ale první zápis čteme *M je množina všech přirozených čísel x, pro která platí* (tak čteme : nebo $|$)*, že jsou lichá a větší nebo rovna 5 a menší nebo rovna* 11 a druhý čteme *M je množina všech čísel* $2k + 1$, *kde* (tak čteme : nebo $|$) *k projde všechny celočíselné hodnoty od 2 do 5.* Vidíme, že logická spojka „a současně“ se při zápisu množiny charakteristickou vlastností může zaměnit čárkou.

Pořadí prvků v množině nehraje roli, platí tedy $\{5, 7, 9, 11\} = \{7, 11, 9, 5\}$. V předchozí větě jsme použili *rovnost dvou množin*, je přirozené, že dvě množiny se rovnají právě tehdy, když obsahují tytéž prvky. Z výše uvedeného také plyne, že každý prvek množiny se v množině vyskytuje přesně jednou (rozlišitelnost), proto například souhrn prvků $\{b, a, d, c\}$ je množinou a souhrn $\{b, a, d, a\}$ není množinou. Protože v matematice občas potřebujeme neuspořádaný souhrn prvků, kde se některé prvky opakují, zavedeme pojem *multimnožiny.* Multimnožina je tudíž neuspořádaný souhrn prvků, přičemž se prvky mohou opakovat, nerozlišitelným prvkům říkáme *kopie.* Multimnožiny budeme v tomto textu značit velkými písmeny s hvězdičkou např. X^*. Množiny i multimnožiny mohou být konečné i nekonečné, v diskrétní matematice převážně pracujeme s množinami konečnými.

Obecnou konečnou neprázdnou množinu X zpravidla zapisujeme $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, kde n je libovolné přirozené číslo. V seznamu prvků tedy vypíšeme první dva prvky, pak horizontální trojtečku a prvek poslední. Dodejme, že uvedený zápis znamená pro $n = 1$, že $X = \{x_1\}$ a pro $n = 2$, že $X = \{x_1, x_2\}$. Obecnou nekonečnou neprázdnou množinu zapíšeme $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ nebo $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, pokud není obecný n-tý prvek jednoduše vyjadřitelný.

Počet prvků množiny X zapisujeme $|X|$. V případě nekonečné množiny používáme obvykle místo pojmu *počet prvků množiny* pojem *mohutnost množiny* (značení zůstává stejné). Vidíme, že pro $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je $|X| = n$ a $|\emptyset| = 0$. Pokud máme obecnou konečnou multimnožinu X^*, která obsahuje n_1 kopií prvku x_1, n_2 kopií prvku x_2 atd. až n_n kopií prvku x_n, pak $|X^*| = n_1 + n_2 + \cdots + n_n$.

Množina X je *podmnožinou* množiny Y, jestliže pro každé $x \in X$ platí $x \in Y$, což zapisujeme $X \subseteq Y$. Pokud $X \subseteq Y$ a existuje prvek $y \in Y$, který nepatří do X, pak říkáme, že X je *vlastní podmnožinou* Y a zapíšeme $X \subset Y$. Snadno lze vypozorovat, že $X = Y$ právě tehdy, když $X \subseteq Y$ a $Y \subseteq X$. Připomeňme ještě, že pokud $X \subseteq Y$, pak tomuto vztahu říkáme *inkluze* množin X, Y. Podobně lze také definovat *podmultimnožinu* dané multimnožiny.

Jsou-li prvky dané množiny také množiny, pak hovoříme raději o *systému množin* a ne o *množině množin. Systém všech podmnožin množiny* X budeme značit 2^X a budeme mu říkat *potenční množina* množiny X. Pokud je $X = \emptyset$, pak $2^X = \{\emptyset\}$. Všimněte si, že $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Pro konečné množiny X obecně platí, $|2^X| = 2^{|X|}$. Tento vztah dokážeme v Kapitole 4.

Příklad 1.1. Mějme množinu $M = \{x \in \mathbb{Z} : 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0\}$. Určete taxativně množinu 2^M.

Řešení. Množinu M máme zadánu charakteristickou vlastností, pokusíme se ji vyjádřit výčtem prvků. Musíme tedy najít všechna celočíselná řešení rovnice $2x^3 + 3x^2 - - 3x - 2 = 0$. Protože jde o rovnici třetího řádu, bude nutné jeden z kořenů odhadnout. Není těžké si uvědomit, že jeden z nich je číslo 1. Proto $x_1 = 1$. Pak ovšem musí platit, že polynom $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ jsme schopni zapsat ve tvaru $(x-1) \cdot P(x)$. Řešením rovnice $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = (x-1) \cdot P(x) = 0$, jsou kromě jedničky také řešení rovnice $P(x) = 0$, přičemž $P(x) = (2x^3 + 3x^2 - 3x - 2)/(x-1) = 2x^2 + 5x + 2$. Diskriminant rovnice $P(x) = 0$ je $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$, pak ovšem $x_2 = \frac{-5+3}{4} = \frac{1}{2}$ a $x_3 = \frac{-5-3}{4} = -2$. Proto $M = \{-2, 1\}$, neboť nás zajímají pouze celočíselná řešení. Nyní je již jasné, že $2^M = \{\emptyset, \{-2\}, \{1\}, \{-2, 1\}\}$. Pozor, nesmíme psát $2^M = \{\emptyset, -2, 1, \{-2, 1\}\}$, protože podmnožinou M je *jednoprvková množina s prvkem* -2 *resp. 1*, ne *prvek* -2 *resp. 1*! Snadno také ověříme, že $|2^M| = 4 = 2^2 = 2^{|M|}$.
▲

Při práci s množinami, je dobré zavést pojem *universa* či *univerzální množiny* U. Potom platí, že každá množina, která přichází v úvahu (s kterou pracujeme) je podmnožinou U, přičemž množina U charakterizuje nějaký přirozený celek. Pojem universa je tudíž relativní. V matematické analýze jím je často množina reálných čísel $\mathbb{R}$, zatímco v diskrétní matematice to bývá obvykle $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ nebo $\mathbb{Z}$.

S množinami můžeme provádět různé operace, což znamená, že jedné či více množinám jednoznačně přiřadíme nějakou další množinu. Nejjednodušší operací je *doplněk (komplement) množiny* v množině U. Doplněk množiny A značíme $\overline{A}$ nebo $\overline{A}_U$ a platí $\overline{A} = \{x \in U : x \notin A\}$ (v $\overline{A}$ jsou všechny prvky universa, které nepatří do množiny A). Doplněk množiny je znázorněn na obrázku ?? tzv. *Vennovým diagramem.*

Již ze střední školy známe *průnik* $A \cap B$, *sjednocení* $A \cup B$ a *rozdíl* $A \setminus B$ množin A, B. Víme, že platí $A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$ (v $A \cap B$ jsou všechny společné prvky množin A, B), $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$ (viz obr.??) (v $A \cup B$ jsou všechny prvky z první nebo druhé množiny) a $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ (v $A \setminus B$ jsou všechny prvky množiny A, které nepatří do B)(viz obr.??).

Následující příklad je první ukázkou, jak vést v matematice obecný důkaz. Všimněte si, že probíhá v jednotlivých krocích, přičemž správnost každého kroku musí být obhájena nějakým již známým (tudíž už dokázaným) pravidlem. Matematickým důkazům se budeme pečlivě věnovat v Kapitole 4.

Příklad 1.2. Dokažte, *De Morganova pravidla* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ a $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Řešení. Pokud $X \subseteq Y$ a současně $Y \subseteq X$, pak $X = Y$. Této myšlenky využijeme v následujícím důkazu. Nechť x je libovolný prvek z množiny $\overline{A \cap B}$. Potom platí, že $x \in U$ a $x \notin A \cap B$. Výrok $x \notin A \cap B$ lze přepsat $\neg(x \in A \cap B)$, kde symbol $\neg$ znamená *negaci výroku* (opak výroku) v závorce. Víme, že pokud $x \in A \cap B$, pak $x \in A \wedge x \in B$. Dostáváme tudíž výrok $\neg(x \in A \wedge x \in B)$. Z výrokové logiky je známo, že výrok $\neg(x \in A \wedge x \in B)$ je ekvivalentní s výrokem $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$, což je výrok $x \notin A \vee x \notin B$. Protože $x \in U$, můžeme předešlý výrok přepsat $x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}$, z čehož plyne $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Dokázali jsme, že každý prvek množiny $\overline{A \cap B}$ je prvkem množiny $\overline{A} \cup \overline{B}$, proto $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Nyní předpokládejme, že $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Potom $x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}$ a odtud $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$. Předešlý výrok je ekvivavalentní s výrokem $\neg(x \in A \wedge x \in B)$, což lze přepsat $\neg(x \in A \cap B)$. Čili prvek x patří do U, ale nepatří do $A \cap B$, proto $x \in \overline{A \cap B}$. V tuto chvíli máme prokázáno, že každý prvek z $\overline{A} \cup \overline{B}$ je prvkem $\overline{A \cap B}$. Tudíž $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

Ověřili jsme platnost obou množinových inkluzí $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ a $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$, proto musí platit $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Důkaz druhého De Morganova pravidla ponecháme jako cvičení.

▲

Průnik resp. sjednocení většího počtu množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ budeme zapisovat $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ resp. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Tudíž

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \quad \text{a} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

Pokud chceme z n množin vybrat jen nějakých k, $k \leqq n$, pak dolní indexy vybraných množin obecně označíme $i_1, i_2, \ldots, i_k$, kde $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Průnik a sjednocení těchto vybraných množin pak můžeme zapsat

$$\bigcap_{j\in\{i_1,i_2,\dots,i_k\}} A_j = A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k} \quad \text{a} \quad \bigcup_{j\in\{i_1,i_2,\dots,i_k\}} A_j = A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\ldots\cup A_{i_k}.$$

Předešlé množinové operace přiřazovaly jedné či více množinám množinu, jež byla podmnožinou téhož universa jako množiny původní. Následující operace tuto vlastnost nemají.

Kartézský součin množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ budeme značit $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ a platí

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) : a_i\in A_i, i=1,2,\ldots,n\}.$$

Kartézský součin množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v tomto pořadí je tedy množina všech uspořádaných n-tic, kdy první prvek (také můžeme říci prvek na první pozici) je z první množiny, druhý z druhé a tak dále, až n-tý z n-té množiny. Navíc platí, že $A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$.

Dodejme, že zápis $i=1,2,\ldots,n$ znamená, že index i projde všechna čísla $1,2,\ldots$ $\ldots,n$, zatímco zápis $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ říká, že index i je některé z čísel $1,2,\ldots,n$.

Platí-li $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$, pak kartézský součin $A\times A\times\ldots\times A=A^n$ nazýváme *n-tou kartézskou mocninou* množiny A. Dodejme, že $A^1=A$ a $A^0=\{\emptyset\}$.

V Kapitole 4 dokážeme platnost vztahu $|A\times B|=|A|\cdot|B|$. Dá se také dokázat zobecněný vztah $|A_1\times A_2\times\ldots\times A_n|=|A_1|\cdot|A_2|\cdots|A_n|$.

Příklad 1.3. Nechť $A=\{\triangle,\square\}$, $B=\{1,3,5\}$ a $C=\{\clubsuit\}$. Určete množiny $A\times B$, $C\times B$, $B\times C$, $B\times C\times A$, B^2 a A^3.

Řešení. $A\times B$ je množina všech uspořádaných dvojic, kde na první pozici je prvek z A a na druhé prvek z B. Abychom na žádnou dvojici nezapomněli, je dobré postupovat systematicky. Nejdříve vezmeme první prvek z A a na druhou pozici k němu budeme postupně přidávat všechny prvky množiny B. Dostaneme dvojice $(\triangle,1),(\triangle,3),(\triangle,5)$. Pak totéž provedeme pro druhý prvek z A a dostaneme dvojice $(\square,1),(\square,3),(\square,5)$. (Pokud by v A existovaly další prvky, budeme takto pokračovat dál.) Tudíž $A\times B=\{(\triangle,1),(\triangle,3),(\triangle,5),(\square,1),(\square,3),(\square,5)\}$.

Podobně, $C\times B=\{(\clubsuit,1),(\clubsuit,3),(\clubsuit,5)\}$ a $B\times C=\{(1,\clubsuit),(3,\clubsuit),(5,\clubsuit)\}$. Všimněte si, že $C\times B\neq B\times C$, tedy kartézský součin není komutativní. V našem případě dokonce platí $(C\times B)\cap(B\times C)=\emptyset$ (množiny nemají ani jeden společný prvek).

Připomeňme, že jestliže pro dvě množiny X,Y platí $X\cap Y=\emptyset$, pak X,Y nazýváme *disjunktní množiny.*

$B \times C \times A$ je množina všech uspořádaných trojic, kde 1. prvek je z množiny B, druhý z C a třetí z A. Budeme opět systematičtí. Na první pozici dáme 1. prvek z B, na druhou první prvek z C a na třetí postupně všechny prvky z A. Dostaneme $(1, \clubsuit, \triangle), (1, \clubsuit, \square)$. Na první pozici ponecháme 1. prvek z B a na druhou bychom dali druhý z C. Ten ovšem neexistuje, proto dáme na první pozici druhý prvek z B, na druhou jediný prvek z C a na třetí postupně všechny prvky z A. Dostaneme uspořádané trojice $(3, \clubsuit, \triangle), (3, \clubsuit, \square)$. Nakonec dáme na první pozici poslední prvek z B a celou proceduru opakujeme. Dostaneme $(5, \clubsuit, \triangle), (5, \clubsuit, \square)$. Proto $B \times C \times A = \{(1, \clubsuit, \triangle), (1, \clubsuit, \square), (3, \clubsuit, \triangle), (3, \clubsuit, \square), (5, \clubsuit, \triangle), (5, \clubsuit, \square)\}$

Protože kartézské mocniny jsou speciálními případy kartézských součinů, můžeme být stručnější a ihned psát

$$B^2 = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$

$$\begin{aligned} A^3 \;=\; & \{(\triangle, \triangle, \triangle), (\triangle, \triangle, \square), (\triangle, \square, \triangle), (\triangle, \square, \square), \\ & (\square, \triangle, \triangle), (\square, \triangle, \square), (\square, \square, \triangle), (\square, \square, \square)\}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že platí $|A \times B| = 6 = 2 \cdot 3 = |A| \cdot |B|$, $|C \times B| = 3 = 1 \cdot 3 = |C| \cdot |B| = |B| \cdot |C| = |B \times C|$, $|B \times C \times A| = 6 = 3 \cdot 1 \cdot 2 = |B| \cdot |C| \cdot |A|$, $|B^2| = 9 = 3^2 = |B|^2$ a $|A^3| = 8 = 2^3 = |A|^3$.

▲

Příklad 1.4. Určete taxativně množinu 2^X, pokud $X = (A \times B) \setminus B^2$ a $A = \{x \in \mathbb{N} : x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$ a $B = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{x}\}$.

Řešení. Začněme tím, že si množiny A i B vyjádříme taxativně. V případě množiny A hledáme přirozená čísla, která splňují rovnici $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$. Nalezneme všechny kořeny této rovnice a vybereme pouze ty, které jsou přirozenými čísly. Protože $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = 0$, tak jeden z kořenů, řekněme x_1, je 0 a zbývající dvě řešení x_2, x_3 jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Pro hledání celočíselných kořenů normované kvadratické rovnice (před x^2 je jednička) $x^2 + px + q = 0$ můžeme s úspěchem použít *Vietovu větu*, která říká, že pro kořeny x_1, x_2 musí platit $x_1 + x_2 = -p$ a $x_1 \cdot x_2 = q$. V našem případě tudíž hledáme dvě celá čísla, která v součtu dávají trojku a v součinu dvojku. Ale taková čísla jsou 1 a 2. Proto $A = \{1, 2\}$, neboť 0 není přirozené číslo.

Dodejme ještě, že Vietova věta v obecném znění hovoří o vztahu kořenů a koeficientů obecné algebraické rovnice n-tého řádu, tj. rovnice $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, přičemž a_i jsou reálná čísla pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$.

V případě množiny B hledáme reálná čísla, která se rovnají své převrácené hodnotě. Taková čísla jsou pouze dvě, a to $-1, 1$. Proto $B = \{-1, 1\}$, $A \times B = \{(1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1)\}$ a $B^2 = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, 1), (1, -1)\}$.

Chceme-li určit množinu $X = (A \times B) \setminus B^2$, pak hledáme prvky množiny $A \times B$, které nejsou obsaženy v B^2 (Pozor, prvky jsou tentokrát uspořádané dvojice!). Tudíž $X = (A \times B) \setminus B^2 = \{(2, -1), (2, 1)\}$.

Ještě zbývá nalézt množinu 2^X, což je systém všech podmnožin množiny X (prvky jsou podmnožiny množiny X). Proto $2^X = \{\emptyset, \{(2,-1)\}, \{(2,1)\}, \{(2,-1), (2,1)\}\}$.

Uvědomte si, že zápisy $\{(2,1)\}$ a $\{2,1\}$ neznamenají totéž! První označuje jednoprvkovou množinu, kde prvkem je uspořádaná dvojice $(2,1)$, zatímco druhý označuje dvouprvkovou množinu, kde prvky jsou čísla 2 a 1.

▲

V závěru podkapitoly ještě zavedeme pojem *celočíselného intervalu*. Symbolem $[x,y]$, kde $x, y \in \mathbb{Z}, x \leqq y$, budeme označovat množinu všech celých čísel, která jsou menší nebo rovna y a větší nebo rovna x. Takové množině budeme říkat *celočíselný interval od x do y*. Platí tedy $[x,y] = \{a \in \mathbb{Z} : x \leqq a \leqq y \wedge x, y \in \mathbb{Z} \wedge x \leqq y\}$.

1.2 Posloupnosti, sumy a produkty

Každou konečnou množinu či multimnožinu můžeme *úplně (lineárně) uspořádat*, tzn. určíme jednoznačně, který prvek je první, který druhý... atd. Určíme tudíž jednoznačně pořadí každého prvku v množině. V takto pevně uspořádané množině označíme první prvek a_1, druhý prvek a_2 až obecný n-tý prvek a_n. Dostaneme tedy uspořádanou n-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kde a_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou všechny prvky zadané množiny. Takovou uspořádanou n-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ budeme nazývat *konečná posloupnost* a můžeme ji také zapsat $(a_i)_{i=1}^n$. Prvek a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nazýváme *$i$-tý člen posloupnosti*, popřípadě *člen posloupnosti*. Podobně můžeme také uspořádat nekonečné množiny a multimnožiny, čímž dostaneme *nekonečné posloupnosti*. Nekonečné posloupnosti zapisujeme buď $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ nebo $(a_1, a_2, \ldots)$ nebo $(a_i)_{i=1}^\infty$.

Dodejme ještě, že připouštíme existenci *prázdné posloupnosti*, tj. posloupnosti bez jakéhokoliv členu.

Konkrétní posloupnosti můžeme zadávat různými způsoby. Například tak, že vypíšeme všechny její prvky v daném pořadí, například $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21)$ (máme-li na mysli konečnou posloupnost) nebo $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ (máme-li na mysli nekonečnou posloupnost). V obou případech říkáme, že jsme zadali posloupnost *taxativně* nebo-li *výčtem prvků*. Takové zadání je v případě posloupnosti s mnoha členy velmi obtížné a v případě nekonečné posloupnosti dokonce nemožné (Co následuje za číslem 21?).

Další možnost, jak zadat posloupnost, je *rekurentně*. Což znamená, že zadáme předpis pro výpočet n-tého členu a_n z členů předchozích, přičemž musíme znát dostatečný počet prvních členů posloupnosti. Jako příklad nám poslouží *Fibonacciho posloupnost*, která bývá zadávána následovně: $a_1 = a_2 = 1$ a $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pro $n \geqq 3$.

Jistě jste si všimli, že výše uvedená posloupnost $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ by mohla být Fibonacciho posloupnost.

Také můžeme určit posloupnost *vzorcem pro n-tý člen* (předpis, jak vypočítat a_n, pokud známe n). Jako příklad uveďme $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$. Je velmi zajímavé, že pokud by jste použili tento vzorec pro $n = 1, 2, \ldots$ dostali by jste posloupnost $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$. Jde tudíž opět o Fibonacciho posloupnost! Výpočty jednotlivých členů ze zadaného vzorce jsou docela zdlouhavé, proto zkusme ověřit (pro zájemce) alespoň, že například a_6 je rovno 8.

Pro zájemce:

Výpočet provedeme bez použití binomické věty, neboť v jejím zápise jsou použita kombinační čísla s kterými se seznámíme až v následující kapitole. Víme, že $a_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^6)$. Proveďme substituci $a = \sqrt{5}$ a uvědomme si, že $(1+a)^6 = (1+a)^3 \cdot (1+a)^3$ a $(1-a)^6 = (1-a)^3 \cdot (1-a)^3$, přičemž $(1+a)^3 = 1 + a + a^2 + a^3$ a $(1-a)^3 = 1 - a + a^2 - a^3$. Po roznásobení vidíme, že a_6 je

$$\frac{(1 + 6a + 15a^2 + 20a^3 + 15a^4 + 6a^5 + a^6) - (1 - 6a + 15a^2 - 20a^3 + 15a^4 - 6a^5 + a^6)}{2^6 \cdot a}.$$

Z čehož po úpravách dostaneme

$$a_6 = \frac{4a(3 + 10a^2 + 3a^4)}{4a \cdot 2^4}.$$

Po vykrácení a zpětné substituci máme $a_6 = \frac{3+10(\sqrt{5})^2+3(\sqrt{5})^4}{2^4} = \frac{3+10.5+3.25}{2^4} = \frac{128}{2^4} = \frac{2^7}{2^4} = 2^3 = 8$.

Na závěr poznamenejme, že určit vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti není jednoduché, a tato problematika přesahuje možnosti tohoto textu. Celé odvození můžete najít v [MaNe].

Poměrně často se stává, že chceme všechny členy posloupnosti $(a_i)_{i=1}^n$ sečíst nebo vynásobit. Součet budeme označovat symbolem *suma* $\sum$ a součin symbolem *produkt* $\prod$. Pro označení je použito velké řecké sigma a velké řecké pí podle počátečních písmen obou slov. Součet a součin všech členů posloupnosti lze tedy zapsat takto

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{a} \quad a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Pokud chceme sečíst nebo vynásobit pouze vybrané členy posloupnosti $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, kde $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pro každé $j = 1, 2, \ldots, k$ a $k \leqq n$, pak píšeme

$$\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} \quad \text{nebo} \quad \prod_{j=1}^{k} a_{i_j}.$$

Je však možný i jiný zápis, například

$$\sum_{J\subset\{1,2,\ldots,n\},j\in J} a_j \quad \text{nebo} \quad \prod_{J\subset\{1,2,\ldots,n\},j\in J} a_j.$$

Příklad 1.5. Vypočítejte $\sum_{i=1}^{n}(i+2)$.

Řešení. Nejdříve rozepíšeme sumu $\sum_{i=1}^{n}(i+2) = (1+2)+(2+2)+(3+2)+\cdots+(n+2)$. Součet $(1+2)+(2+2)+(3+2)+\cdots+(n+2)$ je součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, kde $a_1 = 1+2 = 3$, $a_n = n+2$ a diference $d = 1$. Připomeňme, že vzorec pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti je $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Odtud $\sum_{i=1}^{n}(i+2) = \frac{n}{2}(3+n+2) = \frac{n(n+5)}{2}$.

Jiné řešení. Protože konečný součet je asociativní a komutativní, můžeme psát $\sum_{i=1}^{n}(i+2) = (\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n}) + (1+2+\cdots+n) = 2n + \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n(n+5)}{2}$.

▲

Příklad 1.6. Vypočítejte $\prod_{i=1}^{n}(2\cdot i)$.

Řešení. Opět si produkt nejdříve rozepíšeme $\prod_{i=1}^{n}(2\cdot i) = (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdots(2\cdot n)$. Protože je násobení asociativní a komutativní můžeme psát $(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdots(2\cdot n) = (\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n})(1\cdot 2\cdots n)$. Víme, že $\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n} = 2^n$ a $1\cdot 2\cdots n = n!$, kde symbol $n!$ čteme „n faktoriál“. O n faktoriálu budeme podrobně hovořit v Kapitole 2. Proto $\prod_{i=1}^{n}(2\cdot i) = 2^n\cdot n!$.

▲

Příklad 1.7. Vypočítejte $\sum_{i\in\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+x-2=0\}}(2+i)$ a $\prod_{i\in\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+x-2=0\}}(2\cdot i)$.

Řešení. Vidíme, že množina hodnot indexu i je dána charakteristickou vlastností. Bude lepší, pokud ji vyjádříme taxativně. Snadno zjistíme, že rovnici $x^2+x-2 = 0$ splňují pouze čísla 1 a -2, proto $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+x-2=0\} = \{-2,1\}$. Odtud $\sum_{i\in\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+x-2=0\}}(2+i) = \sum_{i\in\{-2,1\}}(2+i) = (2+(-2))+(2+1) = 3$ a $\prod_{i\in\{-2,1\}}(2\cdot i) = (2\cdot(-2))\cdot(2\cdot 1) = -8$.

▲

Zůstaňme ještě u příkladů 1.5 a 1.6. Zřejmě platí $\sum_{i=1}^{n}(i+2) = (\sum_{i=1}^{n} i) + (\sum_{i=1}^{n} 2)$ a $\prod_{i=1}^{n}(2\cdot i) = (\prod_{i=1}^{n} 2)\cdot(\prod_{i=1}^{n} i)$ (Suma součtů je součet sum a produkt součinů je součin produktů). Víme, že $\sum_{i=1}^{n}(i+2) = \frac{n(n+5)}{2} = 2n+\frac{n}{2}(1+n) = \frac{n(n+1)}{2} + 2n$ (příklad 1.5), přičemž $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Proto $\sum_{i=1}^{n} 2 = 2n = \underbrace{2+2+\cdots+2}_{n}$.

Obdobně $\prod_{i=1}^{n}(2\cdot i) = 2^n\cdot n!$ (příklad 1.6) a $\prod_{i=1}^{n} i = n!$. Proto $\prod_{i=1}^{n} 2 = 2^n = \underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n}$.

Pokud tedy sčítáme nebo násobíme výrazy, které nejsou funkcí indexu i (i prochází n různých hodnot), jsou vůči proměnné i konstantní, pak takový součet resp.

součin chápeme jako součet nebo součin n sčítanců resp. n činitelů, přičemž každý z nich je ona konstanta. Obecně platí

$$\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + \cdots + k}_{n} = kn \quad \text{a} \quad \prod_{i=1}^{n} k = \underbrace{k \cdot k \cdots k}_{n} = k^n.$$

Ještě zmiňme, že například

$$\sum_{i\in\{1,2,43,51,103\}} k = k + k + k + k + k = 5k \quad \text{a} \quad \prod_{i\in\{1,2,43,51,103\}} k = k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k = k^5,$$

neboť o počtu sčítanců (činitelů) rozhoduje pouze počet hodnot, kterými index i prochází.

V obecných výpočtech může nastat následující situace. Máme vypočítat sumu $\sum_{i=5}^{k} a_i$ či produkt $\prod_{i=5}^{k} a_i$ například pro $k = 2, 3, \ldots, n$. Pak ovšem po dosazení $k = 2$ dostáváme tzv. *prázdnou sumu* $\sum_{i=5}^{2} a_i$ či *prázdný produkt* $\prod_{i=5}^{2} a_i$ (množina hodnot indexu i je prázdná). Budeme si pamatovat, že prázdná suma je rovna nule a prázdný produkt jedné. Proto

$$\sum_{i=5}^{2} a_i = 0 \quad \text{a} \quad \prod_{i=5}^{2} a_i = 1.$$

Příklad 1.8. Na spořící účet jsme uložili 1000 Kč. Víme, že každý rok přičtou tolik stokorunu, kolik roků je účet veden, a každý rok odečtou 200 Kč za bankovní poplatky. Kolik korun bude na spořícím účtu po

- dvou letech?
- pěti letech?
- n letech?

Řešení. Nejrozumnější asi bude, pokud úlohu vyřešíme pro obecné n a ostatní řešení dostaneme pouhým dosazením. Je zřejmé, že po jednom roce přičtou k tisícikoruně stokorunu, po druhém roce k $1000 + 100$ Kč přičtou $2 \cdot 100$ korun, po třetím roce k $1000 + 100 + 2 \cdot 100$ Kč přičtou $3 \cdot 100$ korun a tak dále. Takže obecně po n letech přičtou k tisícikoruně $(1 + 2 + \cdots + n) \cdot 100 = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 100$ korun. Avšak každý rok odečtou 200 korun, tudíž celkově $200n$ korun. Po n letech bude na účtu $1000 + \sum_{k=1}^{n} k \cdot 100 - 200n$ Kč. Víme, že $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$. Odtud $1000 + \sum_{k=1}^{n} k \cdot 100 - 200n = 1000 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot 100 - 200n = 1000 + 50n^2 + 50n - 200n = 1000 + 50n^2 - 150n = 1000 + 50n(n-3)$.

Tudíž po dvou letech bude na účtu $1000 + 50 \cdot 2(2-3) = 900$ Kč, ale po pěti letech $1000 + 50 \cdot 5(5-3) = 1500$ Kč.

▲

Příklad 1.9. Vypočítejte $\sum_{j\in\{2,4,9,11\}} (a+b)^2$ a $\prod_{j\in\{2,4,9,11\}} (a+b)^2$.

Řešení. Protože se výraz $(a+b)^2$ není funkcí indexu j, tak platí $\sum\limits_{j\in\{2,4,9,11\}} (a+b)^2 =$ $= 4(a+b)^2$ a $\prod_{j\in\{2,4,9,11\}}(a+b)^2 = ((a+b)^2)^4 = (a+b)^8$.

▲

Příklad 1.10. Vypočítejte $\sum_{j\in\{x\in\mathbb{R}:(x+1)^2<0\}} j^2$ a $\prod_{j\in\{x\in\mathbb{R}:(x+1)^2<0\}} j^2$.

Řešení. Tentokrát je výraz j^2 závislý na indexu j, ale $\{x\in\mathbb{R} : (x+1)^2 < 0\} = \emptyset$, neboť žádné reálné x neumí splnit podmínku $(x+1)^2 < 0$. Jde tudíž o prázdnou sumu a produkt. Odtud $\sum_{j\in\{x\in\mathbb{R}:(x+1)^2<0\}} j^2 = 0$ a $\prod_{j\in\{x\in\mathbb{R}:(x+1)^2<0\}} j^2 = 1$.

▲

Příklad 1.11. Vypočítejte $\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i\cdot 3i$.

Řešení. Jestliže sumu rozepíšeme, pak absolutní hodnoty jednotlivých sčítanců tvoří aritmetickou posloupnost ($a_1 = 3, d = 3$), avšak každý lichý sčítanec je obdařen znaménkem minus a každý sudý znaménkem plus. Proto můžeme psát

$$\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i\cdot 3i = \sum_{\substack{i=1\\ i\,\text{sudé}}}^{2n} 3i - \sum_{\substack{i=1\\ i\,\text{liché}}}^{2n} 3i.$$

Rozepíšeme-li sumu $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\,\text{sudé}}}^{2n} 3i$, pak sčítance tvoří aritmetickou posloupnost, kde první člen je 6 a poslední $3\cdot 2n = 6n$. Pozor, sčítanců je pouze n. Odtud $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\,\text{sudé}}}^{2n} 3i =$ $= \frac{n}{2}(6+6n) = 3n(n+1)$. Suma $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\,\text{liché}}}^{2n} 3i$ obsahuje n sčítanců, které tvoří aritmetickou posloupnost, přičemž první člen je 3 a poslední $3(2n-1) = 6n-3$. Odtud $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\,\text{liché}}}^{2n} 3i =$ $= \frac{n}{2}(3+6n-3) = 3n^2$. Tudíž $\sum\limits_{i=1}^{2n}(-1)^i\cdot 3i = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\,\text{sudé}}}^{2n} 3i - \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\,\text{liché}}}^{2n} 3i = 3n(n+1) - 3n^2 =$ $= 3n^2 + 3n - 3n^2 = 3n$.

Proveďme jinou úvahu, která povede k řešení. Každé dva po sobě jdoucí sčítance v sumě jsou po sobě jdoucí násobky tří, přičemž menší má znaménko minus a větší znaménko plus. Tudíž, sečteme-li je, dostaneme číslo 3. Spárujme po sobě jdoucí sčítance a dostaneme součet n párů, kde každý pár dává výsledek 3. Proto $\sum\limits_{i=1}^{2n}(-1)^i\cdot 3i = (-3+6)+(-9+12)+\cdots+(-3(2n-1)+3\cdot 2n) = \underbrace{3+3+\cdots+3}_{n} = 3n$.

▲

Příklad 1.12. Vypočítejte $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} i\cdot j$.

Řešení. Nejdříve aplikujeme pravou sumu a dostáváme $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} i\cdot j = \sum\limits_{i=1}^{n}(i\cdot 1 + i\cdot 2 + \cdots + i\cdot n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i(1+2+\cdots+n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = $
$= \sum\limits_{i=1}^{n} i\cdot\sum\limits_{j=1}^{n} j = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)^2.$

▲

1.3 Horní a dolní celá část reálného čísla

Definice 1.13. *Horní celá část reálného čísla* a je celé číslo z takové, že platí

$$z - 1 < a \leqq z.$$

Horní celou část reálného čísla a budeme značit $\lceil a\rceil$.

Necháme-li si předešlou definici projít hlavou, pak zjistíme, že při hledání $\lceil a\rceil$ mohou nastat na číselné ose dvě možnosti. Buď je a celé číslo, pak je jeho horní celá část přímo a, nebo $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, a pak je $\lceil a\rceil$ nejbližší celé číslo napravo od a.

Definice 1.14. *Dolní celá část reálného čísla* a je celé číslo z takové, že platí

$$z \leqq a < z + 1.$$

Dolní celou část reálného čísla a budeme značit $\lfloor a\rfloor$.

Opět, při hledání $\lfloor a\rfloor$ mohou nastat na číselné ose dvě možnosti. Buď je a celé číslo, pak je jeho dolní celá část přímo a, nebo $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, a pak je $\lfloor a\rfloor$ nejbližší celé číslo nalevo od a.

Příklad 1.15. Určete horní a dolní celé části reálných čísel $7; -7; 2,34; -2,34; \frac{14}{3}; -\frac{14}{3}; \mathrm{e}; -\mathrm{e}$.

Řešení. Protože 7 a -7 jsou celá čísla, tak platí $\lceil 7\rceil = \lfloor 7\rfloor = 7$ a $\lceil -7\rceil = \lfloor -7\rfloor = -7$. Číslo $2,34$ leží mezi dvojkou a trojkou, zatímco číslo $-2,34$ mezi minus trojkou a minus dvojkou, proto $\lceil 2,34\rceil = 3$, $\lceil -2,34\rceil = -2$ a $\lfloor 2,34\rfloor = 2$, $\lfloor -2,34\rfloor = -3$. Číslo $\frac{14}{3}$ je mezi čtyřkou a pětkou, proto $\lceil\frac{14}{3}\rceil = 5$, $\lfloor\frac{14}{3}\rfloor = 4$ a $\lceil -\frac{14}{3}\rceil = -4$, $\lfloor -\frac{14}{3}\rfloor = -5$. Eulerovo číslo e je iracionální s přibližnou hodnotou $2,7812\ldots$, proto $\lceil \mathrm{e}\rceil = 3$, $\lfloor \mathrm{e}\rfloor = 2$ a $\lceil -\mathrm{e}\rceil = -2$, $\lfloor -\mathrm{e}\rfloor = -3$.

▲

Příklad 1.16. Určete horní a dolní celou část reálného čísla $6,\overline{9}$.

Řešení. Tento příklad se zdá vyloženě triviální a mnoho z nás by zřejmě tvrdilo, že $\lceil 6,\overline{9} \rceil = 7$ a $\lfloor 6,\overline{9} \rfloor = 6$. Není tomu tak!

Dá se totiž ukázat, že $6,\overline{9} = 7$. Potom ovšem $\lceil 6,\overline{9} \rceil = \lfloor 6,\overline{9} \rfloor = 7$.

Rovnost $6,\overline{9} = 7$ prokážeme jednoduchou a krásnou úvahou. Stanovme $x = 6,\overline{9}$, potom ovšem $10x = 69,\overline{9}$. Odtud plyne $10x - x = 69,\overline{9} - 6,\overline{9}$ a dostáváme $9x = 63$. Což je splnitelné pouze pro $x = 7$.

▲

Příklad 1.17. Ověřte, zda platí $\lfloor \frac{(n+1)^2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor + n$ pro každé sudé celé n.

Řešení. Označme $n = 2q$, kde $q \in \mathbb{Z}$.

Na pravé straně dostaneme $\lfloor \frac{(2q)^2}{2} \rfloor + 2q = \lfloor 2q^2 \rfloor + 2q$. Protože je $2q^2$ celé číslo, platí $\lfloor 2q^2 \rfloor = 2q^2$. Po úpravě tudíž obdržíme $2q^2 + 2q$.

Levá strana je $\lfloor \frac{(2q+1)^2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{(4q^2+4q+1)}{2} \rfloor = \lfloor 2q^2 + 2q + \frac{1}{2} \rfloor$. Číslo $2q^2 + 2q + \frac{1}{2}$ je o jednu polovinu větší než celé číslo $2q^2 + 2q$, proto $\lfloor 2q^2 + 2q + \frac{1}{2} \rfloor = 2q^2 + 2q$.

Důkaz rovnosti je ukončen, neboť jsme ověřili, že levá strana se rovná pravé pro libovolné sudé n.

▲

Příklad 1.18. Dokažte nebo vyvraťte rovnost $\lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ pro libovolné sudé n a liché k, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Řešení. Nechť $n = 2p$ a $k = 2q + 1$, přičemž $p, q \in \mathbb{Z}$. Na pravé straně máme $\lfloor \frac{2p+2q+1}{2} \rfloor = \lfloor p + q + \frac{1}{2} \rfloor = p + q$. Levá strana je $\lfloor \frac{2p}{2} \rfloor + \lfloor \frac{2q+1}{2} \rfloor = \lfloor p \rfloor + \lfloor q + \frac{1}{2} \rfloor = p + q$.

▲

Příklady k procvičení

1. Dokažte, že platí $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2. Mějme množiny $A = \{x \in \mathbb{R} : \ln|x| = 1 \vee \ln|x| = 0\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Z} : 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0\}$. Zapište množiny A, B taxativně a určete $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$ a $2^{B \cap A}$.

3. Vypočítejte $\sum_{i \in \{-2,0,1,2\}} i(i+1)$ a $\prod_{i \in \{-2,0,1,2\}} i(i+1)$.

4. Vypočítejte $\sum_{a \in \{-2,0,1,2\}} i(i+1)$ a $\prod_{a \in \{-2,0,1,2\}} i(i+1)$.

5. Vypočítejte $\sum_{j \in \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = -\pi\}} j^3$ a $\prod_{j \in \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = -\pi\}} j^3$.

6. Vypočítejte $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i$ a $\prod_{i=1}^{2n} (-1)^i$.

7. Vypočítejte $\sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i$ a $\prod_{i=1}^{2n-1} (-1)^i$.

8. Vypočítejte $\sum_{i=1}^{n} 3^i$ a $\prod_{i=1}^{n} 3^i$.

9. Vypočítejte $\sum_{i=1}^{2n}(-2)^i$ a $\prod_{i=1}^{2n}(-2)^i$.

10. Vypočítejte $\sum_{i=1}^{2n-1}(-2)^i$ a $\prod_{i=1}^{2n-1}(-2)^i$.

11. Vypočítejte $\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}$.

12. Ověřte, zda platí $\lfloor\frac{(n+1)^2}{2}\rfloor = \lfloor\frac{n^2}{2}\rfloor + n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

13. Ověřte, zda platí $\lfloor\frac{n+k}{2}\rfloor = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ pro každé $n, k \in \mathbb{N}$.

14. Ověřte, zda platí $\lceil(\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor)\rceil = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. Využijte příkladu 1.2.

2. $A = \{-\mathrm{e}, -1, 1, \mathrm{e}\}$, $B = \{-1, 1\}$, $A \cap B = B$, $A \cup B = A$, $A \setminus B = \{-\mathrm{e}, \mathrm{e}\}$, $B \setminus A = \emptyset$, $A \times B = \{(-\mathrm{e}, -1), (-\mathrm{e}, 1), (-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1), (\mathrm{e}, -1), (\mathrm{e}, 1)\}$, $2^{B\cap A} = \{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}\}$.

3. 10 a 0.

4. $4i(i+1)$ a $(i(i+1))^4$.

5. 0 a 1.

6. 0, 1 pro n sudé a -1 pro n liché.

7. -1, 1 pro n sudé a -1 pro n liché.

8. $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ a $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

9. $\frac{2}{3}(4^n - 1)$ a $(-2)^{n(2n+1)}$.

10. $-\frac{1}{3}(4^n + 2)$ a $(-2)^{n(2n-1)}$.

11. $n + 1$.

12. Ne, protože $\lfloor\frac{(3+1)^2}{2}\rfloor = 8 \neq 7 = 4 + 3 = \lfloor\frac{3^2}{2}\rfloor + 3$.

13. Ne, protože $\lfloor\frac{1+1}{2}\rfloor = 1 \neq 0 = 0 + 0 = \lfloor\frac{1}{2}\rfloor + \lfloor\frac{1}{2}\rfloor$.

14. Ano.

Kapitola 2

Základní kombinatorické výběry

Mějme konečnou množinu či multimnožinu a z ní náhodně vyberme předem určený počet prvků. Takovému procesu budeme říkat *kombinatorický výběr* (stručněji *výběr*). Obdobné výběry provádíme často jak při výzkumu (statistický výzkum), tak v běžném životě (sázkové hry).

Pokud vybíráme z množiny (ve výběru se prvky nemohou opakovat), pak jde o *výběry bez opakování*, pokud z multimnožiny (prvky se ve výběru mohou opakovat), pak jde o *výběry s opakováním.* (Dodejme, že uspořádané výběry s opakováním se dají formulovat i pomocí množin.) Počet všech možných různých výběrů ovlivňují dva parametry, a to počet prvků původní množiny či multimnožiny a počet vybíraných prvků, dále skutečnost, zda záleží či ne na *pořadí* vybraných prvků. V případě, že nás pořadí vybraných prvků nezajímá, chápeme provedený výběr jako podmnožinu zadané množiny. V případě, že nás naopak pořadí zajímá, tak provedený výběr chápeme jako posloupnost vybraných prvků.

V této kapitole se budeme zabývat zjišťováním počtu všech možných výběrů se zadanými vlastnostmi.

2.1 Permutace bez opakování

Příklad 2.1. Sedím v jídelně a obědvám. Ve frontě u výdeje obědů stojí pět mých studentů z právě skončeného cvičení, jmenují se Zbyslav, Matylda, Petr, Jana a Zikmund. Jsou poměrně pestrobarevně oblečeni. Dívám se na ně a přemýšlím, jak by se ona pestrobarevnost měnila, pokud bych měnil jejich pořadí ve frontě. A tu mne napadne. Kolik mám možností, jak studenty do fronty seřadit? Bude těch možností hodně?

Řešení. Studenty si pro jednoduchost nahradíme čísly $1, 2, 3, 4, 5$. Všimněme si. Vybíráme z 5-prvkové množiny všech 5 prvků, na pořadí záleží a žádný prvek se neopakuje!

Pro začátek si ponechme jen čísla $1, 2$. Ty ovšem umíme uspořádat dvěma způsoby $((1, 2), (2, 1))$. Přidáme číslo 3, to můžeme umístit buď na první, druhou nebo třetí pozici $((3, -, -), (-, 3, -), (-, -, 3))$. Na zbývajících dvou pozicích lze čísla $1, 2$ uspořádat vždy dvěma způsoby. Ke každému pevnému umístění čísla 3 tedy existují dvě uspořádané trojice. Proto máme celkově $3 \cdot 2$ uspořádané trojice (možnosti). Přidáme čtyřku. Tu můžeme umístit na jednu ze čtyř pozic $((4, -, -, -), (-, 4, -, -), (-, -, 4, -), (-, -, -, 4))$. Čísla $1, 2, 3$ na zbývajících třech volných pozicích uspořádáme $3 \cdot 2$ způsoby. Ke každému pevnému umístění čísla 4 tudíž existují $3 \cdot 2$ uspořádané čtveřice. Proto celkově obdržíme $4 \cdot 3 \cdot 2$ uspořádané čtveřice (možnosti). Obdobnou úvahou dostaneme pro pět studentů výsledek $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ možností.

▲

Předešlou úvahu lze snadno zobecnit pro libovolný konečný počet studentů. Mějme n studentů, $n \in \mathbb{N}$. Označíme je čísly $1, 2, \ldots, n$. Nechť a_n je počet všech možných uspořádání čísel $1, 2, \ldots, n$ a a_{n+1} je počet všech možných uspořádání čísel $1, 2, \ldots, n, n+1$. Číslo $n+1$ můžeme v uspořádané $n+1$-tici umístit vždy na právě jednu z $n+1$ pozic. Pro každé pevné umístění čísla $n+1$ na jedinou pozici můžeme zbývajících n čísel uspořádat na zbývajících n pozicích a_n způsoby. Z čehož dostáváme, že $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$, přičemž a_1 je 1.

Našli jsme rekurentní vztah, který nám dovoluje z počtu uspořádání pro n prvků odvodit počet uspořádání pro $n+1$ prvků.

Předešlá pozorování nás jednoznačně vedou k vyslovení následující domněnky nebo-li *hypotézy*. (Hypotéza je zatím nedokázané a nevyvrácené tvrzení.)

Počet všech možných uspořádaní n-prvkové množiny je $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$.

Nadešel čas, abychom výše uvedená pozorování zformalizovali pomocí definic a vět.

Definice 2.2. Mějme libovolné přirozené číslo n. Pak *permutace bez opakování* na n-prvkové množině X je libovolné uspořádání všech prvků množiny X do nějaké posloupnosti.

Definice 2.3. *Počet všech permutací bez opakování* na n-prvkové množině X budeme značit $P(n)$ a součin $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ označíme $n!$. Výraz $n!$ budeme číst n *faktoriál.*

Věta 2.4. $P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí, které se budeme detailně věnovat až v Kapitole 4, proto dovolte poněkud obšírnější komentář.

Nejdříve chceme ověřit, zda náš vztah platí pro nejmenší uvažované n, tedy pro $n = 1$. Zjistíme, že ano, neboť $P(1) = 1 = 1!$.

Nyní předpokládejme, že naše věta platí pro nějaké libovolné přirozené n. Pak budeme chtít ukázat, že musí platit i pro jeho „následovníka", tj. číslo $n+1$. Pokud se to povede, máme jistotu, že věta platí pro každé přirozené n a důkaz je ukončen.

Nechť $P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$. Víme, že $P(n+1) = (n+1) \cdot P(n)$ (využili jsme rekurentní vztah $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$). V této chvíli použijeme předpoklad $(P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1)$ a dostáváme $P(n+1) = (n+1) \cdot P(n) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = (n+1)!$.

Ukázali jsme, že $P(1) = 1!$ a pokud $P(n) = n!$, pak $P(n+1) = (n+1)!$. Z principu matematické indukce tudíž plyne, že vztah $P(n) = n!$ platí pro každé přirozené n.

$\square$

Poznámka 2.5. Vidíme, že součin ve větě 2.4 definuje n faktoriál pouze pro $n \geqq 1$. Čemu je ale roven 0 faktoriál? Vzhledem k tomu, že prázdnou množinu umíme uspořádat do jediné posloupnosti, a to do prázdné (viz Kapitola 1), platí $0! = 1$.

Příklad 2.6. Máme 7 bílých kuliček do nichž jsou vyražena čísla od 1 do 7. Chceme je obarvit 7 barvami tak, že každá kulička je obarvena přesně jednou barvou a všech sedm barev je použito (Čísla vyražená na kuličkách jsou i po nabarvení vidět!). Kolik máme různých možností?

Řešení. Všechna možná obarvení kuliček můžeme provést takto: Kuličky seřadíme do řady a jednoznačně určíme pořadí použitých barev. Pak první kuličku zleva obarvíme barvou číslo 1, druhou zleva barvou číslo 2 až sedmou zleva barvou číslo 7 (viz obr.??). Změníme pořadí kuliček (pořadí barev zůstává stejné) a postup barvení opakujeme (tzn. první kuličku zleva barvou č.1, druhou zleva barvou č.2 atd.). Určitě dostaneme jiné obarvení než v případě prvním. Vidíme, že počet všech různých obarvení je stejný jako počet všech různých seřazení kuliček. Tudíž jde o počet všech permutací bez opakování na sedmiprvkové množině, tedy $P(7) = 7! = 5040$.

$\blacktriangle$

Příklad 2.7. Kolik existuje vzájemně jednoznačných (bijektivních) zobrazení 5--prvkové množiny X na 5-prvkovou množinu Y?

Řešení. O zobrazeních bude podrobně pojednáno v Kapitole 5. *Bijektivní zobrazení* je zobrazení, kdy každému prvku jedné množiny je přiřazen přesně jeden prvek druhé množiny a naopak, každému prvku druhé množiny je přiřazen přesně jeden prvek množiny první. Ukázka bijektivního zobrazení 5-prvkové množiny na 5-prvkovou množinu je na obrázku ??.

Nechť $X = [1,5]$ a $Y = \{a, b, c, d, \mathrm{e}\}$. Při konstrukci jednotlivých bijekcí použijeme podobný postup jako při barvení kuliček v příkladu 2.6, tzn. pevně uspořádáme prvky z množiny X, pořadí prvků v Y naopak budeme měnit a v každém kroku budeme přiřazovat prvnímu prvku z X první prvek z Y, druhému prvku z X druhý prvek z Y, až pátému prvku z X pátý prvek z Y (viz obr.??). Tímto způsobem jistě vytvoříme všechny požadované bijekce, a navíc vidíme, že jich je $P(5) = 5! = 120$.

▲

Příklad 2.8. Ve výtečné knize Murphy (1938) držitele Nobelovy ceny za literaturu (1969) Samuela Becketta hlavní postava (Murphy) vždy snídá balíček sušenek. V tomto balíčku je 10 různých sušenek, přičemž Murphy chce snídani začít pomerančovou sušenkou (chutná mu nejméně) a ukončit sušenkou s čokoládovou polevou (je jeho nejoblíbenější). Kolik má možností, jak posnídat?

Dále, Murphy oponuje své přítelkyni, která jej peskuje ohledně fádní stravy, že jeho balíček sušenek mu umožňuje snídat tak, že žádné dva dny ve svém životě nebude mít tutéž snídani. Má pravdu?

Řešení. Označme si sušenky čísly 1 až 10, přičemž pomerančová sušenka je označena číslem 1 a sušenka s čokoládovou polevou (dále jí budeme říkat čokoládová) číslem 10. Ptáme se, kolika způsoby umíme seřadit čísla $1 - 10$, s tím, že 1 je na první pozici a 10 na desáté pozici. Čili čísla 1 a 10 jsou pevně fixována na dané pozice, a čísla 2 až 9 mohou být seřazena zcela libovolně na zbývajících osmi pozicích. Jde o permutace bez opakování na osmiprvkové množině, a proto $P(8) = 8! = 40320$.

Murphy si umí připravit 40320 různých snídaní (jí-li sušenky po jedné a v různých pořadích), což mu vyjde přibližně na $40320 : 365 \doteq 110$ let.

▲

Příklad 2.9. Vraťme se ještě k příkladu 2.8. Murphy jakž takž překonal svůj odpor k pomerančové sušence a náklonnost k sušence s čokoládovou polevou, což vyjádřil následovně: „Není možné, aby zároveň první nebyla pomerančová a poslední nebyla čokoládová.“ Kolikrát se zvýší počet snídaní, které si je schopen Murphy připravit, při tomto méně přísném omezení?

Řešení. Zde si musíme dobře promyslet Murphyho slova. Z jeho tvrzení se dovídáme, jakou situaci zakazuje. Bude dobré, když si odvodíme opak, tzn. jaké situace připouští. Říká vlastně, alespoň jeden ze dvou případů, a to „první je pomerančová“, „poslední je čokoládová“, musí být splněn.

Murphyho snídaně můžeme tudíž rozdělit do tří množin S_1, S_2, S_3, přičemž, v množině S_1 budou snídaně, které začínají pomerančovou sušenkou, ale nekončí čokoládovou, v množině S_2 budou snídaně, které nezačínají pomerančovou sušenkou, ale končí čokoládovou, v množině S_3 jsou snídaně, které začínají pomerančovou sušenkou a končí čokoládovou.

Všimněme si, že platí $S_i \cap S_j = \emptyset$ pro každé $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ a $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, kde S je množina všech Murphyho snídaní. Tedy množiny S_1, S_2, S_3 jsou po dvojicích disjunktní a jejich sjednocení dává celou množinu S. Proto $|S| = |S_1| + |S_2| + |S_3|$, kde číslo $|S|$ je výsledek našeho řešení, neboť jde o počet všech Murphyho snídaní.

Takový způsob řešení úlohy je v kombinatorice často využíván a říkáme mu *rozklad na jednotlivé disjunktní případy.* Nevýhodou takového řešení je jeho zdánlivá pracnost, ale výhody jsou převažující. Máme jistotu, že žádný případ nezapočítáme vícekrát, a že na žádný nezapomeneme.

Označme sušenky čísly z množiny $[1, 10]$, přičemž pomerančová sušenka je 1 a čokoládová 10.

$|S_1|$ je počet permutací, kde na první pozici je 1 a na poslední není 10. První pozice je pevně dána, na poslední pozici můžeme dát libovolné číslo kromě 1 a 10 (8 možností), zatímco na zbylých osmi pozicích 2 až 9 můžeme zbylá čísla libovolně seřadit (8! možností). Proto $|S_1| = 8 \cdot 8!$. Všimněte si, že jsme použili součin, neboť ke každému pevně zvolenému číslu z množiny $[2, 9]$, které je umístěno na poslední pozici, existuje 8! možností jak uspořádat čísla na zbývajících osmi pozicích. Tomuto postupu se říká *pravidlo součinu* o němž je hovor v poznámce 2.40.

Podobnou úvahou zjistíme, že $|S_2| = 8 \cdot 8!$ a z příkladu 2.8 víme, že $|S_3| = P(8) = 8!$. Dostáváme $|S| = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 8! + 8 \cdot 8! + 8 \cdot 8! = 17 \cdot 8!$.

Protože $17 \cdot 8!/8! = 17$, počet Murphyho snídaní se zvýší 17 krát.

Jiné řešení. Nevyužijeme rozkladu na disjunktní případy. Určíme počet všech možných snídaní a počet všech snídaní, které Murphy odmítá. Konečný výsledek pak bude rozdíl těchto čísel.

Všech možných snídaní je $P(10) = 10!$. Snídaně, které Murphy odmítá, jsou ty, kde první sušenka není pomerančová a poslední není čokoládová. Na první pozici můžeme dát jakoukoliv sušenku jen ne pomerančovou (9 možností). Na poslední pozici můžeme dát opět jakoukoliv jen ne čokoládovou a tu kterou jsme dali na první pozici (8 možností). Na zbývajících pozicích 2 až 9 seřadíme zbývající sušenky libovolně (8! možností). Proto snídaní, které Murphy odmítá, je $9 \cdot 8 \cdot 8!$ a dostáváme výsledek $|S| = 10! - 9 \cdot 8 \cdot 8! = 10 \cdot 9! - 8 \cdot 9! = 2 \cdot 9! = 18 \cdot 8!$.

Výsledek ovšem vychází jiný než v předešlém řešení!!! Kde se stala chyba?

Zřejmě si po jisté chvíli všimneme, že problém nastává, když na první pozici dáme čokoládovou sušenku, což je jedna z 9 přípustných možností. Potom totiž existuje 9 možností (a nikoliv 8), co dát na pozici poslední.

Proto si množinu nepřípustných snídaní rozdělíme do dvou disjunktních případů. A to na snídaně, kde je jako první zařazena čokoládová sušenka (typ A) a na ty, kde čokoládová sušenka jako první není (typ B). Snídaní typu A je $9 \cdot 8!$ a snídaní typu B je $8 \cdot 8 \cdot 8!$. Tudíž nepřípustných snídaní je $9 \cdot 8! + 8 \cdot 8 \cdot 8! = 73 \cdot 8!$. Odtud $|S| = 10! - 73 \cdot 8! = 10 \cdot 9 \cdot 8! - 73 \cdot 8! = 90 \cdot 8! - 73 \cdot 8! = 17 \cdot 8!$.

Vážení čtenáři, na tomto příkladu Vám demonstrujeme dvě základní skutečnosti. Kombinatorické příklady bývají občas docela „zákeřné“, vždy si své myšlenkové pochody při jejich řešení několikrát zkontrolujte, popřípadě hledejte alternativní řešení a výsledky porovnejte. Dále, metoda řešení pomocí rozkladu na disjunktní případy je sice na pohled pracná, avšak díky jí se vyvarujeme mnohých zbytečných chyb.

▲

Příklad 2.10. Karlík si rovná do řady autíčka. Má jich 11 v různých barvách, přičemž jedno z nich je zelené (Williams-Cosworth) a jedno červené (Ferrari). Karlík chce autíčka seřadit tak, aby zelené nikdy nestálo vedle červeného. Kolik má možností?

Řešení. Autíčka označíme čísly 1 až 11, přičemž zelené je 1 a červené je 2. Spočítáme všechny permutace na množině $[1, 11]$ a potom spočítáme ty, které mají čísla 1 a 2 vedle sebe. Výsledek dostaneme jako rozdíl těchto čísel.

Celkem máme 11! permutací. Vytvořme z čísel 1 a 2 dvojici a považujme jí za jeden z prvků množiny. Máme tedy desetiprvkovou množinu $\{\{1, 2\}, 3, 4, \ldots, 10\}$. Její prvky umíme uspořádat 10! způsoby. Avšak neuspořádanou dvojici čísel 1,2 lze uspořádat dvěma způsoby (buď je 1 nalevo nebo napravo od 2). Tudíž permutací, kde 1 a 2 jsou vedle sebe, je $2 \cdot 10!$. A máme výsledek $11! - 2 \cdot 10! = 10!(11 - 2) = 9 \cdot 10!$.

Jiné řešení. Vezměme nejdříve devět čísel od 3 do 11. Ty umíme uspořádat 9! způsoby. Mezi nimi je 8 mezer, ale před a za nimi je ještě po jedné mezeře, tudíž celkově 10 mezer (viz obr.??). Aby čísla $1, 2$ nebyla vedle sebe musíme je umístit do dvou libovolně vybraných mezer. Kolik máme možností, jak ony dvě mezery vybrat? (Tento úkol bude snadný, až budeme znát *kombinace bez opakování* (Kapitola 2.2).) K první mezeře zleva máme 9 možností, jak vybrat druhou, k druhé zleva máme 8 možností jak vybrat druhou, až k deváté zleva máme jedinou možnost jak vybrat druhou. Proto existuje celkově $9 + 8 + \cdots + 1 = \frac{9}{2} \cdot (1 + 9) = 45$ možností, jak vybrat onu dvojici mezer. Zrekapitulujme. Ke každému pevnému uspořádání čísel 3 až 11 (těch je 9!) jsme schopni 45 způsoby vybrat 2 mezery pro umístění čísel 1 a 2. V pevně vybraných mezerách jsme schopni čísla 1 a 2 uspořádat vždy dvěma způsoby. Proto celkový počet permutací na množině $[1, 11]$, kde čísla 1 a 2 nejsou vedle sebe je $9! \cdot 45 \cdot 2 = 9! \cdot 9 \cdot 5 \cdot 2 = 9 \cdot 10 \cdot 9! = 9 \cdot 10!$.

▲

Příklad 2.11. Do kina přišlo 9 mladíků a zakoupili si devět lístku vedle sebe. Čtyři z nich měli nadmíru prokrvené, lesklé bělmo a nejasně artikulovali. Podezřívavá uvaděčka se rozhodla, že je rozesadí tak, aby žádní dva ze zmíněných čtyř chlapců neseděli vedle sebe. Kolik měla možností?

Řešení. Mladíky označíme čísly 1 až 9, přičemž ony zmiňované mladíky označíme čísly 1 až 4. Chceme zjistit, kolik existuje permutací na množině $[1, 9]$, kde žádná dvě čísla z množiny $[1, 4]$ nejsou na pozicích vedle sebe. Začněme tím, že si nejdříve uspořádáme pět čísel z množiny $[5, 9]$ ($5!$ možností). Před, za a mezi těmito pěti čísly máme 6 mezer. Na čtyři z nich musíme umístit čísla $1, 2, 3, 4$. Tedy na dvě z nich žádné číslo z $[1, 4]$ neumístíme. Kolika způsoby umíme vybrat 2 ze šesti mezer, na které nic neumístíme? Použijeme-li postup z řešení příkladu 2.10, dostaneme číslo $5+4+3+2+1 = \frac{5}{2}(1+5) = 15$. Výběrem dvou mezer, do kterých nic neumístíme, jsou jednoznačně určeny 4 mezery, do kterých umístíme čísla $1, 2, 3, 4$. V jednoznačně určených čtyřech mezerách pak můžeme čísla uspořádat vždy $4!$ způsoby. Proto všech permutací na množině $[1, 9]$, kde žádné dvě čísla z množiny $[1, 4]$ nejsou na pozicích vedle sebe, je $5! \cdot 15 \cdot 4! = 120 \cdot 15 \cdot 24 = 43200$.

▲

Příklad 2.12. Alenka má 5 různých korálků, které chce navléci na nit a vytvořit z nich náramek. Kolik má možností?

Řešení. Představme si, že korálky na náramku tvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníka. Jeho horní vrchol označíme 1 a ostatní vrcholy ve směru hodinových ručiček označíme například čísly $4, 2, 5, 3$ v tomto pořadí (viz obr.??). Pokud bychom náhrdelník rozstřihli mezi korálky $4, 2$ a korálky vyrovnali do přímky, pak dostaneme dvě různé permutace z $5!$ možných, a to $(2, 5, 3, 1, 4)$ a $(4, 1, 3, 5, 2)$. Po rozstřižení náramku mezi korálky $1, 3$ dostáváme jiné dvě permutace, a to $(1, 4, 2, 5, 3)$ a $(3, 5, 2, 4, 1)$ (viz obr.??). Těchto míst k rozstřižení je na náhrdelníku 5 a po každém rozstřižení dostáváme dvě jiné permutace z $5!$ možných.

Čili z jednoho náhrdelníku vznikne $2 \cdot 5$ různých permutací z $5!$ možných. Pokud bychom vzali jiný než-li výše zmíněný náhrdelník, opět z něj vznikne $2 \cdot 5$ permutací z $5!$ možných, ale všechny se budou lišit od těch předešlých. Navíc, pokud postupně použijeme všechny možné navzájem různé náramky, pak jejich rozstřiháváním dostaneme všech $5!$ permutací. Proto, označíme-li x počet náhrdelníků, tak platí $2 \cdot 5 \cdot x = 5!$ a dostáváme $x = \frac{5!}{2.5} = 4 \cdot 3 = 12$. Zde používáme metodu *dvojího počítání*, o které se detailněji zmíníme v

Jiné řešení. Představme si, že jsme maličcí a putujeme po Alenčině náhrdelníku (viz předešlé řešení) tak, že vždy začneme pouť na jednom korálku a dále pokračujeme buď ve směru nebo proti směru hodinových ručiček tak dlouho, dokud nedojdeme na výchozí korálek, přičemž si zapíšeme čísla korálků v pořadí, jak jsme je procházeli. Vyjděme z korálku 3 (viz obr.??) ve směru hodinových ručiček, na konci pouti máme zapsánu permutaci $(3, 1, 4, 2, 5)$ (výchozí a koncový korálek zapíšeme jen na začátku). Pokud vyjdeme proti směru hodinových ručiček, máme zapsánu permutaci $(3, 5, 2, 4, 1)$. Změníme-li výchozí korálek dostaneme během pouti dvě jiné permutace atd. Vidíme opět, že jeden náhrdelník s pěti korálky opravdu reprezentuje $2 \cdot 5$ různých permutací z $5!$ možných.

Nakonec proveďme zobecnění. Z n různých korálků lze vytvořit $\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$ náhrdelníků.

▲

Příklad 2.13. Na konferenci bylo n účastníků a ti byli posazeni zcela náhodně na n židlí kolem kulatého stolu. Kolika způsoby to lze provést, pokud dvě rozesazení, kdy jedno vznikne z druhého pouhým „pootočením“, považujeme za shodná (tzn. v obou rozesazeních má každý účastník téhož pravého i levého souseda)?

Řešení. Mnozí z nás by zřejmě tvrdili, že jde o zobecněný příklad 2.12 a výsledek proto musí být $x = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$.

Ukažme si protipříklad pro $n = 5$. Představme si, že rozesazení osob kolem kulatého stolu je stejné jako umístění korálků na náramku viz obr??. V případě korálků jsme si ukázali, že pokud použiji dvě opačně seřazené permutace (korálky jsou srovnány na přímé niti (přímce)) např. $(2, 5, 3, 1, 4)$ a $(4, 1, 3, 5, 2)$, pak spojením mezi prvním a posledním korálkem dostaneme tentýž náramek. Všimněme si však, že pokud bychom obdobně uvažovali o rozesazení osob kolem kulatého stolu (nejdříve si je posadíme na židle vyrovnané v řadě, a pak je „obalíme“ kolem stolu), tak se mýlíme, neboť nepůjde o totéž rozesazení! Z permutace $(2, 5, 3, 1, 4)$ by vzniklo rozesazení, kde například levým sousedem trojky je 5 a pravým 1. Zatímco z permutace $(4, 1, 3, 5, 2)$ by vzniklo rozesazení, kde se sousedé trojky prohodí. Čili nejde o totéž rozesazení.

„Rozpojením“ každého rozesazení u kulatého stolu mezi dvěma sousedy tudíž nedostaneme dvě různé permutace z $n!$ možných, ale pouze jedinou! Proto z jednoho rozesazení kolem kulatého stolu vznikne pouze n různých permutací z $n!$ možných. Označíme-li x počet všech rozesazení kolem kulatého stolu, pak musí platit $n \cdot x = n!$ a $x = \frac{n!}{n} = (n-1)!$.

▲

Pojmy k zapamatování

— $P(n)$ je počet všech permutací na n-prvkové množině. Jde o uspořádané výběry VŠECH prvků množiny. Platí $P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$.

— Počet všech bijekcí n-prvkové množiny na n-prvkovou množinu je $P(n) = n!$.

— Počet všech náhrdelníků vytvořených z n různých korálků je $\frac{(n-1)!}{2}$.

— Počet všech možných rozesazení n lidí kolem kulatého stolu je $(n-1)!$.

Příklady k procvičení

1. Víte, že šestimístné číslo obsahuje číslice $0, 1, 3, 4, 5, 6$, přičemž číslice 1 je na místě desítek a 3 na místě desetitisíců. Kolik takových čísel existuje?

2. Kolik existuje pětimístných čísel dělitelných 5, které obsahují číslice $4, 6, 7, 9$?

3. Anička si ve výtvarné výchově rozdělila čtvrtku papíru na 11 různých oblastí (viz obr.??). Má 11 pastelek (mezi nimi je modrá a žlutá) a chce oblasti vybarvit tak, že žádné dvě nebudou mít stejnou barvu, všechny budou vybarvené a oblast 3 bude žlutá nebo modrá. Kolik má možností jak oblasti vybarvit? O kolik se počet možností změní, pokud bude chtít, aby byla oblast 3 modrá nebo oblast 9 žlutá.

4. Kolik posloupností lze vytvořit z čísel $11, 13, 17, 19, 23, 31$, pokud víme, že se v posloupnosti žádné číslo neopakuje a čísla 19 a 31 nejsou nikdy vedle sebe.

5. Proti devíti terčům stojí 4 dívky a 5 chlapců, každý z nich má luk. Dívky mají růžové a chlapci modré šípy. Každý z nich vystřelil šíp na terč před sebou a terč trefil. Rozhodčí si všiml, že ani v jednom případě nejsou ve dvou sousedních terčích růžové šípy. Kolik existuje různých rozestavení střelců před terči, aby taková situace mohla nastat?

Klíč k příkladům k procvičení

1. $3 \cdot 3!$.

2. $2 \cdot 4!$.

3. $2 \cdot 10!$, počet možností se $9!$ zmenší.

4. $4 \cdot 5!$.

5. $60 \cdot 6!$.

Pro zájemce:

Představte si, že dostaneme n různých přirozených čísel a chceme je uspořádat podle velikosti. Pro velká n bude takový úkol ručně v podstatě neproveditelný. Požádáme tudíž počítač tím, že mu napíšeme program jakým se má řídit. Třeba mu „řekneme“, proveď všechna možná uspořádání $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ prvků zadané množiny a vyber to, kde je splněno $a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_n$.

Protože počítač bude muset vygenerovat všechny permutace na n-prvkové množině, provede alespoň $n!$ kroků.

Je známo, že algoritmy, kde je počet kroků exponenciálně závislý na velikosti vstupu ($k \geqq a^n$, kde k je počet kroků algoritmu, n velikost vstupu, $a \in \mathbb{R}, a > 1$), jsou velmi problematické a již pro relativně malá n, neumí předložit řešení. Problém je v tom, že exponenciální funkce (a tudíž počet kroků) s rostoucím n roste nesmírně rychle (samozřejmě, „míra růstu“ je závislá na velikosti a, čím větší a, tím rychlejší růst).

Následující věta ukazuje, že každý algoritmus, který má vygenerovat $n!$ permutací pro libovolné přirozené n je velmi problematický!

Věta 2.14. *Pro každé přirozené $n \geqq 1$ platí:*

$$(\sqrt{n})^n = n^{\frac{n}{2}} \leqq n! \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Číslo $n!$ je pro každé přirozené n větší nebo rovno exponenciální funkci $(\sqrt{n})^n$, přičemž základ exponenciální funkce je také funkce proměnné n, která je rostoucí a již pro každé $n \geqq 4$ platí $\sqrt{n} \geqq 2$.

Důkaz věty 2.14 je jednoduchý a ukazuje, že někdy stačí matematické výrazy vhodně přeskupit a správně se na ně podívat, abychom dokázali na první pohled obtížný matematický vztah. Proto jej zde uvádíme.

Důkaz. K důkazu této věty budeme potřebovat vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou kladných reálných čísel a, b, přičemž aritmetický průměr čísel $a, b \in \mathbb{R}^+$ (symbolem $\mathbb{R}^+$ značíme množinu všech kladných reálných čísel) je $\frac{a+b}{2}$ a geometrický průměr $\sqrt{ab}$. Platí $\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}$. Této nerovnosti se obvykle říká *AG nerovnost*.

Důkaz AG nerovnosti je snadný.

Víme, že jistě platí $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$, z čehož plyne $a - 2\sqrt{ab} + b \geqq 0$. Po jednoduché úpravě obdržíme $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$ a po vydělení dvěma dostaneme nerovnost dokazovanou.

Nyní se vraťme k důkazu věty 2.14. Víme, že $(n!)^2 = 1\cdot 2 \cdots (n-1)\cdot n\cdot n\cdot (n-1)\cdots 2\cdot 1 = (1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot(3\cdot(n-2))\cdots((n-1)\cdot 2)\cdot(n\cdot 1)$. Předešlý součin má n činitelů a libovolný i-tý činitel můžeme vyjádřit jako součin $i(n-(i-1)) = i(n+1-i)$ pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Proto $n! = \sqrt{(1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot(3\cdot(n-2))\cdots((n-1)\cdot 2)\cdot(n\cdot 1)} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} i(n+1-i)} = \prod_{i=1}^{n}\sqrt{i(n+1-i)}$. Uvědomme si, že výraz $\sqrt{i(n+1-i)}$ je vlastně geometrický průměr čísel i a $n+1-i$ a ten musí nutně být menší nebo roven aritmetickému průměru těchto čísel. Proto platí $\sqrt{i(n+1-i)} \leqq \frac{i+n+1-i}{2} = \frac{n+1}{2}$. Z předešlých úvah plyne $n! = \prod_{i=1}^{n}\sqrt{i(n+1-i)} \leqq \prod_{i=1}^{n}\frac{n+1}{2} = (\frac{n+1}{2})^n$.

Tímto jsme dokázali pravou nerovnost $(n! \leqq (\frac{n+1}{2})^n)$ věty 2.14.

Abychom dokázali nerovnost levou $(n^{\frac{n}{2}} \leqq n!)$, je třeba si uvědomit, že každý činitel $i(n+1-i)$ v součinu $\prod_{i=1}^{n} i(n+1-i)$ je alespoň n. Pro $i = 1, n$ to jistě platí. Pro $2 \leqq i \leqq n-1$, je vždy menší z činitelů alespoň 2 a větší alespoň $n/2$, a proto má součin hodnotu opět alespoň n. Odtud $n! = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} i(n+1-i)} \geqq \sqrt{\prod_{i=1}^{n} n} = \sqrt{n^n} = n^{\frac{n}{2}}$.

$\square$

Před uvedením následující věty, která přinese dosud nejpřesnější odhad $n!$ (tzv. *Stirlingova formule*) si zopakujme, že s *Eulerovým číslem* $\mathrm{e} = 2{,}718281828\ldots$, které je iracionální, jsme se již setkali v matematické analýze a víme, že je to limita nekonečné posloupnosti $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.15. *Pro všechna dost velká přirozená n platí $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$.*

Symbol $\sim$ znamená, že $\lim \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n} = 1$. Tedy čísla $n!$ a $\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$ pro dost velká n vykazují téměř zanedbatelnou relativní chybu. Relativní chyba je vztažena k velikosti čísel. Liší-li se dvě čísla o 100, může to být velká chyba, ale pokud jsou obě větší než například 10^{27}, pak je to chyba zanedbatelná.

2.2 Kombinace bez opakování

Příklad 2.16. Vraťme se k příkladu 2.1. V jídelně je volných jen pět míst, z toho tři u mého stolu a dvě u stolu vedlejšího. Tudíž tři z výše jmenovaných pěti studentů si budou muset sednout ke mně. Kteří to budou? Kolik existuje různých možností?

Poznámka 2.17. Nejen řešení tohoto příkladu, ale struktura celé této kapitoly, by Vám měla, vážení čtenáři, připomenout jednu z nepřehlédnutelných krás matematiky, a sice její návaznost. Předvedeme totiž, jak z počtu permutací bez opakování odvodíme počet kombinací bez opakování, z počtu permutací a kombinací bez opakování odvodíme počet variací bez opakování a počty výběrů s opakováním odvodíme z počtů výběrů bez opakování.

Řešení. Protože nás zajímá pouze, kteří tři studenti si k mému stolu sednou a ne na kterou židli, jde o neuspořádaný tříprvkový výběr (bez opakování) z pětiprvkové množiny. Pokud přeformulujeme otázku do matematické řeči, ptáme se: „Kolik tříprvkových podmnožin má pětiprvková množina?“

Počet tříprvkových podmnožin z pětiprvkové množiny označme x. Budeme chtít, aby x bylo nějak rozumně odvozeno z již známého počtu všech permutací bez opakování na konečné množině.

Realizujme každý výběr tříprvkové podmnožiny tak, že pět prvků původní množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ seřadíme vždy do jedné z 5! možných posloupností a prvky na prvních třech pozicích budou prvky námi vybrané podmnožiny (viz obr??). Takto jistě uskutečníme výběr všech možných tříprvkových podmnožin. Bohužel se ale každý výběr několikrát zopakuje. Položme si otázku: „Bude počet opakování pro každý výběr stejný a dokážeme počet opakování spočítat?“

Mějme nějakou libovolnou permutaci z 5! možných. Pokud provedeme libovolnou ze 3! permutací pouze na prvních třech pozicích, pak výběr zůstává stále stejný (viz obr.??). Pokud ke každé takové permutaci provedeme libovolnou z 2! permutací na posledních dvou pozicích, výběr zůstává opět tentýž. Provedeme-li libovolnou další z 5! možných permutací výměnou pořadí takových dvou prvků, kdy jeden je na prvních třech pozicích a druhý na posledních dvou, pak se výběr změní! Proto se každý z x výběrů během 5! permutací zopakuje přesně $3! \cdot 2!$ krát, z čehož plyne, že počet permutací na pětiprvkové množině je $x \cdot 3! \cdot 2!$. Odtud $x \cdot 3! \cdot 2! = 5!$ a proto $x = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

▲

Poznámka 2.18. Všimněte si, že při řešení předešlého příkladu jsme jednu a tutéž hodnotu, počet permutací na 5-prvkové množině, počítali pomocí dvou různých úvah. Zaprvé přes počet neuspořádaných tříprvkových výběrů ($x \cdot 3! \cdot 2!$), a za druhé podle vzorce uvedeného v předešlé kapitole ($5!$). Takové metodě se říká *dvojí počítání* a je v diskrétní matematice poměrně často užívána.

Definice 2.19. *Kombinace bez opakování* na n-prvkové množině X je libovolný neuspořádaný výběr některých prvků této množiny, nebo-li libovolný výběr podmnožiny množiny X.

Definice 2.20. Počet všech k-prvkových neuspořádaných výběrů z n-prvkové množiny X (počet všech k-prvkových podmnožin množiny X resp. *počet všech k-prvkových kombinací bez opakování na množině X*) pro $n \geqq k$, je $\binom{n}{k}$, přičemž výraz $\binom{n}{k}$ nazýváme *kombinační číslo* nebo *binomický koeficient* a čteme jej *en* nad *ká* (nikoliv *en* nad *kátou*). Počet všech k-prvkových kombinací bez opakování na n-prvkové množině také označujeme $C(n, k)$.

Poznámka 2.21. Název binomický koeficient dostalo kombinační číslo díky *binomické větě*. Připomeňme, že binomická věta nám říká, jak umocnit dvojčlen (binom) na nějaký přirozený mocnitel, a zní takto $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. V diskrétní matematice se binomická věta také často uvádí ve speciálním tvaru $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, kde koeficienty mnohočlenu (polynomu) na pravé straně jsou kombinační čísla.

Věta 2.22. *Pro každá dvě přirozená n, k, kde $n \geqq k$, platí $C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.*

Důkaz. Počet všech k-prvkových neuspořádaných výběrů z n-prvkové množiny označíme x. Každý k-prvkový neuspořádaný výběr proveďme tak, že všechny prvky n-prvkové množiny postupně uspořádáme do všech $n!$ posloupností a z každé takto vzniklé posloupnosti vybereme prvních k prvků. Každý takový výběr se nám ovšem během $n!$ permutací zopakuje přesně $k!(n-k)!$, neboť pokud provedeme libovolnou z $k!$ permutací pouze na prvních k pozicích, pak výběr zůstává stále stejný. Pokud ke každé takové permutaci provedeme libovolnou z $(n-k)!$ permutací na posledních $n-k$ pozicích, výběr zůstává opět tentýž. Provedeme-li libovolnou permutaci, která vymění pořadí nějakého prvku z prvních k pozic s nějakým prvkem na posledních $(n-k)$ pozicích, tak se výběr změní. Každý neuspořádaný výběr se tudíž zopakuje přesně $k! \cdot (n-k)!$ krát. Proto platí $x \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$ a počet všech k-prvkových neuspořádaných výběrů z n-prvkové množiny je $x = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

□

Poznámka 2.23. Dodejme ještě, že vzorec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ platí i v případě, kdy n nebo k je rovno nule.

Příklad 2.24. Kolik má 7-prvková množina tří resp. čtyřprvkových podmnožin? Kolik má n-prvková množina k resp. $(n-k)$-prvkových podmnožin, kde $n \geqq k$?

Řešení. Jde o tří resp. čtyř prvkové kombinace bez opakování na 7-prvkové množině, a proto je výsledek $C(7,3) = \binom{7}{3}$ resp. $C(7,4) = \binom{7}{4}$. Spočítejme obě kombinační čísla. Všimněme si, že $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7.6.5}{3.2} = 35 = \frac{7!}{4!3!} = \binom{7}{4}$, přičemž $\binom{7}{4} = \binom{7}{7-3}$.

Množina s n prvky má jistě $\binom{n}{k}$ k-prvkových podmnožin a $\binom{n}{n-k}$ $(n-k)$-prvkových podmnožin. Všimněme si, že $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.

Identitě (rovnosti) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ se říká *symetrie kombinačních čísel* a dá se snadno obhájit i slovně. Oněch k prvků z n můžeme vybírat tak, že buď určíme k prvků z n, které si VYBEREME, nebo určíme $n-k$ prvků z n, které si NEVYBEREME.

▲

Příklad 2.25. Vypočítejte součet $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Řešení. Víme, že $\binom{n}{k}$ vyjadřuje počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Proto $\binom{n}{1}$ vyjadřuje počet jednoprvkových podmnožin, $\binom{n}{2}$ počet dvou prvkových podmnožin až $\binom{n}{n}$ počet n-prvkových podmnožin. Tudíž součet $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$ vyjadřuje počet všech podmnožin n-prvkové množiny ($\binom{n}{0}$ je rovno 1, což odpovídá prázdné množině). My však víme, že počet všech podmnožin n-prvkové množiny je 2^n, neboť jde o počet prvků potenční množiny nějaké n-prvkové množiny. Proto $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

▲

Poznámka 2.26. Mějme n-prvkovou množinu X. Symbolem $\binom{X}{k}$ značíme *systém (množinu) všech k-prvkových podmnožin množiny X*. Pozor, na rozdíl od kombinačního čísla je nahoře označení množiny a symbol reprezentuje systém množin, nikoliv číslo.

Příklad 2.27. Máme nějakou deseti prvkovou posloupnost nul a jedniček (např. (0001001101)). Kolik takových posloupností existuje?

Řešení. Vezměme si čísla 1 až 10 a nějak je seřaďme, třeba podle velikosti. Z této uspořádané množiny (posloupnosti) budeme vybírat podmnožiny tak, že pod prvky této množiny napíšeme deseti prvkovou posloupnost nul a jedniček (viz obr.??). Jednička pod prvkem značí, že jej do podmnožiny vybereme a nula, že jej do podmnožiny nevybereme. Dejme si příklad. Posloupnost (0001001101) reprezentuje podmnožinu $\{4, 7, 8, 10\}$. Tedy ke každé nula-jedničkové posloupnosti je přiřazena přesně jedna podmnožina, a ke každé podmnožině přesně jedna nula-jedničková posloupnost. Proto je takových posloupností přesně tolik, kolik je podmnožin množiny $[1, 10]$, a to $2^{10} = 1024$.

▲

Příklad 2.28. Asistent tělesné výchovy chce doplnit 10 uvolněných míst na lyžařském zájezdu. Má přihlášených dalších 27 studentů z vyšších ročníků, mezi nimiž jsou Petr Vodstrčil a Jiří Bouchala. Asistent ovšem ví, že určitě Petr Vodstrčil nebo Jiří Bouchala nepojedou. Kolik má možností jak studenty na uvolněná místa vybrat?

Řešení. Řešení rozdělíme do tří disjunktních případů:

- Oba, Petr Vodstrčil i Jiří Bouchala nepojedou. Pak ovšem asistent vybírá z 25 studentů deset a výsledek je $C(25,10) = \binom{25}{10}$.
- Petr Vodstrčil jede a Jiří Bouchala nejede. Nyní vybírá z 25 studentů devět a výsledek je $C(25,9) = \binom{25}{9}$.
- Petr Vodstrčil nejede a Jiří Bouchala jede. Výsledek je stejný jako v předešlém případě, tudíž $C(25,9) = \binom{25}{9}$.

Celkově tedy dostáváme $\binom{25}{10}+2\cdot\binom{25}{9} = \frac{25!}{15!10!}+2\frac{25!}{16!9!} = \frac{25!}{15!9!}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{8}\right) = \frac{25.24...16}{9!}\cdot\frac{9}{40} = \frac{25\cdot24\cdots16}{8!}\cdot\frac{1}{40} = \frac{25\cdot24\cdots16}{8\cdot7\cdots2}\cdot\frac{1}{40} = 23\cdot11\cdot5\cdot19\cdot18\cdot17 = 7354710$.

▲

Příklad 2.29. Růžena bezradně stojí nad osmi krásnými koženými výrobky v prodejně galanterie. Mezi těmito výrobky jsou také růžové rukavičky a růžová kabelka. Má si nějaké tři z nich vybrat jako dárek k narozeninám a ví, že pokud si vybere růžovou kabelku, pak si určitě také vezme růžové rukavičky a naopak, pokud si vybere růžové rukavičky, pak si určitě také vezme růžovou kabelku. Kolik má možností, jak si vybrat ony tři dárky?

Řešení. Vidíme, že se nám řešení velmi přirozeně rozpadne do dvou disjunktních případů:

- Růžena si nevybrala ani kabelku ani rukavičky. Pak má $C(6,3) = \binom{6}{3}$ možností výběru.
- Růžena si vybrala kabelku i rukavičky. Pak má ovšem $\binom{6}{1}$ možností, jak k těmto dvěma výrobkům vybrat poslední.

Celkově tedy má $\binom{6}{3}+\binom{6}{1} = \frac{6!}{3!3!}+6 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}+6 = 26$ možností.

▲

Příklad 2.30. Dokažte, že pro každé přirozené n a k, $n \geqq k$, platí $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Řešení. Důkaz provedeme odvozením. Vyjdeme ze součtu na levé straně rovnosti. $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$.

Pokud si připomenete *Pascalův trojúhelník* (http://maths.cz/clanky/pascaluv-trojuhelnik.html), pak zjistíte, že právě dokázaný vzorec popisuje princip, jak Pascalův trojúhelník konstruovat.

▲

Pojmy k zapamatování

— Výrazu $\binom{n}{k}$ říkáme kombinační číslo nebo binomický koeficient a určuje počet k prvkových neuspořádaných výběrů z n prvkové množiny.

— $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

— $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

— $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symetrie kombinačního čísla).

— $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (Pascalův trojúhelník).

Příklady k procvičení

1. Určete hodnoty kombinačních čísel $\binom{0}{0}, \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{n}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$.

2. V rovině je 2000 bodů a žádné tři neleží na přímce. Kolik různých přímek jimi lze proložit?

   Z pěti různobarevných (červená, modrá, žlutá, zelená, bílá) kuliček vybíráme tři. Kolik máme možností, pokud

3. nechceme vybrat červenou?

4. určitě chceme vybrat bílou nebo zelenou?

5. chceme vybrat modrou, pokud byla vybrána červená?

6. chceme vybrat žlutou, právě tehdy, když budeme mít vybranou červenou a modrou?

7. Trenér před fotbalovým zápasem vybírá záložní řadu do základní sestavy. Mezi sedmi záložníky je Petr a Jarda. Ze záložníků má vybrat čtyři, přičemž ví, že Jardu nebo Petra nevybere. Kolik má možností?

8. Tenisový turnaj se hraje systémem každý s každým. Kolik se bude hrát zápasů, jestliže se turnaje zúčastní 21 hráčů?

9. Máme n lidí. Jak velké skupinky vybírat, abychom měli co nejvíce možností?

Klíč k příkladům k procvičení

1. $1, 1, n, 1, \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

2. 1999000.

3. $\binom{4}{3} = 4$.

4. $2 \cdot \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 9$.

5. $\binom{3}{1} + \binom{4}{3} = 7$.

6. $2 \cdot \binom{3}{2} + 2 = 8$.

7. $2 \cdot \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 25$.

8. 210.

9. Označíme-li velikost skupinky k, pak $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

2.3 Variace bez opakování

Příklad 2.31. Opět vycházíme z příkladu 2.1. Oběd mi stydne, neboť mne pohltila další úvaha. Nejen že uvažuji, kteří tři studenti si ke mně sednou, ale také, kdo si sedne vedle mně, kdo naproti mně a kdo obsadí zbývající místo. Kolik nyní existuje možností?

Řešení. Jde o uspořádané tříprvkové výběry bez opakování z pětiprvkové množiny, neboť nás zajímá nejen to, kteří tři studenti si ke mně sednou, ale i jak si sednou.

Vyberme nejdříve libovolnou tříprvkovou podmnožinu ($\binom{5}{3}$ možností). Každou vybranou tří prvkovou podmnožinu umíme uspořádat 3! způsoby. Celkově tudíž máme $\binom{5}{3}3! = \frac{5!}{3!2!} \cdot 3! = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ možností.

▲

Definice 2.32. *Variace bez opakování* na n-prvkové množině X je libovolný uspořádaný výběr některých prvků množiny X, přičemž se žádný prvek v posloupnosti neopakuje.

Definice 2.33. Nechť n, k jsou přirozená čísla a $n \geqq k$. Počet všech k-prvkových uspořádaných výběrů z n-prvkové množiny X (*počet všech k-prvkových variací bez opakování* na množině X) budeme značit $V(n, k)$.

Věta 2.34. *Pro každá dvě přirozená čísla n, k, $n \geqq k$, platí $V(n,k) = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$.*

Důkaz. Počet všech k-prvkových neuspořádaných výběrů z n-prvkové množiny je $\binom{n}{k}$ a každý takový neuspořádaný výběr umíme uspořádat $k!$ způsoby. Proto je počet všech k-prvkových uspořádaných výběrů z n-prvkové množiny $V(n,k) = \binom{n}{k}k! = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

□

Poznámka 2.35. Vzorec pro výpočet variací bez opakování $V(n,k) = \binom{n}{k}k! = = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ platí i v případě, že n nebo k je rovno nule.

Příklad 2.36. Kolik existuje prostých (injektivních) zobrazení 5-prvkové množiny X do 7-prvkové množiny Y?

Řešení. *Prosté* nebo-li *injektivní zobrazení* přiřazuje ke každým dvěma různým prvkům z X dva různé prvky z Y. Každé prosté (injektivní) zobrazení 5-prvkové množiny do 7-prvkové množiny můžeme chápat jako bijektivní zobrazení (viz příklad 2.7) 5-prvkové množiny X na nějakou 5-prvkovou podmnožinu množiny Y.

5-prvkovou podmnožinu množiny Y umíme vybrat $\binom{7}{5}$ způsoby a dále víme, že počet bijekcí 5-prvkové množiny na nějakou 5-prvkovou množinu je 5!.

Proto je počet všech prostých zobrazení 5-prvkové množiny do 7-prvkové množiny $V(7,5) = \binom{7}{5} \cdot 5! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$.

▲

Příklad 2.37. Trenér družstva dívčí kopané má veliký problém. Pro nemoc mu ze základní sestavy odpadly tři hráčky na třech důležitých postech, a to na postu pravého obránce, a na postech levého a pravého záložníka. Na střídačce má 6 náhradnic mezi nimiž jsou Martina Litschmannová a Petra Šarmanová. Kolika způsoby může trenér základní sestavu doplnit, pokud ví, že Martina a Petra nemohou hrát spolu.

Řešení. Řešení rozdělíme do tří disjunktních případů.

- Martina Litschmannová i Petra Šarmanová nehrají. Pak ovšem trenér vybírá ze 4 hráček tři ($\binom{4}{3}$ možností) a každý takový výběr umí uspořádat na jednotlivé uvolněné posty 3! způsoby. Dostáváme výsledek $V(4,3) = \binom{4}{3} \cdot 3! = = 4! = 24$.
- Martina Litschmannová hraje a Petra Šarmanová nehraje. Protože je Martina určitě vybrána, tak trenér vybírá ze zbývajících 4 hráček jen dvě ($\binom{4}{2}$ možností) a každý takový výběr umí uspořádat na jednotlivé posty 3! způsoby a máme výsledek výsledek $\binom{4}{2} \cdot 3! = 36$.
- Martina Litschmannová nehraje a Petra Šarmanová hraje. Výsledek je stejný jako v předešlém případě, tj. $\binom{4}{2} \cdot 3! = 36$ možností.

Celkově tedy dostáváme $\binom{4}{3} \cdot 3! + 2 \cdot \binom{4}{2} \cdot 3! = 24 + 72 = 96$ možností.

▲

Příklad 2.38. Marcela vybírá v obchodě dárky k Vánocům a hned také uvažuje, kde je doma schová. Má tři vytipované skrýše a chce koupit čtyři dárky. Kolika způsoby umí doma tyto čtyři dárky ukrýt, když ví, že do kterékoliv skrýše se vejdou kterékoliv dva dárky a všechny tři skrýše chce využít?

Řešení. Ze čtyř dárků vybereme 3 ($\binom{4}{3}$ možností) a ty můžeme do tří skrýší rozmístit 3! způsoby. Dále máme vždy 3 možnosti, kam přidat dárek čtvrtý. Proto celkově dostáváme $\binom{4}{3} \cdot 3! \cdot 3 = 72$ možností, jak vybrané čtyři dárky ukrýt.

Je tento postup správný? Není!!!

Nebude však těžké odhalit, že některé možnosti počítáme vícekrát!

Označme si dárky čísly $1, 2, 3, 4$ a skrýše písmeny A, B, C. Jedna z $\binom{4}{3} \cdot 3! \cdot 3$ možností je ta, kdy nejdříve vybereme čísla $1, 2, 3$, rozmístíme je do skrýší tak, že 1 je v A, 2 je v B, 3 je v C, a pak 4 umístíme například do B. Jiná z $\binom{4}{3} \cdot 3! \cdot 3$ možností je například ta, kdy nejdříve vybereme čísla $1, 3, 4$, rozmístíme je do skrýší tak, že 1 je v A, 4 je v B, 3 je v C, a pak 2 umístíme do B. Jenomže ve skutečnosti jde o jedinou možnost, neboť v obou případech je 1 v A, $2, 4$ v B a 3 v C.

Přirozená otázka, zní: „Započítáváme každou možnost do výsledného čísla přesně dvakrát?“ Pak by totiž výsledek byl $\frac{\binom{4}{3} \cdot 3! \cdot 3}{2} = 36$.

Odpověď zní ano, neboť vždy jedno a totéž rozdělení dárků do skrýší počítáme dvakrát, podle toho, zda byl dárek do skrýše, kde jsou nakonec dárky dva, umístěn v rámci první trojice nebo až dodatečně, jako dárek čtvrtý.

Ověřme ještě správnost předchozí úvahy jiným způsobem řešení.

Vyberme ze čtyř dárků dva a z nich vytvořme dvojici ($\binom{4}{2}$ možností), přičemž tuto dvojici dárků chápeme jako jeden prvek. Pak takto vzniklou trojici rozmístěme do skrýší (3! možností) a dostáváme výsledek $\binom{4}{2} \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36$.

▲

Příklad 2.39. Trenér má k dispozici 22 hráčů do pole a mezi nimi jsou Petr Beremlijski a David Horák. Kolika způsoby umí trenér vybrat hráče do základní sestavy, pokud rozlišuje 10 různých postů (levý, pravý, levý střední, pravý střední obránce, pravý, levý a střední záložník, pravý, levý a střední útočník), a pokud ví, že když bude hrát Petr Beremlijski, pak bude hrát i David Horák. O kolik více by měl trenér možností, pokud bychom v úloze vynechali podmínku „když bude hrát Petr Beremlijski, pak bude hrát i David Horák“?

Řešení. Podmínka této úlohy „když bude hrát Petr Beremlijski, pak bude hrát i David Horák“ má tvar implikace a musíme tedy dávat pozor abychom správně stanovili jednotlivé disjunktní případy, které přicházejí v úvahu. Častá chyba bývá ta, že si implikaci vyložíme jako konjunkci, pak by ovšem podmínka zněla „bude hrát Petr Beremlijski i David Horák“.

- Předpokládejme, že hraje Petr Beremlijski. Pak ovšem musí hrát také David Horák. Proto bude trenér vybírat už jen 8 hráčů z 20 ($\binom{20}{8}$ možností). Všechny vybrané pak umí na 10 různých postů umístit 10! způsoby. Výsledek tedy je $\binom{20}{8} \cdot 10!$.
- Petr Beremlijski nehraje. Pak ovšem David Horák může, ale nemusí hrát. Pokud bude trenér vybírat 10 hráčů z 21 ($\binom{21}{10}$ možností), tak jsou v tomto čísle započítány obě možnosti, a to, že David hraje i nehraje. Vybraných 10

hráčů pak trenér umístí na 10 různých postů 10! způsoby. Dostáváme $\binom{21}{10}\cdot 10!$ možností.

Celkově má proto trenér $\binom{21}{10}\cdot 10! + \binom{20}{8}\cdot 10! = (19\cdot 17\cdot 14\cdot 13\cdot 3\cdot 2 + {} + 19\cdot 17\cdot 15\cdot 13\cdot 2)10! = (352716 + 125970)10! = 478686\cdot 10! = 1737055756800$ možností. Toto číslo jsou téměř dva bilióny! Jen pro představu, naše galaxie má podle nejnovějších odhadů asi 1 bilión hvězd (dřívější odhady byly $0,1$ až $0,4$ biliónu hvězd).

Spočítejme ještě počet možností bez uvedené podmínky a porovnejme s předešlým výsledkem.

Trenér bude vybírat 10 hráčů z 22 ($\binom{22}{10}$ možností), a ty uspořádá vždy na 10 různých postů (10! možností). Celkově tudíž dostáváme $\binom{22}{10}10!$ možností. Rozdíl těchto dvou výsledků je $\binom{22}{10}10! - \binom{21}{10}\cdot 10! - \binom{20}{8}\cdot 10! = \left(\frac{22!}{10!12!} - \frac{21!}{10!11!} - \frac{20!}{8!12!}\right)10! = {} = \frac{22!-12\cdot 21!-90\cdot 20!}{10!12!}10! = \frac{22!-12\cdot 21!-90\cdot 20!}{12!} = \frac{(22\cdot 21-12\cdot 21-90)\cdot 20!}{12!} = (22\cdot 21 - 12\cdot 21 - {} - 90)\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot \cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13 = 120\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13 = 609493248000$. Počet možností se zvýší o více než půl biliónu.

▲

Pojmy k zapamatování

- Číslo $V(n,k)$ určuje počet variací bez opakování, přičemž jde o uspořádané výběry k prvků z n-prvkové množiny ($k \leqq n$).
- Platí $V(n,k) = \binom{n}{k}\cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)$.
- Počet všech prostých zobrazení k-prvkové množiny do n-prvkové množiny, $n \geqq k$, je $V(n,k)$.

Příklady k procvičení

1. Tenisového turnaje se účastní 8 hráčů. Kolik je možných různých pořadí na stupních vítězů?

Vlajka má být sestavena ze tří různobarevných vodorovných pruhů. Jsou k dispozici látky barvy červené, modré, černé, žluté a bílé. Kolik různých vlajek je možné sestavit, pokud:

2. má být modrý pruh uprostřed?

3. nemá být dole pruh červený?

4. bude dolní pruh červený nebo horní pruh černý?

5. bude některý pruh bílý a některý žlutý?

6. bude některý pruh modrý nebo některý žlutý?

7. bude mít některý pruh bílý, bude-li na ní některý pruh černý?

8. V družstvu jsou 4 dívky, 3 chlapci a na slavnostní nástup mají být trenérem vybráni 3 chlapci a 3 dívky, s tím, že budou stát v řadě a žádné dvě dívky nesmí stát vedle sebe. Kolik má trenér možností, jak naaranžovat slavnostní nástup?

Klíč k příkladům k procvičení

1. 336.
2. 12.
3. $4 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2! = 48$.
4. $2 \cdot \binom{3}{2} \cdot 2! + \binom{3}{1} = 15$.
5. $\binom{3}{1} \cdot 3! = 18$.
6. $(2 \cdot \binom{3}{2} + \binom{3}{1}) \cdot 3! = 54$.
7. $(\binom{3}{1} + \binom{4}{3}) \cdot 3! = 42$.
8. $(\binom{4}{3} \cdot 3!)^2 = 576$.

Poznámka 2.40. Jistě jste si všimli, že v řešených příkladech jsme občas počty dvou různých výběrů sčítali a občas násobili. V každém příkladě jsme ovšem přesně argumentovali proč sčítáme a proč násobíme. Zkusme nyní tyto argumenty zobecnit ve dvou následujících větách.

Věta 2.41. (Pravidlo součtu) *Jestliže existuje n_1 výběrů daného typu provedených jedním způsobem a n_2 výběrů provedených druhým způsobem, přičemž žádný z těchto výběrů nelze provést oběma způsoby, pak existuje právě $n_1 + n_2$ výběrů daného typu.*

Věta 2.42. (Pravidlo součinu) *Mějme výběr, který se sestává ze dvou podvýběrů. Jestliže první podvýběr můžeme provést n_1 způsoby a druhý výběr n_2 způsoby, přičemž počet způsobu jednoho podvýběru nezávisí na volbě druhého podvýběru, pak existuje $n_1 \cdot n_2$ výběrů daného typu.*

2.4 Permutace s opakováním

Příklad 2.43. Ve čtvrtek jsem dostal e-mail jehož předmět byl „Dotaz k DIM“ a adresa „anadananad@seznam.cz“. Byl jsem překvapen, neboť žádného blízkovýchodního studenta jménem Anadan Anad tento rok neučím, tak proč se mne ptá na něco z diskrétní matematiky? A tu mne to trklo! To je přece anagram jména Dana Nadaná (tu letos opravdu učím), přičemž je zanedbána diakritika a jméno a příjmení jsou spojeny. (Připomeňme, že anagramem slova rozumíme nějaké slovo, které vznikne z daného slova pouze libovolnou výměnou pořadí písmen.) Ihned mne napadlo, kolik takových anagramů by Dana mohla vytvořit pro svou e-mailovou adresu?

Řešení. Klademe si tedy otázku: „Kolik anagramů má slovo *dananadana*?"

Zvolíme metodu dvojího počítání a počet anagramů označíme x. Naše slovo se skládá z deseti písmen, přičemž a se v něm vyskytuje 5 krát, n třikrát a d dvakrát. Rozlišme písmena pomocí dolních indexů takto: $d_1a_1n_1a_2n_2a_3d_2a_4n_3a_5$. Dostáváme 10 různých znaků a ze slova $d_1a_1n_1a_2n_2a_3d_2a_4n_3a_5$ jsme schopni vytvořit 10! anagramů.

Nyní si představme, že máme nějaký anagram slova *dananadana* bez rozlišení stejných písmen a ptejme se, kolik z něj umíme vytvořit různých anagramů slova $d_1a_1n_1a_2n_2a_3d_2a_4n_3a_5$.

Písmena a můžeme na jejich pozicích oindexovat 5! různými způsoby. Ke každému pevnému oindexování áček můžeme oindexovat n na svých pozicích 3! způsoby a konečně, ke každému pevnému oindexování a a n můžeme oindexovat d na svých pozicích 2! způsoby. Z jednoho anagramu slova *dananadana* tedy vznikne $5! \cdot 3! \cdot 2!$ anagramů slova $d_1a_1n_1a_2n_2a_3d_2a_4n_3a_5$. Proto počet všech anagramů slova $d_1a_1n_1a_2n_2a_3d_2a_4n_3a_5$ je $x \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2!$.

Z výše uvedeného plyne, že $x \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2! = 10!$, odtud $x = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 2520$.

▲

Definice 2.44. *Permutace s opakováním* na n-prvkové množině je libovolné uspořádaní prvků této množiny, přičemž se každý prvek v takto vzniklé posloupnosti vyskytuje **předepsaný počet** krát.

Definice 2.45. Počet všech permutací s opakováním na n-prvkové množině $X = \{x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$, kde se každý prvek $x_i \in X$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ vyskytuje v permutaci m_i krát, budeme značit $P(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

Věta 2.46. *Nechť* $m_i \in \mathbb{N}$ *pro každé* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Potom* $P^*(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n)!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_n!}$.

Poznámka 2.47. Dodejme, že věta 2.46 platí i v případě, že některé $m_i = 0$.

Důkaz této věty je dosti technický, a proto jej předkládáme pouze zájemcům.

Pro zájemce:

Důkaz. Nechť $X^* = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je multimnožina, která obsahuje $m_i \in \mathbb{N}$ kopií prvku x_i pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Nazvěme S množinu všech posloupností vytvořených ze všech prvků z X^* a označme $x = |S|$. Nyní pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ rozlišíme kopie prvku x_i pomocí horních indexů takto: $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{m_i}$. S' označíme množinu všech posloupností, které vzniknou ze všech prvků x_i^j, kde $i = 1, 2, \dots, n$ a $j = 1, 2, \dots, m_i$. Každá posloupnost z S' obsahuje $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ různých prvků, a proto $|S'| = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)!$. Z každé posloupnosti z S vznikne přesně $m_1!m_2! \dots m_n!$ různých posloupností z S', neboť každý prvek x_i na m_i pozicích v posloupnosti z S můžeme vždy oindexovat $m_i!$ různými způsoby a z každých dvou různých posloupností z S vzniknou dvě disjunktní podmnožiny S' o mohutnosti $m_1!m_2! \dots m_n!$. Proto $x \cdot (m_1! \cdot m_2! \cdots m_n!) = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)!$. A odtud $x = \frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n)!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_n!}$.

$\square$

Definice 2.48. Číslu $\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n)!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_n!}$ říkáme *multinomický koeficient* a také jej značíme $\binom{m}{m_1, m_2, \dots, m_n}$, pokud $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m$.

Poznámka 2.49. Uveďme multinomickou větu. Říká nám, jak umocnit mnohočlen na přirozený mocnitel a zní takto

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^m = \sum_{m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{i=1}^{n} m_i = m} \binom{m}{m_1, m_2, \dots, m_n} {x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2} \cdots {x_n}^{m_n},$$

kde $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ a m je kladné přirozené číslo. Vidíme, že v multinomické větě figuruje výraz $\binom{m}{m_1, m_2, \dots, m_n}$ a odtud název multinomický koeficient.

Příklad 2.50. Kolik anagramů má slovo ABRAKADABRA?

Řešení. Máme-li spočítat všechny anagramy zadaného slova, máme vlastně zjistit, kolik existuje posloupností s prvky A, B, D, K, R, přičemž víme, že prvek A se v posloupnosti vyskytuje 5 krát, prvek B dvakrát, prvek D jednou, prvek K jednou a prvek R dvakrát. Jde tudíž o výběr s opakováním, přičemž počet kopií každého prvku je znám a na pořadí záleží. Typický příklad na permutace s opakováním, stačí proto jen dosadit do obecného vzorce. $P^*(5, 2, 2, 1, 1) = \frac{(5+2+2+1+1)!}{5!2!2!1!1!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 2} =$ $= 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 = 83160$.

▲

Příklad 2.51. Kolik anagramů má slovo ABRAKADABRA, pokud

- začínají a končí písmenem B?
- začínají nebo končí písmenem B?

- které neobsahují BB (dvě B po sobě)?
- které neobsahují AA?
- ve kterých písmeno K předchází písmenu D?

Řešení. Slovo obsahuje přesně dvě B, která mají pevné umístění na začátku a na konci slova. Zbývající písmena, tj. 5 krát A, dvakrát R, jedenkrát K a jedenkrát D mohou libovolně měnit pořadí na zbývajících devíti pozicích. Tentokrát jde o permutace s opakováním $P^*(5,2,1,1) = \frac{(5+2+1+1)!}{5!2!1!1!} = \frac{9.8.7.6}{2} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 = 1512$.

Zkušenost s předešlými řešenými příklady nám napovídá, že pokud se ve formulaci příkladu objeví spojka „nebo“, pak je dobré provést rozklad na disjunktní případy.

- Anagramy, které mají na začátku B, ale na konci B není (typ 1).
- Anagramy, které na začátku B nemají, ale na konci B je (typ 2).
- Anagramy, které mají na začátku i na konci B (typ 3).

Spočítejme anagramy typu 1. Jedno písmeno B je pevně fixováno na první pozici a na poslední pozici mohou být pouze písmena A, D, K, R. Předpokládejme, že na poslední pozici je A. Pak na zbývajících devíti pozicích permutují (mění pořadí) čtyři A, dvě R, jedno B, jedno D a jedno K. Dostáváme výsledek $P^*(4,2,1,1,1) = \frac{9!}{4!2!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 7560$. Předpokládejme, že na poslední pozici je D. Potom na zbývajících devíti pozicích permutuje pět A, dvě R, jedno B, jedno K. Výsledek tudíž je $P^*(5,2,1,1) = 1512$. Pokud bychom předpokládali, že na poslední pozici je K, dostaneme tentýž výsledek, tzn. $P^*(5,2,1,1) = 1512$. Zbývá ještě předpokládat, že na poslední pozici je R. Potom obdobnou úvahou obdržíme výsledek $P^*(5,1,1,1,1) = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$. Anagramů typu 1 je tudíž $7560 + 2 \cdot 1512 + 3024 = 13608$.

Snadno ověříme, že anagramů typu 2 je stejně jako anagramů typu 1, tzn. 13608. Z výše vypočítaného plyne, že anagramů typu 3 je 1512 a máme konečný výsledek $2 \cdot 13608 + 1512 = 28728$.

Nyní určíme počet anagramů, které neobsahují BB tak, že vypočítáme počet anagramů, které BB obsahují, a toto číslo odečteme od počtu všech anagramů (viz příklad 2.50). Vytvořme z dvou písmen B nový znak BB. Budeme se ptát, kolik existuje anagramů slova, které obsahuje znak BB, pět A, dvě R, jedno D a jedno K. Odpověď je snadná $P^*(5,2,1,1,1) = 15120$. Tudíž anagramů, kde B se vyskytují vedle sebe je 15120 a konečný výsledek je $83160 - 15120 = 68040$.

Mnohým by se mohlo zdát, že počet anagramů, kde se nevyskytuje AA zjistíme velmi podobně jako počet anagramů, které neobsahují BB. Chyba lávky, obdobný postup by vedl k fatálním chybám! Předešlý postup je možné použít pouze tehdy, jsou-li ve slově pouze dvě zmíněná písmena, leč v ABRAKADABRA je písmeno A pětkrát.

Popišme si chybu, které bychom se dopustili. Pokud bychom ze dvou A vytvořili nový znak AA, pak bychom například anagramy A AA BRKDRAAB a anagram AA A BRKDRAAB považovali za různé, neboť v prvním je znak AA zařazen jako druhý, zatímco ve druhém jako první. Avšak vidíme, že jde o jeden a tentýž anagram.

Zvolíme proto jiný postup a vypočítáme anagramy bez AA přímo. Vezměme všechna písmena slova ABRAKADABRA vyjma A. Máme dvakrát B, dvakrát R, jednou D a jednou K. Z těchto písmen vytvoříme $P^*(2,2,1,1) = \frac{6!}{2!2!} = 180$ různých slov. Aby se žádná dvě A nevyskytla vedle sebe musíme všech pět A umístit do jednotlivých mezer před, za a mezi písmeny (do každé mezery nejvýše jedno A). Protože je písmen 6, mezer musí být 7. Vybíráme tedy ze sedmi mezer pět tak, abychom do nich mohli umístit všechna A, což dává $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$ možností. Ke každému slovu složenému z písmen B, R, D, K, (těch je 180) existuje 21 možností jak umístit pět A. Výsledek tudíž je $21 \cdot 180 = 3780$.

A jsme u poslední části příkladu. Zjistíme kolik je anagramů, kdy K předchází D. K i D se ve slově ABRAKADABRA vyskytují přesně jednou, což úlohu zjednodušuje. Pokud by K bylo na první pozici, pak existuje 10 možností, kde může být D, bylo-li by K na druhé pozizi, máme 9 možností pro umístění D atd., bylo-li by K na desáté pozici, existuje jediná možnost, jak umístit D. Máme tudíž $10 + 9 + 8 + \cdots + 1 = = \frac{10}{2}(10+1) = 55$ možností jak umístit K a D tak, že K předchází D. Ke každému pevnému umístění K a D, můžeme zbývající písmena na zbývajících devíti pozicích libovolně permutovat, tj. $P^*(5,2,2) = \frac{9!}{5!2!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 2} = 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 = 756$ možností. Odtud výsledek $55 \cdot 756 = 41580$.

Dalo by se zřejmě očekávat, že anagramů, kde K předchází D, je přesně tolik jako anagramů, kde D předchází K. Skutečně, neboť uvažujeme-li libovolný anagram, kde K předchází D, tak právě výměnou těchto písmen na jejich pozicích dostaneme přesně jeden z anagramů, kde D předchází K. Výsledek tudíž lze určit také tak, že celkový počet anagramů dělíme dvěma a dostaneme $83160 : 2 = 41580$.

▲

$\boxed{\Sigma}$

Pojmy k zapamatování

— Číslo $P(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ udává počet permutací s opakováním, jde o uspořádané výběry VŠECH $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ prvků multimnožiny X^*, přičemž víme, že multimnožina X^* má n různých prvků a první prvek má m_1 kopií, druhý m_2 kopií až n-tý prvek m_n kopií.

— Platí $P(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \binom{m}{m_1, m_2, \ldots, m_n} = \frac{m!}{m_1! m_2! \cdots m_n!}$, je-li $m_1 + m_2 + + \ldots \cdots + m_n = m$.

— Číslo $\binom{m}{m_1, m_2, \ldots, m_n} = \frac{m!}{m_1! m_2! \cdots m_n!}$ se nazývá multinomický koeficient.

$\boxed{!}$

Příklady k procvičení

1. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI?

2. Kolik existuje osmimístných čísel, která obsahují tři nuly, čtyři jedničky a jednu dvojku?

   Mějme 4 červené, 3 žluté, 2 modré a 2 bílé korálky. Kolika různými způsoby je můžeme navléci na nit, pokud

3. chceme, aby první tři korálky byly červené?

4. chceme, aby první 2 byly červené a poslední 2 byly žluté?

5. chceme, aby po dvou červených bylo na obou koncích a uprostřed byl jeden žlutý?

6. chceme, aby na začátku a na konci byl přesně jeden žlutý? (Nesmí být další žlutý na druhé nebo předposlední pozici!)

7. chceme, aby vedle sebe nebyly nikdy dva červené?

8. chceme, aby byly vedle sebe nejvýše dva červené?

9. Zaklínadlo pro změnu počasí ve filmu Rumburak zní RABERA TAREGO. Kolik existuje anagramů tohoto zaklínadla složených ze dvou šestipísmenových slov? Kolik existuje dvojslovných anagramů tohoto zaklínadla? (Slovo může obsahovat i jediné písmeno.)

Klíč k příkladům k procvičení

1. 3150.
2. 175.
3. $\frac{8!}{3!2!2!1!}$.
4. $\frac{7!}{2!2!2!1!}$.
5. $\frac{6!}{2^3}$.
6. $\frac{9!}{4!2!2!} - 2\frac{8!}{4!2!2!} = 7^2 \cdot 6 \cdot 10$.
7. $\frac{7!}{3!2!2!} \cdot \binom{8}{4}$.
8. $\frac{7!}{3!2!2!} \cdot (\binom{8}{4} + 3\binom{8}{3} + \binom{8}{2})$.
9. 6652800, 73180800.

2.5 Kombinace s opakováním

Čtyři z pěti kardiologů, neurologů a psychiatrů říkají, že se má postmoderní a postindustriální člověk v 21. století především chránit proti stresům, které jsou v něm samovolně vyvolávány přemrštěnou dělbou práce, záplavou informací a urbanizovaným prostředím, ve kterém žije.

Je zřejmé, že nejúčinnější formou protistresového boje je přiměřené sportování, zvláště pak intenzivní pohyb v exhaláty nezatížené krajině.

Již méně zřejmé však je, že dobré protistresové opatření je také navlékání korálků! Při manipulaci s jednotlivými korálky totiž dochází k příjemným akupresurním vzruchům v konečcích prstů, jež jsou dostředivě vedeny a následně harmonizují celou nervovou soustavu, čímž navozují příjemný meditativní stav a člověk velmi účinně relaxuje.

Příklad 2.52. Bylo pochmurné, větrné odpoledne. Chystám si korálky k navlékání, a to tak, že jsem si zcela náhodně vybral 9 korálků, které se volně povalovaly na posteli. Věděl jsem, že jsou všechny stejného tvar, jsou v pěti barvách (červená, žlutá, modrá, zelená, bílá) a v každé barvě jich je alespoň patnáct.

Vážení čtenáři, teď už možná i přátelé, nechcete tu otázku položit za mne? Ano, ano, správně! Kolik máme možností, jak oněch 9 korálků vybrat?

Řešení. V tomto případě jde o výběry neuspořádané (navlékat se bude až za chvíli, nyní probíhá přípravná fáze). Je-li výběr neuspořádaný, můžeme si jej uspořádat jak chceme. Stanovme pořadí zleva doprava například takto: červené, žluté, modré, zelené a nakonec bílé kuličky. Na obrázku ?? vidíme jeden z možných výběrů a jeho uspořádání. Připomeňme, že můžeme vybrat všech devět korálků i v jediné barvě, neboť jich máme v každé barvě dostatek (alespoň 15).

Každý takový výběr lze popsat i bez použití barev. Pokud oddělíme červené od žlutých, žluté od modrých, modré od zelených a zelené od bílých vždy tzv. přepážkou (svislá oddělující čára, viz obr. ??), pak můžeme vymazat barvy a dostaneme posloupnost 9 nebarevných kuliček a 4 přepážek, přičemž kuličky jsou rozděleny čtyřmi přepážkami do pěti skupin.

Ano, samozřejmě, každá taková posloupnost 9 kuliček a 4 přepážek nám vlastně symbolizuje přesně jeden možný výběr. (Poznamenejme, že pokud se například první, druhá a třetí přepážka v řetězci vyskytují bezprostředně vedle sebe (viz obr.??), tak kuličky ve žluté a modré barvě nebyly vůbec vybrány.) Tudíž, kolik je takových posloupností, tolik je možných výběrů. Ale každá posloupnost vznikne tak, že z $9+4$ objektů vybereme 4 a ty prohlásíme za přepážky, přičemž zbývající objekty budou kuličky! Z čehož plyne, že posloupností je $\binom{9+4}{4} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4!} = 13\cdot 11\cdot 5 = 715$ a přesně tolik je i možných výše uvedených výběrů.

$\blacktriangle$

Definice 2.53. *Kombinace s opakováním* na multimnožině X^*, která má n různých prvků každý v alespoň k kopiích, je nějaká k-prvková podmultimnožina X^*.

Definice 2.54. Počet všech k-prvkových kombinací s opakováním na multimnožině X^* s n různými prvky (každý v alespoň k kopiích) označíme $C^*(n, k)$.

Věta 2.55. $C^*(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ *pro každé přirozené* n, k.

Důkaz. Převeďme důkaz této věty do řeči příkladu 2.52. Máme korálky v n různých barvách a v každé barvě alespoň k korálků. Kolika různými způsoby umíme vybrat k korálků? Jde o neuspořádaný výběr s opakováním, přičemž každý prvek se může opakovat až k krát. Každý takový výběr popisuje přesně jedna posloupnost s k kuličkami, $n-1$ přepážkami a naopak. Zjistíme počet takových posloupností. Máme $n+k-1$ objektů a z nich vybereme $n-1$ objektů jako přepážky a zbývajících k objektů prohlásíme za kuličky. Takových výběrů, a tedy i posloupností je $\binom{n+k-1}{n-1} =$ $= \binom{n+k-1}{n+k-1-(n-1)} = \binom{n+k-1}{k}$.

$\square$

Příklad 2.56. Kolika způsoby lze vybrat korálky k navlékání (viz příklad 2.52), pokud:

- nechci žádný červený korálek?
- chci alespoň 4 červené korálky?
- chci alespoň 2 žluté a 2 modré korálky?
- chci z každé barvy alespoň jeden korálek?

Řešení. Korálky budeme řadit podle barev stejně, jako v příkladu 2.52.

Vybíráme 9 korálků tak, aby žádný nebyl červený. Tudíž budeme mít korálky v nejvýše 4 barvách. Každý takový výběr proto symbolizuje posloupnost s devíti korálky a pouze třemi přepážkami, neboť na oddělení čtyř barev nám stačí 3 přepážky. Ale takových posloupností je $\binom{9+3}{3} = \binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2} = 11\cdot 10\cdot 2 = 220$.

Chceme-li mít ve výběru alespoň čtyři červené korálky, znamená to, že do posloupnosti před první přepážku dáme nějaké 4 korálky. Zbývajících 5 korálků pak libovolně rozdělíme mezi čtyři přepážky (viz obr.??). Zajímá nás tudíž počet posloupností s pěti korálky a čtyřmi přepážkami, jenž je $\binom{5+4}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2} = 126$.

Chceme-li mít ve výběru 2 žluté a 2 modré korálky, pak musíme mít v posloupnosti mezi první a druhou přepážkou dva korálky a mezi druhou a třetí také dva korálky. Počet všech rozdělení zbývajících 5 korálků mezi čtyři přepážky nám popíší všechny posloupnosti s pěti korálky a čtyřmi přepážkami, těch je $\binom{5+4}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2} = 126$.

Chceme-li mít v každé barvě alespoň jeden korálek, vytvoříme nejdříve posloupnost, kde mezi každými dvěma, před první a za poslední přepážkou je vždy po jednom korálku. Takto máme rozděleno 5 korálků. Zbývá rozdělit čtyři korálky mezi čtyři přepážky, tj. $\binom{4+4}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2} = 70$ možností.

▲

Příklad 2.57. Kolik existuje součtů $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$, kde je buď $x_i \in \mathbb{N}_0$ nebo $x_i \in \mathbb{N}$ pro každé $i = 1, 2, 3, 4$? (Součty například $0+7+3+5$ a $7+5+0+3$ považujeme za různé, i když obsahují tatáž čísla.)

Řešení. Představíme-li si, že máme 15 kuliček a chceme je rozdělit do čtyř skupin tak, že jednotlivé skupiny oddělíme třemi přepážkami, pak každé takové rozdělení symbolizuje přesně jeden ze součtů $x_1+x_2+x_3+x_4 = 15$, kde $x_i \in \mathbb{N}_0$. Neboť počet kuliček před první přepážkou je první, počet kuliček mezi první a druhou přepážkou je druhý, počet kuliček mezi druhou a třetí přepážkou je třetí a počet kuliček za třetí přepážkou je čtvrtý sčítanec.

Poznamenejme, že pokud by např. mezi druhou a třetí přepážkou nebyla žádná kulička, pak $x_3 = 0$, což je možné, neboť $x_i \in \mathbb{N}_0$.

Součtů je tudíž přesně tolik, kolik je posloupností s 15 kuličkami a třemi přepážkami, ale těch je $\binom{15+3}{3} = \binom{18}{3} = \frac{18\cdot17\cdot16}{3\cdot2} = 3\cdot17\cdot16 = 816$.

Pokud $x_i \in \mathbb{N}$, pak $x_i \geqq 1$. Každý takový součet by tedy byl symbolizován posloupností s 15 kuličkami a 3 přepážkami, přičemž mezi, za a před přepážkami je vždy alespoň jedna kulička. Kolik je takových posloupností?

Vezměme nejdříve čtyři kuličky a dejme po jedné před, za a mezi přepážky. Zbývá rozdělit 11 kuliček mezi tři přepážky. Už víme, že existuje $\binom{11+3}{3} = \binom{14}{3} = \frac{14\cdot13\cdot12}{3\cdot2} = 14\cdot13\cdot2 = 364$.

Ukažme si ještě jiný způsob řešení druhé části příkladu. Je zřejmé, že součtů

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 = 15 - 4$, $x_i \in \mathbb{N}$, je přesně tolik, kolik je součtů $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$, $x_i \in \mathbb{N}$. První součet můžeme přepsat takto: $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 11$ a zvolit substituci $y_i = x_i - 1$. Pak ovšem dostaneme součet $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$, kde $y_i \in \mathbb{N}_0$. Sčítance mohou být i nulové! Z čehož plyne, že součtů $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$, kde $y_i \in \mathbb{N}_0$ je přesně tolik, kolik existuje posloupností s 11 kuličkami a 3 přepážkami bez jakýchkoliv dalších podmínek (přepážky mohou být i vedle sebe). A máme výsledek $\binom{11+3}{3} = 364$.

▲

Pojmy k zapamatování

Σ

— Číslo $C^*(n, k)$ určuje počet všech kombinací s opakováním, jde o neuspořádané k-prvkové výběry z multimnožiny X^*, přičemž víme, že X^* obsahuje n různých prvků každý v alespoň k kopiích. Každý prvek ve výběru se může opakovat libovolný počet krát, nejvýše však k krát.

— Platí $C^*(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$.

— Součtu typu $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$, kde $n, k \in \mathbb{N}$ a $x_i \in \mathbb{N}_0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, je $C^*(n, k)$.

Příklady k procvičení

!

1. V automatu na nápoje jsou čtyři druhy nealkoholických nápojů, Coca cola, Magnesia, Kofola a Sprite, od každého druhu alespoň devět lahví. Během přestávky bylo koupeno 8 nápojů. Kolika různými způsoby se to mohlo stát?

2. Kolik existuje součtů $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 26$, jestliže pro každé $i = 1, 2, 3, 4, 5$ platí $a_i \in \mathbb{N}, a_i \geqq 3$?

3. Kolik existuje součtů $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$, $k, n \in \mathbb{N}$, jestliže pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $a_i \in \mathbb{N}$?

4. Kolik existuje součtů $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$, $k, n \in \mathbb{N}$, jestliže pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $a_i \in \mathbb{N}, a_i > 4$?

   V osudí je libovolný konečný počet míčků. Na nich jsou natištěna čísla (na každém jedno), $3, 7, 23$ a 97. S kterýmkoliv z těchto čtyř čísel je v osudí alespoň 100 míčků. Vytáhneme z osudí osm míčků, přičemž nám nezáleží na pořadí. Kolik existuje různých možností, pokud

5. chceme alespoň pět míčků s číslem 7?

6. nechceme žádný míček s číslem 23?

7. chceme alespoň jeden míček s číslem 3 nebo 97?

8. chceme přesně čtyři míčky s číslem 23.

Klíč k příkladům k procvičení

1. 165.
2. 1365.
3. $\binom{n+k-1}{n-1}$.
4. $\binom{n+k-5n-1}{n-1}$.
5. 20.
6. 45.
7. $2 \cdot \binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 72 + 84 = 156$.
8. 15.

2.6 Variace s opakováním

Příklad 2.58. Hledím přes kalná okna do kalného rána a říkám si, kolika způsoby mohu navléknout nachystané korálky (viz příklad 2.52), pokud uvažuji všechna možná „nachystání“, tzn. všechny možné neuspořádané výběry?

Řešení. Dejme tomu, že máme nějaké jedno konkrétní „nachystání“ (neuspořádaný výběr), například 3 červené, 4 žluté, 1 modrý, žádný zelený a jeden bílý korálek. Při navlékání budeme rozlišovat různá pořadí a víme, kolikrát se který korálek bude opakovat. Čili jde o typickou úlohu na permutace s opakováním. Tudíž počet možných navléknutí pro naše konkrétní „nachystání“ je $P^*(4,3,1,1,0) = \frac{9!}{3!4!1!0!1!}$.

My ovšem chceme zjistit počet možných navléknutí pro všechna myslitelná „nachystání“. Zkusme je všechna obecně popsat.

Uvažujme takto, vybrali jsme m_1 červených, m_2 žlutých, m_3 modrých, m_4 zelených a m_5 bílých korálků, kde každé $m_i \in [0,9]$ (můžeme vybrat pouze 0 až 9 korálků v jedné barvě). Potom ovšem musí také platit, že $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 9$, neboť dohromady máme vybráno 9 korálků.

Odtud plyne, že počet všech navléknutí je

$$\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4,m_5 \in [0,9],\ \sum_{i=1}^{5} m_i = 9} \frac{9!}{m_1!m_2!m_3!m_4!m_5!}$$

Uvědomme si, že výše uvedená suma má tolik sčítanců, kolik existuje součtů $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 9$, kde $m_i \in \mathbb{N}_0$, a těch je $\binom{9+4}{4} = \binom{13}{4} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 715$. Proto by byl výpočet nesmírně pracný!

Nepodaří se nám počet navléknutí při všech možných „nachystáních“ určit nějak rozumněji?

Zkusme uvažovat jinak, nebudeme si korálky nejdříve chystat, ale budeme je ihned navlékat. Kolik máme možností, jak zvolit první korálek? Pět, neboť máme korálky v pěti barvách. Kolik možností máme, jak zvolit druhý korálek ke každé pevné volbě prvního? Opět pět, tedy celkově $5 \cdot 5$ možností. Tuto úvahu můžeme stále opakovat, až dospějeme k výsledku $\underbrace{5 \cdot 5 \cdots 5}_{9} = 5^9 = 1953125$.

▲

Definice 2.59. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ a $n, k \geqq 1$. *Variace s opakováním* na n-prvkové množině X je nějaká k-prvková posloupnost vybraná z množiny X, a každý prvek množiny X se v ní může opakovat libovolný počet krát, nejvýše však k krát.

Definice 2.60. Počet všech k-prvkových variací s opakováním na n-prvkové množině X budeme značit $V^*(n, k)$.

Věta 2.61. *$V^*(n, k) = n^k$ pro všechna přirozená čísla n, k.*

Chceme vypočítat, kolik je uspořádaných k-tic $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, kde $a_i \in X$ pro každé $i = 1, 2, \dots, k$. Víme, že máme n možností, co dosadit za a_1, ke každé možnosti, co dosadit za a_1 máme n možností, co dosadit za a_2, ke každé možnosti, co dosadit za a_1, a_2 máme n možností, co dosadit za a_3, atd. (nezávislé výběry). Celkově tudíž máme $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k} = n^k$ uspořádaných k-tic (posloupností).

Poznámka 2.62. Velmi zajímavým důsledkem předešlých úvah je následující identita:

$$\sum_{m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} m_i = m} \frac{m!}{m_1! m_2! \dots m_n!} = n^m.$$

Vzpomeňme však na multinomickou větu (viz poznámka 2.49). Výše uvedená rovnost z ní plyne přímo, pokud zvolíme $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

Příklad 2.63. Zobrazení množiny A do množiny B znamená, že každému prvku množiny A přiřadíme jednoznačně nějaký prvek z množiny B. Prvku z A, jemuž přiřazujeme, říkáme *vzor* a prvku z B, který přiřazujeme, říkáme *obraz*. O zobrazeních budeme podrobně hovořit v Kapitole 5. Kolik existuje všech zobrazení 7-prvkové množiny A do 5-prvkové množiny B?

Řešení. Nechť $A = [1, 7]$ a $B = \{a, b, c, d, \mathrm{e}\}$. K číslu 1 máme 5 možností, co mu přiřadit z množiny B (buď a nebo b nebo c nebo d nebo e). Pro každý pevně zvolený obraz čísla 1 můžeme určit pěti způsoby obraz čísla 2. Ke každým pevně zvoleným obrazům čísel 1 a 2 umíme (nezávisle) zvolit pěti způsoby obraz čísla 3 atd. Celkově nám tedy vychází, že množinu A umíme zobrazit do B $\underbrace{5 \cdot 5 \cdots 5}_{7} = 5^7 = 78125 =$

$= V^*(5, 7)$ způsoby.

Každé zobrazení 7-prvkové množiny A do 5-prvkové množiny B umíme tudíž jednoznačně popsat nějakým uspořádaným 7-prkovým výběrem z multimnožiny, která má 5 různých prvků každý v alespoň sedmi kopiích. A skutečně, například posloupnost (uspořádaný výběr) $(a, b, a, d, \mathrm{e}, a, b)$ popisuje zobrazení, kdy prvek 1 má obraz a, prvek 2 má obraz b, prvek 3 má obraz a, prvek 4 má obraz d, prvek 5 má obraz e, prvek 6 má obraz a a prvek 7 má obraz b. Pozice v uspořádané sedmici určuje vzor a prvek na této pozici jeho obraz.

▲

Příklad 2.64. Počítač Kecálek ve filmu Rumburak dostal za úkol vyhledat všechny dvojice slov, složené z dvanácti písmen (mezeru nepočítáme). Kolik takových dvojic slov existuje, pokud používáme 26 písmen?

Řešení. Nejdříve si představme, že vytváříme jedno slovo z dvanácti písmen. Na každou z 12 pozic máme 26 možností, jaké písmeno tam umístit, tj. celkově 26^{12} možností. Mezeru musíme vložit mezi dvojici po sobě jdoucích písmen. Takových míst je ovšem 11 a dostáváme výsledek $11 \cdot 26^{12}$.

▲

Příklad 2.65. Kolik existuje pěticiferných čísel dělitelných pěti?

Řešení. Pěticiferné číslo má 5 libovolných číslic, přičemž na první pozici zleva nesmí být 0 (chápali bychom je jako čtyřciferné). Pokud je dělitelné pěti, pak musí mít na poslední pozici 0 nebo 5. Čili na první pozici může být jedna z devíti číslic na poslední pozici jedna ze dvou číslic a na pozicích 2 až 4 jedna z desíti číslic. Celkově proto máme $9 \cdot 2 \cdot 10^3 = 18000$ možností, jak vytvořit pěticiferné číslo dělitelné pěti.

Můžeme však uvažovat i jinak. První pěticiferné číslo je 10000 a poslední 99999. Celkově tudíž máme $99999 - 10000 + 1 = 100000 - 10000 = 90000$ pěticiferných čísel. Uvědomte si, že například v množině $[2, 7]$ není $7 - 2$ čísel, ale $7 - 2 + 1$ čísel. Nu a každé páté z oněch 90000 pěticiferných čísel je dělitelné pěti. Odtud snadno odvodíme výsledek $\lfloor \frac{90000}{5} \rfloor = 18000$.

Vážení čtenáři dovolte ještě poznámku. Ptali-li bychom se kolik čísel dělitelných například čtyřmi je v množině $[16, 32]$, pak odpověď $\lfloor \frac{32-16+1}{4} \rfloor = 4$ je špatná, neboť obě „krajní“ čísla jsou dělitelná čtyřmi. Správný výsledek by tudíž byl $\lfloor \frac{32-16+1}{4} \rfloor +$ $+ 1 = 5 = \lceil \frac{32-16+1}{4} \rceil$. Pravdivost této poznámky snadno ověříme, neboť v množině $[16, 32]$ jsou tato čísla $16, 20, 24, 28, 32$ dělitelná čtyřmi.

▲

Pojmy k zapamatování

— Číslo $V^*(n,k)$ určuje počet variací s opakováním. Jde o uspořádané k prvkové výběry (posloupnosti) z multimnožiny X^*, která má n různých prvků každý v alespoň k kopiích. Každý prvek ve výběru se může opakovat libovolný počet krát, nejvýše však k krát.

— Platí $V^*(n,k) = n^k$.

— Počet všech zobrazení k-prvkové množiny do n-prvkové množiny je $V^*(n,k)$.

Příklady k procvičení

1. Automobily v Moravskoslezském kraji mají poznávací značky tvaru ?T? ????, přičemž místo každého otazníku může být libovolná číslice. Kolik takových poznávacích značek lze vytvořit?

   Kolik existuje šesticiferných čísel dělitelných

2. dvěma? (vypočítejte alespoň dvěma způsoby)

3. pěti? (vypočítejte alespoň dvěma způsoby)

4. čtyřmi?

5. třemi?

6. sedmi?

7. Kolik existuje pěticiferných čísel, jejichž ciferný součet je 9.

Klíč k příkladům k procvičení

1. 1000000.

2. 450000.

3. 180000.

4. 225000,

5. 300000.

6. 128571.

7. 495.

2.7 Složené výběry

Pokud provádíme *složený výběr*, znamená to, že v jedné množině či multimnožině realizujeme několik různých výběrů, kterým budeme říkat *podvýběry* složeného výběru. Dva podvýběry mohou být *závislé* nebo *nezávislé*. Pokud jsou podvýběry závislé, pak jeden podvýběr ovlivňuje počet možností druhého podvýběru. Jsou-li nezávislé, pak tomu tak není.

Příklad 2.66. Trenér hokejového družstva vybírá první pětku (bývá nejproduktivnější a skládá se ze dvou obránců a tří útočníků) z 24 hráčů. Rozlišujme tři případy:

- Hráči jsou rozděleni na obránce a útočníky tak, že trenér má k dispozici 9 obránců a 15 útočníků.
- Každý hráč může být jak obránce, tak útočník.
- Hráči jsou rozděleni na 11 obránců a 13 útočníků, přičemž trenér může dva konkrétní obránce použít i jako útočníky.

Kolika způsoby může trenér vybrat první pětku, uvažujeme-li postupně všechny tři případy?

Řešení. První případ je nejjednodušší, provádíme totiž dva podvýběry z dvou disjunktních množin, tzn. výběr obránců nijak neovlivní možný počet výběrů útočníků a naopak. To znamená, že jde o výběry nezávislé. Připomeňme ještě, že oba podvýběry (obránců a útočníků) budou neuspořádané a bez opakování, jde tudíž o kombinace bez opakování.

Počet možností, jak vybrat obránce, je $\binom{9}{2} = 9 \cdot 4 = 36$ a počet možností, jak vybrat útočníky, je $\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$. Protože ke každému pevnému výběru obránců existuje 455 možností, jak vybrat útočníky, použijeme kombinatorické pravidlo součinu a dostáváme výsledek $36 \cdot 455 = 16380$, což je počet možností složeného výběru.

Ve druhém případě vybíráme z téže množiny jak obránce, tak útočníky. Rozhodneme-li se například, že nejdříve budeme vybírat obránce, pak tím jistě ovlivníme počet možných výběrů útočníků. To znamená, že jde o výběry závislé. Dáme-li pozor, opět výpočet nebude složitý a vystačíme si s kombinatorickým pravidlem součinu. Vyberme nejdříve obránce, tj. $\binom{24}{2}$ možností. Po každém takovém podvýběru nám ovšem v množině zůstane jen 22 hráčů. Odtud, počet podvýběrů útočníků je $\binom{22}{3}$ a počet složených výběrů je $\binom{24}{2} \cdot \binom{22}{3} = 12 \cdot 23 \cdot \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{3 \cdot 2} = 12 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 7 \cdot 10 = 425040$.

Zkusme postupovat opačně, nejdříve budeme vybírat útočníky a potom obránce. Měli bychom, pochopitelně, dojít k témuž výsledku. Vyzkoušejme to. Pro výběr útočníků máme $\binom{24}{3}$ možností a pro výběr útočníků $\binom{21}{2}$ možností. Výsledek tudíž je $\binom{24}{3} \cdot \binom{21}{2} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3 \cdot 2} \cdot \frac{21 \cdot 20}{2} = 425040$.

Třetí případ je nejtěžší. Označme x, y dva obránce, kteří mohou hrát jak v obraně tak v útoku. Číslo $\binom{11}{2} \cdot \binom{13}{3}$ nám udává počet všech možností, jak vybrat první pětku, v případě, že ani jeden z hráčů x, y nehraje v útoku. Musíme ještě spočítat všechny případy, kdy alespoň jeden z hráčů x, y hraje v útoku. Dostáváme tyto disjunktní případy:

- x hraje v útoku, y hraje v obraně. Dostáváme $\binom{9}{1} \cdot \binom{13}{2}$ možností.
- x hraje v útoku, y nehraje. Dostáváme $\binom{9}{2} \cdot \binom{13}{2}$ možností.
- y hraje v útoku, x hraje v obraně. Dostáváme $\binom{9}{1} \cdot \binom{13}{2}$ možností.
- y hraje v útoku, x nehraje. Dostáváme $\binom{9}{2} \cdot \binom{13}{2}$ možností.
- oba, x i y hrají v útoku. Dostáváme $\binom{9}{2} \cdot \binom{13}{1}$ možností.

Všimněte si, v této úloze jsme nejdříve celkovou úlohu rozdělili do dvou disjunktních případů, kdy x, y nehrají v útoku a kdy alespoň jeden z x, y v útoku hraje. Potom jsme druhý případ ještě rozložili do pěti disjunktních případů.

Na závěr počty jednotlivých disjunktních podvýběrů sečteme a dostaneme výsledek $v = \binom{11}{2} \cdot \binom{13}{3} + \left(2 \cdot \binom{9}{1} \cdot \binom{13}{2} + 2 \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{13}{2} + \binom{9}{2} \cdot \binom{13}{1}\right) = 55 \cdot 286 + 18 \cdot 78 + 72 \cdot 78 + 36 \cdot 13 = 15730 + 1404 + 5616 + 468 = 23218.$

▲

Vážení čtenáři, následující cvičení chápejte jako cvičení souhrnná. Měli by jste si v nich procvičit všechny základní kombinatorické výběry včetně výběrů složených.

Příklady k procvičení

!

1. Házíme dvakrát dvanáctistěnnou kostkou (Představte si například hranol, jehož podstavy jsou pravidelné dvanáctiúhelníky a na bočních stěnách jsou čísla od 1 do 12, zatímco na podstavách není číslo žádné. Hranol válíme.) a výsledky si zapisujeme. Kolik různých výsledků můžeme dostat, jestliže nerozlišujeme pořadí hodů.

   Na konferenci vystoupí šest přednášejících: A, B, C, D, E, F. Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení, má-li:

2. přednášející F vystoupit po přednášejícím B.

3. přednášející F vystoupit bezprostředně před přednášejícím B.

   Kolika způsoby můžeme vybrat ze čtyř dívek a sedmi chlapců pětičlennou skupinu tak, aby v ní byly:

4. přesně dvě dívky?

5. alespoň dvě dívky?

6. nejvýše dvě dívky?

7. Máme sedm různých figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit?

8. Máme sedm stejných figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak některé figurky obarvit?

9. Máme sedm stejných figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit, pokud od každé barvy by měla být alespoň jedna figurka?

10. V sáčku je 5 červených, 4 modré a 4 zelené kuličky. Kolika způsoby lze ze sáčku vybrat pět kuliček?

Mějme slovo **BORABORA**. Kolika způsoby z něj lze vybrat čtyři písmena, pokud:

11. nám nezáleží na pořadí?

12. pokud nám na pořadí záleží?

Mějme slovo **ABRAKADABRA**. Kolika způsoby z něj lze vybrat čtyři písmena, pokud:

13. nám nezáleží na pořadí?

14. pokud nám na pořadí záleží?

Klíč k příkladům k procvičení

1. 78.
2. 360
3. 120
4. $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3}$.
5. $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3} + \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{2} + \binom{4}{4} \cdot \binom{7}{1}$.
6. $\binom{4}{0} \cdot \binom{7}{5} + \binom{4}{1} \cdot \binom{7}{4} + \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3}$.
7. 3^7.
8. $\binom{7+3}{3}$.
9. $\binom{4+2}{2}$.
10. $\binom{57}{2} - 2$.
11. $1 + 4\binom{3}{2} + \binom{4}{2}$.
12. $1 \cdot P(4) + 4\binom{3}{2} \cdot P^*(2,1,1,0) + \binom{4}{2} \cdot P^*(2,2,0,0)$.

13. $1 + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{5}{4}$.

14. $1 \cdot P^*(4,0,0,0,0) + \binom{4}{1} \cdot P^*(3,1,0,0,0) + \binom{3}{2} \cdot P^*(2,2,0,0,0) + \binom{3}{1}\binom{4}{2} \cdot P^*(2,1,1,0,0) +$
$+ \binom{5}{4} \cdot P^*(1,1,1,1,0)$.

Kapitola 3

Diskrétní pravděpodobnost

...ucítíte ji všude...
Dobu Zlou
...vánek ji přináší...
Příliš mnoho lidí kolem kola štěstí.

NADĚJE a NÁHODA, velmi frekventovaná a svým způsobem propojená slova v řeči lidské. Náhody nebo-li náhodné jevy jsou události, které mohou, ale nemusí nastat a jsou dvojího typu.

Buď nám není známa příčina, proč nastávají, a tedy na nás působí jako náhodné. Přitom při seznámení se s jejich příčinami bychom dokázali jednoznačně rozhodnout, zda nastanou či ne. Jako příklad bychom mohli uvést následující. Přijdeme do restauračního zařízení, a jaká náhoda, sedí tam dávný přítel z dětství. Pokud bychom ovšem znali denní zvyklosti svého přítele, věděli bychom, že každý týden v tento den a tuto hodinu chodí právě sem. Tudíž zdánlivě náhodný jev ve skutečnosti náhodný není.

Nebo jde o náhodné jevy ze samé podstaty. Jako příklad můžeme uvést skutečnost, že jsem při hře „Člověče nezlob se“ hodili šestku, nebo dostali z náhodně zamíchaného balíčku karet přesně ty karty, které jsem očekávali, nebo že jsem uhádli všech šest čísel v jednom tahu Sportky. Právě takovými jevy, jež jsou náhodné od podstaty, se budeme zabývat v této kapitole.

Čím dál tím častěji se setkáváme s lidmi, kteří si chtějí zajistit spokojený, šťastný a bohatý život v co nejkratším čase, nejlépe ihned (Kde se vytratila moudrost?). Toho lze dosáhnout, jak všichni víme, legálně i nelegálně. Legální poptávka generuje legální nabídku. Přicházejí tedy jiní lidé, kteří nabízejí obrovské obnosy, pokud dotyčný uhádne nějaký náhodný jev. Zájemců jsou zástupy, leč naděje na výhru mizivá, což velmi dobře živí hejna novodobých podnikavců. Tento fenomén zde existuje již od nepaměti a říkáme mu hazardní hry.

Právě hazardní hry byly zásadním motivem při prvních pokusech měřit naději s jakou náhodný jev nastane. Tato „míra naděje“ byla nazvána PRAVDĚPODOB-

NOSTÍ náhodného jevu.

3.1 Náhodné jevy a pravděpodobnostní prostor

Řadu problémů týkajících se náhodných jevů lze modelovat pomocí množin a podmnožin, což nám umožňuje používat při jejich řešení přesný, stručný a výstižný matematický jazyk. Poznamenejme, že diskrétní pravděpodobnost téměř výlučně využívá pouze konečné množiny. Dejme si dva jednoduché příklady, ve kterých si předvedeme, jak modelovat náhodné jevy jako podmnožiny nějaké množiny, avšak samotný výpočet pravděpodobnosti necháme na později.

Příklad 3.1. Hodíme šestistěnnou spravedlivou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo větší než 4?

Řešení. Spravedlivá kostkou rozumíme takovou kostku, kde každá její stěna padá se stejnou pravděpodobností. Vytvoříme si množinu Ω všech možností, které mohou nastat, tedy $\Omega = [1, 6]$. A náhodný jev A definujeme jako $A \subseteq \Omega$, přičemž $A = [5, 6]$.

▲

Příklad 3.2. Máme náhodně zamíchaný balíček 32 karet (hodnoty karet jsou $7, 8, 9, 10, J, Q, K, A$, každá ve čtyřech barvách $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit$). Jaká je pravděpodobnost, že první čtyři karty jsou esa?

Řešení. Tentokrát budou prvky množiny všechna možná zamíchání oněch 32 karet, tedy $|\Omega| = 32!$ a $A \subseteq \Omega$ bude obsahovat ta zamíchání, kde jsou na prvních čtyřech pozicích esa. Není těžké spočítat, že $|A| = 4! \cdot 28!$. Zde už můžeme prozradit, že čísla $|\Omega|, |A|$ budou pro nás zásadní při výpočtu pravděpodobnosti náhodného jevu A.

▲

Nastal čas, abychom předešlá pozorování zformalizovali.

Definice 3.3. *Konečný pravděpodobnostní prostor* je uspořádaná dvojice (Ω, P), kde *nosič pravděpodobnostního prostoru* Ω je konečná množina *elementárních náhodných jevů* a P je *funkce pravděpodobnosti*, která každé podmnožině (*náhodnému jevu*) $A \subseteq \Omega$ přiřadí číslo $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$, přičemž

- $P(\emptyset) = 0$ a $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pokud jsou množiny (náhodné jevy) A, B disjunktní.

Poznámka 3.4. Z definice je možné, mimo jiné, vyčíst že:

- elementární náhodné jevy jsou prvky množiny Ω a náhodné jevy jsou podmnožiny Ω. Je-li tedy $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, pak k výpočtu pravděpodobnosti libovolného náhodného jevu $A \subseteq \Omega$ je nutné stanovit pravděpodobnost $P(\{e_i\})$

pro každé $i = 1, 2, \dots, n$, zatímco $P(\mathrm{e}_i)$ neexistuje, protože existují pravděpodobnosti pouze podmnožin množiny Ω, nikoliv pravděpodobnosti jejich prvků.

- by nějaký z elementárních jevů nenastal je nemožné ($P(\emptyset) = 0$).
- některý z elementárních jevů nastane je jisté ($P(\Omega) = 1$).
- $P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\{\mathrm{e}_{i_j}\})$, je-li $A = \{\mathrm{e}_{i_j} : \mathrm{e}_{i_j} \in \Omega, j = 1, 2, \dots, k\}$ (pravděpodobnost $P(A)$ umíme určit, pokud známe pravděpodobnost všech jednoprvkových podmnožin).
- množinový zápis $A \cap B$ zřejmě znamená *oba jevy A i B nastaly zároveň.*
- $A \cup B$ znamená *nastal alespoň jeden z jevů A, B.*
- $A \setminus B$ zřejmě znamená *jev A nastal, ale jev B nikoliv.*
- pravděpodobnost $P(A)$ libovolného náhodného jevu A bude pro nás vždy reálné číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a nebudeme pravděpodobnost uvádět v procentech.

Přejděme k řešení příkladů, které nám ozřejmí použití výše uvedené teorie.

Příklad 3.5. Házíme dvakrát spravedlivou šestistěnnou kostkou.

- Jaká je pravděpodobnost, že součet hozených hodnot bude větší než 9?
- Jaká je pravděpodobnost, že součet hozených hodnot bude menší než 5?
- Na co by jste si vsadili, že bude součet větší než 9 nebo že bude menší než 5?

Řešení. Nejdříve musíme určit, jak bude vypadat množina Ω a jak $A, B \subseteq \Omega$, které popisují naše náhodné jevy. Je asi přirozené stanovit, že $\Omega = [2, 12]$ (všechny možné hodnoty součtů) a $A = [10, 12]$, $B = [2, 4]$ (všechny hodnoty součtů s požadovanými vlastnostmi). Všimněte si, že v tuto chvíli nemáme k ruce žádný aparát, jak vypočítat pravděpodobnost jevů A, B.

Pokud bychom ovšem znali $P(\{10\}), P(\{11\}), P(\{12\})$ a $P(\{2\}), P(\{3\}), P(\{4\})$, pak jsme zachráněni, neboť víme, že $P(A) = P(\{10\}) + P(\{11\}) + P(\{12\})$ a $P(B) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\})$. Ovšem jak určit hodnoty výše zmíněných pravděpodobností? Pro tuto chvíli není jiné cesty, než-li je stanovit a jejich výpočet ukázat až poté, co ukousneme další část teorie.

Platí $P(\{2\}) = P(\{12\}) = \frac{1}{36}$, $P(\{3\}) = P(\{11\}) = \frac{1}{18}$ a $P(\{4\}) = P(\{10\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Proto $P(A) = P(B) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Je tedy lhostejné na který jev si vsadíme, neboť jejich pravděpodobnosti jsou stejné.

▲

Definice 3.6. Pravděpodobnost P na pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) je *uniformní* právě tehdy, když pravděpodobnost libovolného náhodného jevu $A \subseteq \Omega$ je

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Poznámka 3.7. Není těžké odvodit, že v pravděpodobnostním prostoru s uniformní pravděpodobností platí

$$P(\{\mathrm{e}\}) = \frac{1}{|\Omega|},$$

kde e je libovolný elementární náhodný jev z nosiče pravděpodobnostního prostoru. Zjistíme-li, že při řešení nějakého příkladu zkonstruujeme Ω tak, že pravděpodobnosti elementárních jevů nejsou totožné, pak nesmíme k výpočtu pravděpodobnosti použít vzorec z definice 3.6.

Číslu $|A|$ často říkáme *počet příznivých možností* a číslu $|\Omega|$ *počet všech možností*. Často budeme *náhodnému jevu* říkat pouze *jev*.

Vraťme se k příkladu 3.5. Vidíme, že Ω je tak nešikovně (i když přirozeně) vytvořeno, že pravděpodobnosti jednotlivých náhodných elementárních jevů nejsou stejné (např. $P(\{2\}) \neq P(\{3\})$). Zkusme nahlédnout příklad 3.5 z jiného zorného úhlu.

Příklad 3.8. Použijme zadání příkladu 3.5.

Řešení. Protože házíme dvakrát kostkou, popišme každý elementární náhodný jev jako uspořádanou dvojici čísel z množiny $[1,6]$, $\Omega = \{(x,y) : x,y \in [1,6]\}$. V tuto chvíli je pravděpodobnost každého elementárního náhodného jevu stejná, a to $\frac{1}{36}$, neboť $|\Omega| = 36$. Pracujeme s pravděpodobnostním prostorem s uniformní pravděpodobností, proto můžeme použít vzorec z definice 3.6. Nechť $A = \{(x,y) : x+y = 10 \vee x+y = 11 \vee x+y = 12\} = \{(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$ a $B = \{(x,y) : x+y = 2 \vee x+y = 3 \vee x+y = 4\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,2)\}$. Protože $|A| = |B| = 6$, tak $P(A) = P(B) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

▲

Poznámka 3.9. Pokud bychom k příkladu 3.5 vytvořili Ω následovně, $\Omega = \{\{x,y\} : x,y \in [1,6]\}$ (neuspořádané dvojice, nerozlišujeme pořadí hodů), pak dostaneme opět neuniformní pravděpodobnost, neboť například dvojice $\{2,1\}$ má dvojnásobnou pravděpodobnost oproti dvojici $\{2,2\}$, nemluvě o tom, že $\{2,2\}$ není množina a museli bychom zavést pojem multimnožiny (viz Kapitola 1).

Při řešení příkladů musíme znát pravděpodobnosti elementárních náhodných jevů, nebo je musíme umět odvodit. Nejvýhodnější je, zkonstruovat k příkladu pravděpodobnostní prostor s uniformní pravděpodobností!

Definice 3.10. Náhodný jev *doplňkový nebo-li komplementární* k náhodnému jevu A značíme $\overline{A}$ a platí $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Věta 3.11. *Pro každý doplňkový jev $\overline{A}$ náhodného jevu A platí $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.*

Důkaz. Platí $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A) = A \cup \overline{A}$, přičemž A a $\overline{A}$ jsou disjunktní množiny. Proto $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$, kde $P(\Omega) = 1$, a z toho $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

□

Poznámka 3.12. *Podmíněnou pravděpodobnost jevu* A jevem B budeme značit $P(A|B)$ a je to pravděpodobnost jevu A, pokud víme, že nastal jev B.

Věta 3.13. *Podmíněnou pravděpodobnost $P(A|B)$ vypočítáme ze vzorce*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Z předešlé věty plyne, že pokud chceme zjistit pravděpodobnost průniku jevů A, B, pak stačí vynásobit pravděpodobnost jevu B podmíněnou pravděpodobností jevu A jevem B, tedy $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$. Pak ovšem také platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Pro zájemce:

Uvažujme nyní tři náhodné jevy A_1, A_2, A_3. Pak podle věty 3.13 musí platit $P(A_3 \cap A_2 \cap A_1) = P(A_3 \cap (A_2 \cap A_1)) = P(A_2 \cap A_1) \cdot P(A_3 | (A_2 \cap A_1)) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_2 \cap A_1))$.

Populárně řečeno, pokud budeme chtít vypočítat pravděpodobnost průniku více náhodných jevů, pak pravděpodobnost prvního jevu postupně násobíme pravděpodobnostmi jevů následujících, které jsou vždy podmíněny průnikem všech jevů předchozích. Pozorování shrneme do následující věty.

Věta 3.14. (Pravidlo součinu) *Nechť $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou libovolné náhodné jevy. Pak platí*

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^{n} P\Big(A_i \Big| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\Big).$$

Důkaz. Provedeme jej matematickou indukcí na n. S touto důkazovou technikou jsme se již setkali v Kapitole 1 a víme, že danou větu musíme nejdříve dokázat pro nejmenší uvažované n, což je v našem případě $n = 2$, a pak pro $n+1$ předpokládáme-li, že platí pro nějaké $n \geqq 2$.

Z věty 3.13 víme, že $P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}$. Odtud $P(A_2 \cap A_1) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = P(A_1 \cap A_2)$, neboť průnik množin je komutativní. Prokázali jsme platnost naší věty pro $n = 2$.

$P(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i) = P(A_{n+1} \cap (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)) = P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cdot P(A_{n+1} | \bigcap_{k=1}^{n} A_k)$ (Sčítací index i jsme v druhém činiteli přeznačili na k). Z předpokladu ovšem víme, že $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \prod_{i=2}^{n} P(A_i | \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k)$.

Proto

$$P(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i) = P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^{n} P(A_i | \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k) \cdot P(A_{n+1} | \bigcap_{k=1}^{n} A_k).$$

Poslední rovnost si rozepíšeme $P(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k) \cdot$ $\cdot P(A_{n+1}|\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^{n+1} P(A_i|\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k)$, čímž je důkaz ukončen.

$\square$

Příklad 3.15. Vracíme se k příkladu 3.2. Máme náhodně zamíchaný balíček 32 karet (hodnoty karet jsou $7, 8, 9, 10, J, Q, K, A$, každá ve čtyřech barvách $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit$). Jaká je pravděpodobnost, že první čtyři karty jsou esa?

Řešení. Víme, že prvky množiny Ω budou všechna možná zamíchání oněch 32 karet, tedy $|\Omega| = 32!$. Předpokládáme, že každá dvě různá zamíchání jsou stejně pravděpodobná a $P(\{e\}) = 1/32!$ pro každé $e \in \Omega$. Máme tedy opět pravděpodobnostní prostor s uniformní pravděpodobností.

V množině $A \subseteq \Omega$ budou všechna zamíchání, která mají na prvních čtyřech pozicích esa. Na prvních čtyřech pozicích jsou tedy esa ve 4! různých uspořádáních a na zbývajících 28 pozicích jsou ostatní karty ve 28! různých uspořádáních. Proto $|A| = 4! \cdot 28!$. A dostáváme $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4! \cdot 28!}{32!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{1}{31 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 4} = \frac{1}{35960}$.

Jiné řešení. Zde využijeme pojmu *podmíněná pravděpodobnost.* Nechť náhodný jev A_i pro $i = 1, 2, 3, 4$ je *i-tá karta v náhodně zamíchaném balíčku karet je nějaké eso.* Vidíme, že náhodný jev A je vlastně průnik $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$. Proto $P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Přičemž $P(A_1)$ je pravděpodobnost, že první karta je nějaké eso, $P(A_2|A_1)$ je pravděpodobnost, že druhá karta je eso, pokud víme, že první karta je eso, $P(A_3|A_1 \cap A_2)$ je pravděpodobnost, že třetí karta je eso, pokud víme, že první dvě karty jsou esa, $P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ je pravděpodobnost, že čtvrtá karta je eso, pokud víme, že první tři karty jsou esa. Jestliže si takto jednotlivé podmíněné pravděpodobnosti pojmenujeme, snadno zjistíme jejich hodnotu. Víme, že $P(A_1) = \frac{4}{32}$ (4 z 32), $P(A_2|A_1) = \frac{3}{31}$ (3 z 31), $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{30}$ (2 ze 30) a $P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{29}$ (1 z 29).

Z věty 3.14 (pravidlo součinu) plyne $P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot$ $\cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{1}{35960}$.

Vidíte, že podrobný rozbor použití podmíněných pravděpodobností je poměrně pracný. Proto budeme v dalších příkladech již výrazně stručnější a ponecháme detailnější rozvahu na čtenáři.

Jiné řešení. Na úvod si stačí uvědomit, že náhodný jev *První čtyři karty v náhodně zamíchaném balíčku jsou esa* je stejně pravděpodobný jako náhodný jev *Vybrané čtyři karty z náhodně zamíchaného balíčku jsou esa.* Proto bude nyní Ω obsahovat všechny možné výběry čtyř karet z 32. Všimněte si, že na rozdíl od prvního řešení používáme NEUSPOŘÁDANÉ čtveřice! Pak je ovšem $|\Omega| = \binom{32}{4}$, přičemž pravděpodobnost každého výběru čtyř karet je $\frac{1}{\binom{32}{4}}$ (uniformní pravděpodobnost). Snadno nahlédneme, že $|A| = 1$, neboť jediná čtveřice splňuje naše požadavky. Proto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{\binom{32}{4}} = \frac{1}{35960}$.

▲

Příklad 3.16. Mějme osudí ve kterém je 5 černých a 3 bílé kuličky. Kuličky z osudí taháme po jedné a nevracíme je.

- Jaká je pravděpodobnost, že po třetím tahu budou vytaženy tři kuličky ve stejné barvě?
- Jaká je pravděpodobnost, že až po čtvrtém tahu budou vytaženy tři kuličky ve stejné barvě?

Řešení. K první části příkladu zkonstruujme množinu Ω tak, že $\Omega = \{(x, y, z) : x, y, z \in [0, 1]\}$, přičemž 0 symbolizuje bílou kuličku a 1 černou kuličku. Takže například posloupnost $(0, 1, 0)$ říká, že jako první jsme vytáhli bílou, jako druhou černou a jako třetí bílou kuličku. Už víme, že všech takových posloupností je $2^3 = 8$, proto $|\Omega| = 8$. V množině A, která popisuje jev *po třetím tahu budou vytaženy tři kuličky ve stejné barvě*, budou pouze dvě posloupnosti, a to $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$, proto $|A| = 2$. Proto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Bohužel opět fatální chyba! Vždyť posloupnosti, nebo-li elementární náhodné jevy $(0, 1, 0)$ a $(1, 0, 1)$ jistě nebudou mít stejnou pravděpodobnost, neboť tažení černé kuličky (1) je pravděpodobnější než tažení bílé kuličky (0).

Zkonstruovat nějak přirozeně pravděpodobnostní prostor s uniformní pravděpodobností k této úloze prostě neumíme. (Šlo by to provést pouze uměle, což si ukážeme později.) Proto bude dobré k řešení použít podmíněnou pravděpodobnost.

Rozdělíme si úlohu do dvou disjunktních náhodných jevů X a Y, přičemž X je jev *po třetím tahu jsou vytaženy tři černé kuličky* a Y je jev *po třetím tahu jsou vytaženy tři bílé kuličky*. Určitě platí $P(A) = P(X) + P(Y)$, kde A je jev *po třetím tahu jsou vytaženy tři kuličky ve stejné barvě* a $A = X \cup Y$.

Vypočítejme $P(X)$ s využitím pravidla součinu. Pravděpodobnost, že jako první táhneme černou kuličku je $\frac{5}{8}$, že jako druhou táhneme černou, pokud jako první byla tažena černá, je $\frac{4}{7}$, a že jako třetí táhneme černou, pokud první dvě byly černé, je $\frac{3}{6}$. Pak ovšem podle pravidla součinu 3.14 dostáváme $P(X) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$.

Nyní se vrhneme na $P(Y)$. Pravděpodobnost, že jako první táhneme bílou kuličku je $\frac{3}{8}$, že jako druhou táhneme bílou, pokud jako první byla tažena bílá, je $\frac{2}{7}$, a že jako třetí táhneme bílou, pokud první dvě byly bílé, je $\frac{1}{6}$. Proto $P(Y) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$.

A dostáváme konečný výsledek $P(A) = P(X) + P(Y) = \frac{5}{28} + \frac{1}{56} = \frac{10+1}{56} = \frac{11}{56}$.

Jiný způsob. Poněkud uměle vytvoříme pravděpodobnostní prostor tak, že Ω je množina všech posloupností s osmi prvky, přičemž pět prvků jsou nuly a tři jsou jedničky, tudíž například $(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0) \in \Omega$. Vidíme, že $|\Omega| = P^*(5, 3) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$. V Ω má každá posloupnost (elementární náhodný jev) pravděpodobnost $\frac{1}{56}$, tzn. Ω má uniformní pravděpodobnost.

Množina A bude obsahovat všechny posloupnosti, které mají na prvních třech pozicích, buď tři nuly nebo tři jedničky. V posloupnostech, které mají na prvních třech pozicích nuly, permutují na zbylých pěti pozicích tři jedničky a dvě nuly, proto jich je $P^*(3,2) = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$. Zatímco posloupnost, která má na prvních třech pozicích samé jedničky je jediná. Proto $|A| = 11$.

Odtud $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{11}{56}$.

Pro čtyři tahy opět množinu B, která reprezentuje jev *až ve čtvrtém tahu jsou vytaženy tři kuličky ve stejné barvě* rozdělíme do dvou disjunktních množin W a Z, přičemž W reprezentuje jev *až ve čtvrtém tahu jsou vytaženy tři černé kuličky* a Z reprezentuje jev *až ve čtvrtém tahu jsou vytaženy tři bílé kuličky.* Určitě platí $P(B) = P(W) + P(Z)$ a $B = W \cup Z$.

Spočítejme $P(W)$. Musíme uvažovat tři disjunktní případy bílá-černá-černá-černá s pravděpodobností $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}$, černá-bílá-černá-černá s pravděpodobností $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}$ a černá-černá-bílá-černá s pravděpodobností $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}$. Odtud $P(X) = 3 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{28}$.

Nyní se věnujme $P(Z)$. Musíme uvažovat tři disjunktní případy černá-bílá-bílá-bílá s pravděpodobností $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}$, bílá-černá-bílá-bílá s pravděpodobností $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}$ a bílá-bílá-černá-bílá s pravděpodobností $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5}$ Odtud $P(Y) = 3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{56}$.

A dostáváme $P(B) = P(W) + P(Z) = \frac{9}{28} + \frac{3}{56} = \frac{18+3}{56} = \frac{21}{56}$.

▲

3.2 Závislé a nezávislé náhodné jevy

Definice 3.17. Náhodný jev A je *nezávislý* na náhodném jevu B právě tehdy, když podmíněná pravděpodobnost jevu A jevem B je rovna pravděpodobnosti jevu A ($P(A|B) = P(A)$). Pokud A není nezávislý na B, pak je A na B *závislý.*

Věta 3.18. *Náhodný jev A je nezávislý na náhodném jevu B právě tehdy, když $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.*

Důkaz. Plyne přímo z 3.13 a 3.17.

□

Věta 3.19. *Náhodný jev A je nezávislý na náhodném jevu B právě tehdy, když B je nezávislý na A.*

Důkaz. O důkazových technikách budeme podrobně hovořit v Kapitole 4, proto nyní pouze stručně. Chceme-li dokázat ekvivalenci $X \Leftrightarrow Y$, pak musíme dokázat, že současně platí implikace $X \Rightarrow Y$ a $Y \Rightarrow X$, kde X, Y jsou nějaké výroky.

Implikace $X \Rightarrow Y$ zní v našem případě takto: Je-li A nezávislý na B, pak B je nezávislý na A.

Důkaz implikace $X \Rightarrow Y$. Nechť A je nezávislý na B, pak $P(A|B) = P(A)$ a víme, že $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$. Dosaďme do rovnosti místo podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B)$ pravděpodobnost $P(A)$. Potom dostáváme $P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A)$, z čehož plyne $P(B) = P(B|A)$. Pak je ovšem dle 3.17 B nezávislý na A.

Implikace $Y \Rightarrow X$ by byla dokazována obdobně, a proto je důkaz ponechán čtenáři.

□

Pro zájemce:

Z výše uvedeného plyne zobecnění věty 3.17.

Věta 3.20. (Pravidlo součinu pro nezávislé jevy) *Náhodné jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou po dvojicích nezávislé právě tehdy, když*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Příklad 3.21. Házíme spravedlivou šestistěnnou kostkou, přičemž jev A je *padlo číslo větší než 2* a jev B *padlo číslo liché*. Jsou jevy A a B závislé?

Řešení. K ověřování závislosti a nezávislosti náhodných jevů používáme vztah z věty 3.18. Pro výpočet pravděpodobností $P(A), P(B), P(A \cap B)$ užijeme pravděpodobnostní prostor s uniformní pravděpodobností, kde $\Omega = [1, 6]$, $A = [3, 6]$, $B = \{1, 3, 5\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$. Proto $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ a $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Neboť $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = P(A \cap B)$, musí být jevy A a B nezávislé. Odpověď tudíž zní, ne nejsou závislé.

▲

Příklad 3.22. Házíme třikrát spravedlivou šestistěnnou kostkou, přičemž jev A je *ve všech hodech padlo číslo větší než 2* a jev B *ve všech hodech padlo číslo liché*. Jsou jevy A a B závislé?

Řešení. K výpočtu pravděpodobností $P(A), P(B), P(A \cap B)$ můžeme použít pravidlo součinu z věty 3.20, stačí si jen uvědomit, že pokud v některém hodu padlo číslo větší než dva, pak to nijak neovlivní pravděpodobnost, že v jiném hodu padne také číslo větší než 2. Tedy jevy *v prvním hodu padlo číslo větší než dva*, *ve druhém hodu* *padlo číslo větší než dva* a *ve třetím hodu padlo číslo větší než dva* jsou po dvojicích nezávislé. Všimněte si, zde jsme porušili úmluvu, že ke zjišťování závislosti a nezávislosti jevů budeme používat vztah $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Ano je to tak, ale zde jsme si to mohli dovolit, neboť výše uvedené pozorování je zřejmé. V případech méně zřejmých budeme vždy užívat uvedený vztah!

Obdobný závěr platí i pro jevy *v prvním hodu padne číslo liché*, *ve druhém hodu padne číslo liché*, *ve třetím hodu padlo číslo liché* nebo pro jevy *v prvním hodu padlo liché číslo větší než dva*, *ve druhém hodu padlo liché číslo větší než dva*, *ve třetím hodu padlo liché číslo větší než dva.*

Proto $P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$, $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ a $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$. Odkud dostáváme $P(A \cap B) = \frac{1}{27} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B)$, a tudíž jsou A a B jevy nezávislé, tzn. pokud nastane jev B, pak neovlivní pravděpodobnost jevu A a naopak.

▲

Příklad 3.23. Máme náhodně zamíchaný balíček 32 karet, přičemž jev A bude “třetí karta v balíčku je král srdcový" a jev B “pátá karta v balíčku je sedmička křížová". Jsou jevy A a B závislé?

Řešení. Pravděpodobnosti $P(A), P(B), P(A \cap B)$ vypočítáme dvěma různými způsoby.

1. způsob. Použijeme pravidlo o součinu podmíněných pravděpodobností. $P(A) = \frac{31}{32} \cdot \frac{30}{31} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{32}$, kde $\frac{31}{32}$ je pravděpodobnost, že první karta není král srdcový, $\frac{30}{31}$ je pravděpodobnost, že druhá karta není král srdcový s tím, že víme, že první karta není král srdcový a $\frac{1}{30}$ je pravděpodobnost, že třetí karta je král srdcový s tím, že víme, že ani první ani druhá karta není král srdcový. Obdobně $P(B) = \frac{31}{32} \cdot \frac{30}{31} \cdot \frac{29}{30} \cdot \frac{28}{29} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{32}$ a $P(A \cap B) = \frac{30}{32} \cdot \frac{29}{31} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{28}{29} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{31 \cdot 32}$.

2. způsob. Nechť Ω je množina všech možných zamíchání, přičemž každé z nich je stejně pravděpodobné, a to s pravděpodobností $\frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{32!}$. Dodejme, že technikou míchání můžeme ovlivnit pravděpodobnost jednotlivých zamíchání (zvláště míchací strojky v kasínech mohou býti velmi „nespravedlivé“), avšak zde uvažujeme zcela korektní situaci. Zamíchání, kde třetí karta je král srdcový je 31!, kde pátá karta je sedmička křížová opět 31!, proto $|A| = |B| = 31!$. Zamíchání, kde třetí karta je král srdcový a pátá karta sedmička křížová je 30!, proto $|A \cap B| = 30!$. Odtud dostáváme $P(A) = P(B) = \frac{31!}{32!} = \frac{1}{32}$ a $P(A \cap B) = \frac{30!}{32!} = \frac{1}{31 \cdot 32}$.

V obou případech nám vyšli tytéž výsledky, které říkají $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, a proto jsou jevy A a B závislé, tzn. pokud nastane jev B, pak ovlivní pravděpodobnost jevu A a naopak.

▲

Příklad 3.24. Mějme osudí ve kterém je 5 černých a 3 bílé kuličky. Kuličky z osudí taháme po jedné a nevracíme je zpět. Nechť jev A znamená *po prvních třech tazích máme vytažené alespoň dvě černé kuličky* a B znamená *po prvních dvou tazích máme vytaženou alespoň jednu bílou kuličku.* Jsou jevy A a B nezávislé?

Řešení. Opět použijeme k výpočtu pravděpodobností $P(A), P(B), P(A \cap B)$ pravidlo o součinu podmíněných pravděpodobností. Označme A_1 jev *po prvních třech tazích máme přesně dvě černé kuličky* a A_2 jev *po prvních třech tazích máme přesně tři černé kuličky.* Potom $P(A) = P(A_1 \cup A_2)$ a protože jsou A_1, A_2 disjunktní, tak $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

Ale $P(A_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{15}{28}$, přičemž $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$ je pravděpodobnost situace černá, černá, bílá, $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6}$ je pravděpodobnost situace černá, bílá, černá a $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6}$ je pravděpodobnost situace bílá, černá, černá. $P(A_2)$ je samozřejmě $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$. Proto $P(A) = \frac{15}{28} + \frac{5}{28} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$.

Podobně, předpokládejme, že B_1 znamená *po prvních dvou tazích máme přesně jednu bílou kuličku*, B_2 znamená *po prvních dvou tazích máme přesně dvě bílé kuličky.* Proto $P(B) = P(B_1) + P(B_2)$, přičemž $P(B_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7} = \frac{15}{28}$ a $P(B_2) = = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$. Proto $P(B) = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$.

Zbývá ještě spočítat $P(A \cap B)$. Průniku obou jevů odpovídají pouze dvě situace, a to bílá,černá,černá nebo černá, bílá, černá. Proto $P(A \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{14}$.

Pak ovšem dostáváme $P(A)P(B) = \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{14} \neq \frac{5}{14} = P(A \cap B)$. A, B jsou tedy závislé, tzn. pokud nastane jev B, pak ovlivní pravděpodobnost jevu A a naopak.

▲

3.3 Náhodná proměnná a střední hodnota náhodné proměnné

Pokud můžeme každý elementární náhodný jev vyjádřit reálným číslem, pak budeme každému takovému elementárnímu náhodnému jevu popsanému reálným číslem, říkat *hodnota náhodné proměnné.* Nechť $h_1, h_2, \ldots, h_n$ jsou hodnoty náhodné proměnné, pak proměnnou $X \in \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ budeme nazývat *náhodnou proměnnou* či *náhodnou veličinou.*

Čili, pokud budeme házet jakoukoliv k-stěnnou kostkou a budeme sledovat hozené hodnoty, pak jde o náhodnou proměnnou, neboť každý elementární náhodný jev je nějaké číslo z množiny $[1, k]$. Budeme-li házet n krát k-stěnnou kostkou a bude nás zajímat buď součet nebo součin nebo aritmetický či geometrický průměr hozených hodnot, pak jde opět o náhodnou proměnnou. Zatímco, budeme-li házet n krát k-stěnnou kostkou a budeme sledovat dosažené hodnoty v jednotlivých hodech, pak o náhodnou proměnnou nejde, neboť každý elementární jev je uspořádaná či neuspořádaná n-tice čísel z množiny $[1, k]$, ale to už není reálné číslo.

Zkuste sami najít příklady pravděpodobnostních úloh, kde buď lze nebo nelze nahradit náhodné elementární jevy náhodnou proměnnou.

Poznámka 3.25. Ano máte pravdu, ono to jde vlastně vždy, ale pak (uměle) přiřazené reálné číslo k elementárnímu náhodnému jevu často nemá žádnou výpovědní hodnotu. Dejme si příklad, ke každému zamíchání balíčku 32 karet přiřadíme nějaké číslo z množiny $[1, 32!]$, ale co takto zvolené číslo bude říkat o tom kterém konkrétním zamíchání? Odpověď zní, vůbec nic. Takže v těchto případech nenahrazujeme elementární náhodné jevy hodnotami náhodné proměnné.

Definice 3.26. Nechť $X \in \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ je náhodná proměnná a $h_i \in \mathbb{R}$ pro každé $i \in [1, k]$. Potom EX je *střední hodnota náhodné proměnné* X a $EX = \sum_{i=1}^{k} p_i h_i$, kde p_i je pravděpodobnost hodnoty náhodné proměnné h_i.

Poznámka 3.27. Všimněme si, že je-li $p_i = 1/k$ je střední hodnota vlastně *aritmetickým průměrem* náhodných proměnných. Střední hodnota tedy umí, na rozdíl od aritmetického průměru, zohlednit i různé pravděpodobnosti jednotlivých hodnot náhodné proměnné, a proto jí také říkáme *vážený průměr*. Označení střední hodnoty EX vychází z anglického *expected value*, tedy *očekávaná hodnota*. Proč „očekávaná“ vynikne při řešení konkrétních příkladů.

Příklad 3.28. V šuplíku je rozházených 8 párů ponožek (16 kusů, nerozlišujeme levou a pravou) a víme, že dva páry jsou v modré, dva ve žluté, dva v hnědé a dva v šedé barvě. Podivín Murphy je hluboce zamyšlen a vytahuje náhodně ponožky kus po kusu. Jaký je průměrný počet tahů, pokud víme, že Murphy skončí až bude mít vytaženy přesně dvě ponožky ve stejné barvě.

Řešení. Za prvé, pokud uvidíte v rámci DIM příklad, který se ptá na průměr, pak vězte, že máte vypočítat střední hodnotu nějaké náhodné proměnné.

V našem případě je náhodnou proměnnou X počet tahů, které musí Murphy vykonat, aby dosáhl kýženého výsledku. Je nám asi jasné, že musí provést alespoň dva tahy. Dále, po pěti tazích jistě dosáhne onoho výsledku, neboť pokud se pokouší po páté, pak v předešlých čtyřech tazích vytáhl ponožky ve čtyřech (tedy všech) různých barvách a pátá ponožka se svou barvou musí shodovat s některou předešlou. Proto $X \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Označme nyní p_2 pravděpodobnost, že vytáhl dvě ponožky ve stejné barvě již ve druhém tahu, p_3 pravděpodobnost, že vytáhl dvě ponožky ve stejné barvě až ve třetím tahu, p_4 pravděpodobnost, že vytáhl dvě ponožky ve stejné barvě až ve čtvrtém tahu, p_5 pravděpodobnost, že vytáhl dvě ponožky ve stejné barvě až v pátém tahu.

Pravděpodobnosti $p_i, i = 2, 3, 4, 5$ budeme počítat pomocí součinu podmíněných pravděpodobností.

Murphy vytáhne vždy v prvním tahu nějakou ponožku, pak pravděpodobnost, že ve druhém tahu vytáhne ponožku téže barvy, je $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. Proto $p_2 = \frac{1}{5}$.

Pravděpodobnost, že ve druhém tahu získá ponožku v jiné barvě než v tahu prvním, je $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ a pravděpodobnost, že ve třetím tahu vytáhne ponožku v jedné z barev jako byly dvě ponožky předešlé, je $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$. Proto $p_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{5 \cdot 7}$

Pravděpodobnost, že ve druhém tahu vytáhne ponožku v jiné barvě než v tahu prvním, je $\frac{12}{15} = 4/5$, pravděpodobnost, že ve třetím tahu získá ponožku v jiné barvě než ve dvou předešlých tazích, je $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ a pravděpodobnost, že ve čtvrtém tahu vytáhne ponožku ve stejné barvě jako byla některá z ponožek předešlých je 9/13. Proto $p_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{9}{13} = \frac{144}{5 \cdot 7 \cdot 13}$.

Všimněme si, že jevy *vytáhl dvě ponožky ve stejné barvě ve druhém tahu*, *vytáhl dvě ponožky ve stejné barvě až ve třetím tahu*, *vytáhl dvě ponožky ve stejné barvě až ve čtvrtém tahu* jsou disjunktní. Dále, jev *vytáhl dvě ponožky ve stejné barvě až v pátém tahu* je doplňkový ke sjednocení tří předešlých jevů. Proto $p_5 = 1 - (p_2 + p_3 + p_4) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{9}{13} = 1 - \frac{7 \cdot 13 + 4 \cdot 3 \cdot 13 + 4 \cdot 4 \cdot 9}{5 \cdot 7 \cdot 13} = 1 - \frac{391}{5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{455 - 391}{5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{64}{5 \cdot 7 \cdot 13}$.

Ověřme ještě (abychom se procvičili) výpočet pravděpodobnosti p_5 jinou metodou. Použijeme tu, která nám dobře posloužila při výpočtu p_2, p_3 a p_4. Uvažujeme tedy, že v prvních čtyřech tazích získal 4 ponožky v různých barvách. Proto $p_5 = \frac{12}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{64}{5 \cdot 7 \cdot 13}$.

Nyní už můžeme směle přikročit k výpočtu střední hodnoty EX, $EX = p_2 \cdot 2 + p_3 \cdot 3 + p_4 \cdot 4 + p_5 \cdot 5 = \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{12}{5 \cdot 7} \cdot 3 + \frac{144}{5 \cdot 7 \cdot 13} \cdot 4 + \frac{64}{5 \cdot 7 \cdot 13} \cdot 5 = \frac{182 + 468 + 576 + 320}{5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{1546}{455} \doteq 3{,}3978$.

Porovnejme střední hodnotu s aritmetickým průměrem náhodné proměnné, který je $\frac{2+3+4+5}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$. Vidíme, že odlišnost je malá, což je ovšem způsobeno poměrně „rovnoměrným“ rozložením pravděpodobností, čímž míníme, že $p_2 + p_3 = \frac{1}{5} + \frac{12}{5 \cdot 7} = \frac{7}{5 \cdot 7} + \frac{12}{5 \cdot 7} = \frac{19}{35}$, což je jen o malinko víc než 1/2, a proto $p_4 + p_5$ musí být o malinko méně než 1/2. Střední hodnota se „posunula“ k nižším hodnotám, neboť jsou více pravděpodobné.

Pokud bychom opakovali pokus s vytahováním ponožek mnohokrát (třeba 1000 krát), zjistili bychom, že zhruba polovina pokusů dopadla tak, že jsme stejnobarevný pár vytáhli po třech nebo čtyřech tazích. Tedy hodnoty náhodné proměnné blízké střední hodnotě jsou výrazně pravděpodobnější než hodnoty náhodné proměnné, které jsou vzdálenější. Odtud název očekávaná hodnota. Více se o tomto jevu dozvíte v předmětu STATISTIKA.

▲

Věta 3.29. *Nechť jsou X a Y nějaké dvě náhodné proměnné. Potom $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, tedy střední hodnota součtu náhodných proměnných je součtem středních hodnot těchto náhodných proměnných.*

Věta 3.30. *Nechť jsou X a Y dvě nezávislé náhodné proměnné. Potom $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, tedy střední hodnota součinu náhodných proměnných je součinem středních hodnot těchto náhodných proměnných.*

Příklad 3.31. Určete střední hodnotu součtu a součinu dosažených hodnot, pokud házíte dvakrát spravedlivou šestistěnnou kostkou.

Řešení. Počítali-li bychom střední hodnoty součtu a součinu přímo z definice střední hodnoty, pak bychom se docela zapotili, neboť určit pravděpodobnosti jednotlivých možných součtů a součinů by bylo docela pracné. My však máme k ruce věty 3.29

a 3.3. Nechť X je náhodná proměnná, která určuje hodnotu dosaženou v 1. hodu a Y je náhodná proměnná, která určuje hodnotu dosaženou ve 2. hodu. Chceme tedy zjistit $E(X+Y)$ a $E(X \cdot Y)$, přičemž ale víme, že X, Y jsou nezávislé náhodné proměnné a $E(X) = E(Y) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$ (aritmetický průměr). Proto $E(X+$ $+Y) = 3,5 + 3,5 = 7$ a $E(X \cdot Y) = 3,5 \cdot 3,5 = 12,25$.

▲

Příklad 3.32. V osudí je 10 míčků na nichž jsou natištěna čísla. Na pěti je číslo 7, na třech číslo 3 a na dvou číslo 1. Vždy náhodně vytáhneme dva míčky. Jaká je průměrná hodnota součtu čísel na tažených míčcích.

Řešení. Nechť je součet čísel na tažených míčcích náhodnou proměnnou X. Potom $X \in \{14, 10, 8, 6, 4, 2\}$. Spočítejme pravděpodobnosti p_i pro $i \in \{14, 10, 8, 6, 4, 2\}$. Představme si, že míčky taháme po jednom a využijme součinu podmíněných pravděpodobností. Tudíž $p_{14} = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$, $p_{10} = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$, $p_8 = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$, $p_6 = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$, $p_4 = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$ a $p_2 = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$. Z čehož plyne $EX = \frac{2}{9} \cdot 14 + \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{2}{9} \cdot 8 + \frac{1}{15} \cdot 6 + \frac{2}{15} \cdot 4 + \frac{1}{45} \cdot 2 = \frac{140+150+80+18+24+2}{45} = \frac{414}{45} = 9,2$.

Zkusme nyní tutéž střední hodnotu vypočítat s použitím 3.29. Nyní bude náhodná proměnná X číslo na prvním taženém míčku a náhodná proměnná Y číslo na druhém taženém míčku. Chceme tedy spočítat $E(X+Y)$ s tím, že není těžké určit $E(X)$ a $E(Y)$, protože $E(X) = E(Y) = \frac{5}{10} \cdot 7 + \frac{3}{10} \cdot 3 + \frac{2}{10} \cdot 1 = \frac{35+9+2}{10} = \frac{46}{10} = 4,6$. Proto $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 4,6 + 4,6 = 9,2$.

▲

Příklad 3.33. Varovný!

V osudí je 10 míčků na nichž jsou natištěna čísla. Na pěti je číslo 7, na třech číslo 3 a na dvou číslo 1. Vždy náhodně vytáhneme dva míčky. Jaká je průměrná hodnota součinu čísel na tažených míčcích.

Řešení. Nechť je součin čísel na tažených míčcích náhodnou proměnnou X. Potom $X \in \{49, 21, 9, 7, 3, 1\}$. Spočítejme pravděpodobnosti p_i pro $i \in \{49, 21, 9, 7, 3, 1\}$. Z příkladu 3.32 víme, že $p_{49} = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$, $p_{21} = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$, $p_7 = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$, $p_9 = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$, $p_3 = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$ a $p_1 = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$. Z čehož plyne $EX = \frac{2}{9} \cdot 49 + \frac{1}{3} \cdot 21 + \frac{2}{9} \cdot 7 + \frac{1}{15} \cdot 9 + \frac{2}{15} \cdot 3 + \frac{1}{45} \cdot 1 = \frac{485+315+70+24+18+1}{45} = \frac{913}{45} = 20,2\overline{8}$.

Zkusme nyní tutéž střední hodnotu vypočítat s použitím 3.3. Opět bude náhodná proměnná X číslo na prvním taženém míčku a náhodná proměnná Y číslo na druhém taženém míčku. Chceme tedy spočítat $E(X \cdot Y)$ s tím, že víme $E(X) = E(Y) =$ $= \frac{5}{10} \cdot 7 + \frac{3}{10} \cdot 3 + \frac{2}{10} \cdot 1 = 4,6$. Proto $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = 4,6 \cdot 4,6 = 21,16$.

Nyní se ovšem vypočítané střední hodnoty liší téměř o jedničku, musela se tudíž někde stát chyba! Ano, stala, náhodné proměnné X a Y jsou totiž závislé náhodné proměnné (číslo tažené na prvním míčku ovlivní pravděpodobnost čísla taženého na míčku druhém) a věta 3.3 platí pouze pro nezávislé náhodné proměnné. První výpočet je tudíž v pořádku, ale druhý ne!

Vypočítejme ještě aritmetický průměr možných součinů: $\frac{49+21+9+7+3+1}{6} = \frac{90}{6} =$ $= 15$. Výpočet splnil naše očekávání. Aritmetický průměr je výrazně menší než střední hodnota, neboť pravděpodobnost tažení vyšších hodnot je větší než-li pravděpodobnost tažení hodnot nižších.

▲

Σ Pojmy k zapamatování

— Pravděpodobnost náhodného jevu A je $\frac{|A|}{|\Omega|}$, má-li konečný pravděpodobnostní prostor (Ω, P) uniformní pravděpodobnost.

— Platí $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, jsou-li A, B náhodné jevy a $P(A|B)$ pravděpodobnost jevu A, pokud nastal jev B.

— Platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, pokud jsou jevy A, B nezávislé.

— Platí $EX = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot h_i$, kde EX je střední hodnota náhodné proměnné X, p_i je pravděpodobnost hodnoty h_i náhodné proměnné X, a platí $X \in \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$.

— Platí $E(X+Y) = EX + EY$, jsou-li X a Y nějaké náhodné proměnné.

— Platí $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$, jsou-li X, Y nezávislé náhodné proměnné.

! Příklady k procvičení

1. Máme zamíchaný balíček 32 karet. Jaká je pravděpodobnost, že třetí karta je desítka, pokud víme, že první dvě karty jsou sedm a deset?

2. Házíme třemi spravedlivými šestistěnnými kostkami. Je lepší si vsadit, že nepadne žádná šestka nebo, že padne alespoň jedna šestka?

3. Házíme čtyřikrát mincí. Jaká je pravděpodobnost, že padne dvakrát orel a dvakrát hlava (v libovolném pořadí)?

4. Máme zamíchaný balíček 32 karet. Hráč dostane pět karet, potom karty vrátí, balíček je znovu zamíchán a dostane znovu pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že měl v obou případech fullhouse, tzn. tři a dvě karty ve stejné hodnotě?

5. Máme zamíchaný balíček 32 karet. Hráč dostane pět karet, vidí, že dostal tři esa. Tyto tři esa si nechá a zbylé dvě karty vymění za nové. Jaká je pravděpodobnost, že má nyní královského pokera, tzn. 4 esa a krále?

6. Máme náhodnou posloupnost čtyř bitů (čtyřprvková nula-jedničková posloupnost). Jaká je pravděpodobnost, že obsahuje dvě jedničky a dvě nuly.

7. V balíčku je 8 karet, dvě od každé barvy. Balíček pečlivě zamícháme. S jakou pravděpodobností dostaneme takové rozmíchání, že žádné dvě karty ve stejné barvě nejsou vedle sebe?

8. Hodíme dvěma šestistěnnými kostkami, jedna je červená, druhá modrá. Náhodný jev

A je *na obou padne stejné číslo* a náhodný jev B je *na zelené kostce padne šestka*. Jsou jevy A, B nezávislé?

9. Házíme n-stěnnou kostkou, $n \in \mathbb{N}$ je sudé. Náhodný jev A je *padne číslo z množiny* $[1, \frac{n}{2}]$ a náhodný jev B je *padne liché číslo*. Pro která n jsou jevy A, B nezávislé?

10. Jaký je průměrný počet hozených šestek, házíme-li pěti šestistěnnými kostkami?

11. Při objednávání obědů u terminálu vedle jídelny jsme zjistili, že tři z pěti jídel už nejsou, leč nevíme které. Jaký je průměrný počet pokusů o objednávku, než zvolíme jídlo, které ještě je (Pokusy provádíme náhodně).

12. Jaká je střední hodnota počtu políček, o které se posune vaše figurka ve hře „Člověče nezlob se“, pokud se po třetí šestce za sebou už nehází?

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\frac{1}{10}$.

2. $\frac{125}{216} > \frac{91}{216}$. Vsadili bychom na žádnou šestku.

3. $\frac{3}{8}$.

4. $P(A) = \frac{8\cdot 7\cdot \binom{4}{3}\binom{4}{2}\cdot 5!\cdot 28!}{32!} = \frac{8\cdot 7\cdot 4\cdot 6\cdot 5!}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29} = \frac{168}{899}$.

5. $\frac{2}{203}$.

6. $\frac{3}{8}$.

7. $\frac{1}{35}$.

8. Jsou to jevy nezávislé.

9. Jevy A, B jsou nezávislé pouze pro n dělitelné čtyřmi.

10. $EX = \frac{1}{2^5}\cdot 0 + \frac{5}{2^5}\cdot 1 + \frac{10}{2^5}\cdot 2 + \frac{10}{2^5}\cdot 3 + \frac{5}{2^5}\cdot 4 + \frac{1}{2^5}\cdot 5 = \frac{5}{2} = 2,5$.

11. $EX = \frac{2}{5}\cdot 1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot 2 + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3 + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{10}{5} = 2$.

12. $EX = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5) + \frac{1}{6^2}(7+8+9+10+11) + \frac{1}{6^3}(13+14+15+16+17+$ $+18) = \frac{15}{6} + \frac{45}{6^2} + \frac{93}{6^3} = \frac{6^2\cdot 15+6\cdot 45+93}{6^3} = \frac{540+270+93}{6^3} = \frac{903}{216} \doteq 4,181$.

Kapitola 4

Důkazy v diskrétní matematice

Vážení čtenáři, na úvod této kapitoly si, prosím, zopakujte výrokovou logiku. Některé její výsledky budeme na tomto místě velmi často potřebovat. Připomeňme alespoň, že výrok je nějaké tvrzení, o kterém lze rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé, že každý výrok má pravdivostní hodnotu 0 (nepravda, false) nebo 1 (pravda, true), že používáme logické spojky $\wedge$ *konjunkce* (čteme *a*), $\vee$ *disjunkce* (čteme *nebo*), $\Rightarrow$ *implikace* (čteme *Jestliže…, pak…*), $\Leftrightarrow$ *ekvivalence* (čteme *…právě tehdy, když…*) a kvantifikátory $\forall$ (čteme *Pro každý…*), $\exists$ (čteme *Existuje alespoň jeden…*), $\exists!$ (čteme *Existuje právě jeden…*).

Pro exaktní vědy, jako matematika, teoretická informatika, teoretická fyzika, je typické, že pravdivost jakéhokoliv tvrzení musí být ověřena nade vší pochybnost, to znamená, že tvrzení v rámci teorie je platné navždy.

Důkaz pravdivosti tvrzení tudíž nelze provést pouze pomocí konečného počtu „pokusů“, byť sebesofistikovanějších, jak se to děje v jiných vědách.

Popišme si nejdříve, jak je každá exaktní teorie vystavěna. Na počátku musí stát tzv. *základní pojmy* a *axiómy*. Základní pojmy jsou definovány pouze intuitivně, jsme totiž na počátku teorie a přesnou definici není o co „opřít“, nicméně existuje obecná shoda, jak daným pojmům rozumět. Typickými příklady základních pojmů v matematice je „množina“, „bod“ a v teoretické fyzice „prostor“, „čas“. Axiómy jsou výroky, které se jako jediné v rámci teorie nedokazují (Opět, stojíme na počátku teorie, není zatím nic, pomocí čeho bychom tvrzení dokázali.), ovšem existuje obecná shoda, že platí.

Běžné *pojmy* pak přesně definujeme pomocí základních pojmů a pojmů, již předtím přesně definovaných. *Věty* a *lemmata* jsou výroky v rámci teorie, které jsou odvozeny (dokázány) z axiómů a předešle dokázaných vět či lemmat, k čemuž užíváme tzv. *odvozovací pravidla.* Odvozovací pravidla nám přináší další exaktní věda *formální logika* (Logiku můžeme chápat jako vědu o správném racionálním myšlení). Dodejme ještě, že Lemma je méně „důležitý“ či pomocný výrok. Lemma většinou používáme při dokazování nějaké Věty, abychom důkaz zpřehlednili.

Poznámka 4.1. Jediný požadavek, který klademe na systém axiómů v exaktních teoriích, je jejich *bezespornost.* Což znamená, že ze systému axiómů se nedá odvodit nějaký výrok a zároveň jeho negace. Občas bývá také požadována *minimalita* systému axiómů, tzn. nesmí být nějaký axióm odvoditelný z jiných axiómů téhož systému.

Možná si někteří z Vás, vážení čtenáři, říkají, že již v úvodu této kapitoly si protiřečíme. Neboť tvrdíme, že věta v exaktní teorii musí být dokázána jednou provždy a na druhé straně říkáme, že jediné ověření pravdivosti axiómů je, že panuje obecná shoda. Za pár let přece tato obecná shoda, platná v jistém údobí, nemusí existovat. Potom je ovšem porušena i platnost vět z nich odvozených.

Vyjasněme si to. Platnost výroků je zajištěna navždy pouze v rámci daného axiomatického systému! V rámci jedné teorie axiómy neměníme! Nelíbí-li se nám nějaká teorie se svým axiomatickým systémem, pak založíme jinou teorii s jiným axiomatickým systémem. Existují různé exaktní teorie, které si odporují, a přitom všechny pomáhají poznávat objektivní realitu. Dejme si příklad.

Geometrie, kterou všichni procházíme již od nástupu do školy, se jmenuje *Eukleidovská geometrie*. Jeden z axiómů Eukleidovské geometrie zní takto: *Mějme v rovině zadánu přímku p a bod A, který na ní neleží. Pak existuje jediná přímka q, která prochází bodem A a s přímkou p nemá žádný společný bod.*

Myslím, že v tuto chvíli si většina z nás říká, že to je a musí být pravda. K dané přímce daným bodem mimo přímku můžeme vést jedinou rovnoběžku a šmytec! Ano, ale naše představa se opírá o to, že přímka je jakási nekonečná úplně rovná čára a rovina je jakási nekonečná úplně rovná plocha.

Co kdybychom ale geometrii definovali v nějaké omezené rovině (třeba list papíru v sešitě) nebo na kulové ploše (*sféře*)? Kulovou plochu bychom chápali jako rovinu a přímky v rovině by byly kružnice na sféře. Představte si nyní, že zadaná přímka je rovník a na severní polokouli mimo severní pól zvolíme bod. Vidíme, že v tuto chvíli jsme schopni daným bodem, vést nekonečně mnoho přímek (kružnic), které s rovníkem nemají žádný společný bod.

Proto také existuje mnoho jiných geometrii, než-li Eukleidovská, například *sférická geometrie* v níž, mimo jiné, nacházíme trojúhelníky jejichž součet velikostí vnitřních úhlů může značně přesahovat 180°. Představte si, že kůru pomeranče na-říznete podél rovníku, nultého (stoosmdesátého) a devadesátého poledníku (libovolné zeměpisné délky). Pokud sloupnete jednu z osmi vytvořených částí kůry, pak držíte v ruce sférický trojúhelník, jehož každý vnitřní úhel je pravý.

Principy dokazování a roli Věty či Lemmatu v matematice si nejlépe objasníme na příkladu. Vážení čtenáři, nedejte se, prosím, zastrašit délkou řešení následujícího příkladu, budou v něm totiž objasněny téměř všechny běžné metody dokazování a uvažování v exaktních vědách. Tudíž během jednoho příkladu získáte poměrně celistvý přehled o této problematice.

Již na základní škole jsme se všichni dověděli, že *číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný třemi.* Nevím ale, zda je nám všem jasné, proč tomu tak je. Zkusme toto tvrzení přesně zformulovat a ukažme si, jak pracuje matematik při jeho dokazování.

Příklad 4.2. Dokažte, že celé číslo zapsané v desítkové soustavě je dělitelné třemi právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný třemi.

Řešení. Vidíte, že jsme formulaci zpřesnili dodatkem *číslo je zapsáno v desítkové soustavě*. Pokud by bylo zapsáno v jiné soustavě, věta nemusí platit. Dejme si příklad, číslo 9, zapsané v osmičkové soustavě má tvar 11 a jeho ciferný součet 2 dělitelný třemi není. Dále si musíme uvědomit a přesně definovat, co to znamená, že číslo a je *dělitelné* číslem b a v jaké číselné množině vlastně pracujeme. Dodejme, že se můžeme omezit na celá nezáporná čísla, neboť pokud věta platí pro nezáporná celá čísla, pak musí platit i pro čísla záporná.

Uvažovali-li bychom v $\mathbb{Q}$ nebo $\mathbb{R}$ tak naše věta postrádá smysl, neboť v těchto množinách je každé číslo dělitelné každým. Upřesněme tedy, že pracujeme v $\mathbb{N}_0$ a pro každé $a, b \in \mathbb{N}_0, a \geqq b$, platí, že a je dělitelné b právě tehdy, když existuje $x \in \mathbb{N}_0$ tak, že $a = b \cdot x$ (což je ekvivalentní s $a : b = x$ pro $b \neq 0$).

Zaveďme při této příležitosti ještě další vztah mezi dvěma celými čísly, který úzce souvisí s dělitelností. Číslo b *dělí* číslo a právě tehdy, když a je dělitelné b. Že b *dělí* a zapisujeme $b \mid a$. Jinými slovy, $b \mid a$ právě tehdy, když existuje celé nezáporné číslo x tak, že $a = b \cdot x$. A ještě jinak, $b \mid a$ právě tehdy, když dělení $a : b$ vyjde v množině celých čísel beze zbytku.

Že číslo b *nedělí* číslo a budeme značit $b \nmid a$ a $b \nmid a$, $a, b \in \mathbb{N}_0$, právě tehdy, když existuje celé nezáporné x tak, že $a = b \cdot x + z$, kde $z \in [1, b - 1]$ (tzn. $a : b$ dává nenulový zbytek v $\mathbb{N}_0$).

Na počátku důkazu je nutné přesnými, jednoznačnými definicemi zabránit nedorozuměním.

Poznámka 4.3. V matematické teorii mají veškeré axiómy, věty a lemmata tvar implikace nebo ekvivalence. Formálně zapsáno, mají věty a lemmata tvar $P \Rightarrow D$ nebo $P \Leftrightarrow D$, kde P, D jsou nějaké výroky. Dále víme, že výrok $P \Leftrightarrow D$ je ekvivalentní (říká totéž) s výrokem $P \Rightarrow D \wedge D \Rightarrow P$. Pokud tedy chceme dokazovat věty nebo lemmata, stačí umět dokazovat implikaci, neboť dokázat ekvivalenci znamená, dokázat současnou platnost dvou implikací.

Definice 4.4. Vezměme si implikaci $P \Rightarrow D$. Výroku P říkáme *předpoklad* nebo-li *antecedent* a výroku D *důsledek* nebo-li *konsekvent* . Popisují-li výroky P, D vlastnosti nějakých objektů, pak výroku P říkáme *podmínka postačující* pro vlastnost popsanou výrokem D a výroku D *podmínka nutná* pro vlastnost popsanou výrokem P. Představíme-li si množinu $\mathfrak{P}$ všech objektů, které mají vlastnost P a množinu $\mathfrak{D}$ všech objektů, které mají vlastnost D, pak $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{D}$. Hledáme-li objekty s vlastností D, pak *postačí* vejít do množiny $\mathfrak{P}$ a hledáme-li objekty s vlastností P, pak je *nutné* vejít do množiny $\mathfrak{D}$. V případě ekvivalence $P \Leftrightarrow D$ je P *podmínka nutná a postačující* pro vlastnost popsanou výrokem D a naopak, platí $\mathfrak{P} = \mathfrak{D}$.

Poznámka 4.5. Dokazovaná věta v příkladu 4.2 má tvar ekvivalence, kde výrok P je *„číslo zapsané v desítkové soustavě je dělitelné třemi“* a výrok D je *„číslo zapsané v desítkové soustavě má ciferný součet dělitelný třemi“*. Budeme muset tudíž dokázat jak $P \Rightarrow D$ (Je-li číslo zapsané v desítkové soustavě dělitelné třemi, pak je jeho ciferný součet dělitelný třemi.), tak $D \Rightarrow P$ (Je-li ciferný součet čísla zapsaného v desítkové soustavě dělitelný třemi, pak je toto číslo dělitelné třemi.)

Abychom ale dokázali implikace z poznámky 4.5 musíme mít také nějaký nápad, jak to provést! Na úvod připomeňme, že například číslo 2731 zapíšeme v desítkové soustavě takto: $2731 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$.

Protože důkaz musí býti zcela obecný, budeme uvažovat zcela libovolné číslo $a \in \mathbb{N}_0$. V desítkové soustavě platí $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + \cdots + a_0 \cdot 10^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i$, kde $a_i \in [0, 9]$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a $n \in \mathbb{N}_0$.

Co ale udělat, aby v rozvoji figuroval ciferný součet? Zkusme následující

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (10^i - 1 + 1) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (10^i - 1) + \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Nelze si nevšimnout, že výraz $\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ je ciferný součet čísla a! Dále si všimněme, že ve výrazu $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (10^i - 1)$ je sčítanec pro $i = 0$ roven $a_0(10^0 - 1) = a_0(1 - 1) = a_0 \cdot 0 = 0$, proto $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (10^i - 1) + \sum_{i=0}^{n} a_i$.

Čili číslo a lze napsat jako součet dvou čísel $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (10^i - 1)$ a $\sum_{i=0}^{n} a_i$, kde druhé číslo je ciferný součet. Zkusme se pečlivěji podívat na sumu $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (10^i - 1)$.

Platí $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (10^i - 1) = a_1 \cdot 9 + a_2 \cdot 99 + a_3 \cdot 999 + \ldots a_n \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n}$. Ale číslo $\underbrace{99\ldots9}_{n}$ je dělitelné třemi pro každé přirozené číslo n, neboť $\underbrace{99\ldots9}_{n} = 3 \cdot \underbrace{33\ldots3}_{n}$. Jinými slovy, pro každé přirozené n platí $3 \mid 10^n - 1$.

Předešlý důkaz je poněkud neobratný, proto jej provedeme posléze ještě jednou, pomocí tzv. *matematické indukce*.

Pokračujme dál. Pokud víme, že číslo $10^i - 1$ je dělitelné třemi pro každé přirozené číslo i, pak by asi měl být dělitelný třemi i každý sčítanec $a_i \cdot (10^i - 1)$ a pokud je dělitelný třemi každý sčítanec, pak by měl být dělitelný třemi celý součet $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (10^i - 1)$. Ale pokud je tento součet dělitelný třemi, pak o tom, zda číslo a je dělitelné třemi bude rozhodovat pouze suma $\sum_{i=0}^{n} a_i$, což je ciferný součet!

V tuto chvíli jsme myšlenky nechali poněkud nekontrolovaně běžet, a navíc byly plné kondicionálů (podmiňovacích způsobů), leč nějaký nápad se v nich zračil. Vraťme se tedy zpět. Jednotlivé myšlenky zformulujeme v klidu do pomocných vět, tzv. lemmat, a ty dokážeme.

Nejdříve chceme ukázat, že je-li číslo a dělitelné číslem x, pak každý součin čísla a s jiným číslem b je dělitelný x.

Lemma 1 Nechť $a, x \in \mathbb{Z}$. Pokud $x \mid a$, pak $x \mid a \cdot b$ pro každé $b \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Předpoklad P v Lemmatu 1 je výrok $x \mid a$, důsledek D je výrok $x \mid a \cdot b$ *pro každé* $b \in \mathbb{Z}$, lemma má tvar $P \Rightarrow D$. Dodejme, že úvodní tvrzení, které začíná slovem „nechť" je jakýsi před předpoklad, který se vztahuje jak k předpokladu, tak důsledku.

Předvedeme si tzv. *přímý důkaz* implikace. Začneme předpokladem P. Nechť platí $x \mid a$, potom z definice na počátku *řešení* plyne, že existuje číslo $m \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = x \cdot m$. Potom ovšem platí, že $a \cdot b = x \cdot m \cdot b$ pro každé $b \in \mathbb{Z}$. Vidíme, že existuje číslo $m \cdot b \in \mathbb{Z}$ tak, že $a \cdot b = x \cdot (m \cdot b)$. Z definice pojmu *dělí* plyne, že $x \mid a \cdot b$, což je důsledek D lemmatu 1.

□

Definice 4.6. *Přímý důkaz* má formálně následující schéma $P \Rightarrow V_1 \Rightarrow V_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow V_n \Rightarrow D$. Z předpokladu P tudíž odvodíme nějaký výrok V_1, z V_1 další výrok V_2 atd., až po konečném počtu kroků z výroku V_n odvodíme důsledek D.

Chceme také dokázat, že je-li dělitelný nějakým číslem každý sčítanec, pak je dělitelný tímto číslem celý součet.

Lemma 2 Nechť $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a nechť $x \in \mathbb{Z}$. Jestliže $x \mid a_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, pak $x \mid a = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Důkaz. Opět použijeme přímý důkaz. Předpokládáme, že platí $x \mid a_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ (předpoklad lemmatu 2). Potom existují čísla $m_i \in \mathbb{Z}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ tak, že $a_i = x \cdot m_i$. Z čehož plyne $a = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} x \cdot m_i = = x \cdot m_1 + x \cdot m_2 + \ldots + x \cdot m_n = x(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) = x \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i$. Existuje tudíž číslo $\sum_{i=1}^{n} m_i \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = x \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i$. Proto $x \mid a$, což je důsledek lemmatu 2.

□

Dále chceme ukázat, že pokud je součet dvou čísel dělitelný nějakým číslem x a tímto číslem je dělitelný i jeden ze sčítanců, pak musí být dělitelný x i druhý sčítanec. Toto lemma budeme dokazovat v množině přirozených čísel.

Lemma 3 Nechť $a, b, c, x \in \mathbb{N}$ a nechť $x \mid a$, $x \mid b$, $a = b + c$. Potom $x \mid c$.

Tentokrát použijeme *důkaz sporem.* V matematice se často stává, že nemáme žádný pěkný, průkazný nápad, jak dokázat větu (lemma) přímo, pak se velmi často uchylujeme k důkazu sporem.

Definice 4.7. *Důkaz sporem.* Máme dokázat větu (lemma) ve tvaru $P \Rightarrow D$. Nebudeme se zabývat tímto výrokem, ale jeho negací $\neg(P \Rightarrow D)$. Formální logika říká, že výrok $\neg(P \Rightarrow D)$ je ekvivalentní s výrokem $P \wedge \neg D$. Negaci implikace $P \Rightarrow D$ můžeme tudíž zapsat $P \wedge \neg D$. Důkaz sporem probíhá formálně takto $P \wedge \neg D \Rightarrow V_1 \Rightarrow V_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow V_n \Rightarrow \neg T$, kde T je nějaké, již dokázané, tvrzení v rámci teorie. Platnost obou výroků $\neg T$ a T je vyloučena a právě tady nastává onen avizovaný spor. Protože výrok T je již dokázaný nade vší pochybnost, musí být pravdivý. Pak je ovšem výrok $\neg T$ nepravdivý. Je-li $\neg T$ nepravdivý, tak aby byla pravdivá implikace $V_n \Rightarrow \neg T$ musí být nepravdivý výrok V_n (zopakujte si pravdivostní hodnoty implikace). Je-li nepravdivý výrok V_n, tak aby byla pravdivá implikace $V_{n-1} \Rightarrow V_n$ musí být nepravdivý výrok V_{n-1}. A tak dále, a tak dále, až ukážeme, že výrok $P \wedge \neg D$ je nepravdivý. Výrok $P \wedge \neg D$ je ovšem negace výroku $P \Rightarrow D$, proto je výrok $P \Rightarrow D$ pravdivý!

Důkaz. Uvažujme negaci lemmatu 3. Dle výše uvedeného návodu, budeme předpokládat současnou platnost předpokladu a negace důsledku. Předpokládáme tudíž, že platí $\underbrace{(x \mid a \wedge x \mid b \wedge a = b + c)}_{P} \wedge \underbrace{x \nmid c}_{\neg D}$. Odtud plyne, že existují $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{N}$ tak, že $a = x \cdot m$, $b = x \cdot n$, $b = x \cdot p + z$, přičemž $z \in [1, x-1]$. Protože $a = b + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{N}$, musí platit $a > b$, a odtud $m > n$.

Z výše uvedeného dostáváme $x \cdot m = x \cdot n + x \cdot p + z$, z čehož plyne $x(m-n) = x \cdot p + z$ a máme spor. Popišme si jej. Protože je $m > n$, musí být $m-n$ přirozené číslo a tudíž je číslo $x(m-n)$ na levé straně rovnosti dělitelné x, zatímco na pravé straně rovnosti je číslo, které není dělitelné x, neboť při dělení x dává nenulový zbytek z. Což je ve sporu s pravdivým tvrzením, že jestliže se dvě přirozená čísla rovnají, pak musí dávat při libovolném dělení přirozeným číslem x tentýž zbytek.

Tímto jsme ukázali, že negace lemmatu 3 je nepravdivá, a tudíž je lemma 3 pravdivé.

□

Nakonec dokážeme pomocí matematické indukce, že číslo $10^n - 1$ je dělitelné třemi pro každé přirozené n.

Lemma 4 Pro každé přirozené n platí $3 \mid 10^n - 1$.

Než započneme důkaz Lemmatu 4, objasníme si princip matematické indukce.

Věta 4.8. (Princip matematické indukce) *Nechť* $M \subseteq \mathbb{N}$ *a platí*

- $1 \in M$
- $n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$.

Potom $M = \mathbb{N}$.

Princip matematické indukce můžeme přeformulovat tak, aby bylo více patrné, jak dokazovat fakt, že nějaký výrok je platný pro všechna přirozená čísla.

Věta 4.9. (Princip matematické indukce) *Nechť $V(n)$ je výrok platný pro některé přirozené číslo n. Pokud ukážeme, že*

- *$V(1)$ je pravdivý a*
- *z pravdivosti výroku $V(n)$, plyne pravdivost výroku $V(n+1)$,*

pak můžeme říci, že výrok $V(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n.

Poznámka 4.10. Uvědomme si genialitu tohoto principu, který dokáže nekonečně mnoho kroků zredukovat na kroky dva. Pokud splníme krok 1 ($1 \in M$), víme, že M obsahuje jedničku. Pokud jsme ověřili platnost kroku 2 ($n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$) víme, že množina M obsahuje také 2. Opět použijeme krok 2 a víme, že M obsahuje také 3 a tak dále, a tak dále. Obecnější znění principu matematické indukce uvedeme později v této kapitole.

Důkaz. V prvním kroku, kterému říkáme *základ indukce*, ukážeme, že naše lemma platí pro $n = 1$. Je-li $n = 1$, pak $10^n - 1 = 10^1 - 1 = 9$ a 9 je dělitelné 3.

V druhém kroku, kterému říkáme *indukční krok*, nejdříve předpokládáme, že lemma platí pro nějaké přirozené n. Předpokládáme tudíž, že platí $3 \mid 10^n - 1$. Za tohoto předpokladu chceme dokázat, že také platí $3 \mid 10^{n+1} - 1$. Jednoduše řečeno, předpokládáme platnost věty pro n a chceme ji dokázat pro $n + 1$.

Víme, že $10^{n+1} - 1 = 10 \cdot 10^n - 1 = (9 + 1)10^n - 1 = 9 \cdot 10^n + (10^n - 1)$. Číslo 9 je dělitelné třemi, podle lemmatu 1, je pak dělitelné 3 i číslo $9 \cdot 10^n$. Z předpokladu víme, že číslo $10^n - 1$ je dělitelné 3. Pokud jsou ovšem v součtu $9 \cdot 10^n + (10^n - 1)$ oba sčítance dělitelné třemi, pak podle lemmatu 2, musí být dělitelný třemi také jejich součet. Jejich součet je ale roven číslu $10^{n+1} - 1$. Ukázali jsme, že pokud $3 \mid 10^n - 1$, pak $3 \mid 10^{n+1} - 1$ a v tuto chvíli máme jistotu, že Lemma 4 platí pro každé přirozené číslo n.

$\square$

Vraťme se k důkazu věty z příkladu 4.2. Uvědomme si, že pokud bude naše věta platit pro kladná celá čísla, pak bude platit i pro záporná celá čísla. Dále víme, že věta určitě platí pro nulu, neboť 0 je dělitelná třemi a její ciferný součet, který je také nula, je opět dělitelný třemi. V důkazu se tedy můžeme omezit na celá kladná, tudíž přirozená čísla.

Důkaz. Nechť a je libovolné přirozené číslo. Už víme, že $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (10^i - 1) + \sum_{i=0}^{n} a_i$, kde $\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ je ciferný součet čísla a.

Nejdříve dokážeme implikaci tvaru $P \Rightarrow D$, tzn. větu „Je-li číslo zapsané v desítkové soustavě dělitelné třemi, pak je jeho ciferný součet dělitelný třemi.“ Použijeme přímý důkaz. Víme, že číslo a je dělitelné třemi. Z lemmatu 4 plyne, že $10^i - 1$ je dělitelné třemi pro každé přirozené i, potom je ovšem, dle lemmatu 1, dělitelný třemi každý sčítanec $a_i(10^i - 1)$. Dle lemmatu 2, ale pak musí být dělitelný třemi i součet $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (10^i - 1)$. Odtud plyne $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (10^i - 1) + \sum_{i=0}^{n} a_i$, přičemž $3 \mid a$ a $3 \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (10^i - 1)$. Podle lemmatu 3, pak musí $3 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, což je důsledek D naší věty.

Nyní dokážeme implikaci $D \Rightarrow P$, tzn. větu „Je-li ciferný součet čísla zapsaného v desítkové soustavě dělitelný třemi, pak je toto číslo dělitelné třemi.“ Nyní víme, že v součtu $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (10^i - 1) + \sum_{i=0}^{n} a_i$ je jak sčítanec $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (10^i - 1)$, tak sčítanec $\sum_{i=0}^{n} a_i$ dělitelný třemi. Potom ovšem musí být, dle lemmatu 2, dělitelný třemi i jejich součet, což je číslo a.

□

Uf, to byla lopotná práce, ale stálo to za to! V řešení příkladu 4.2 jsme si totiž objasnili téměř veškeré základní způsoby dokazování. Zbývající detaily dovysvětlíme v dalších řešených příkladech.

▲

Příklad 4.11. Dokažte, že $\log_2 3$ je iracionální číslo.

Řešení. Připomeňme, že pokud hledáme nějaké reálné číslo x, pro které platí $x = \log_2 y$, kde $y \in (0, \infty)$, pak musí toto číslo splnit rovnici $2^x = y$ (základ umocněný na výsledek logaritmu se musí rovnat číslu logaritmovanému). Takové reálné číslo určitě existuje, neboť ke každému kladnému y takové x umíme dohledat (viz obr.??). Dále si uvědomme, že $\log_2 2 = 1$ a funkce $f(x) = \log_2 x$ je rostoucí. Proto $\log_2 3 > 1$.

Použijeme důkaz sporem. Místo věty ve tvaru implikace $P \Rightarrow D$ tudíž použijeme její negaci $P \wedge \neg D$.

Ale vždyť naše věta nemá tvar implikace, jakoby jí chyběl předpoklad a měla jen důsledek! Věty takového typu se v matematice vyskytují poměrně často, předpoklad není zmiňován v případě, že je zřejmý. Naší větu můžeme tudíž přeformulovat takto: *Jestliže je* $\log_2 3$ *reálné číslo, pak je iracionální.*

Předpokládejme negaci naší věty: $\log_2 3$ *je reálné číslo, ale není iracionální.* Není-li $\log_2 3$ iracionální číslo, pak musí být racionální. Je tudíž vyjadřitelné nějakým zlomkem $\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$, neboť jsme ukázali, že $\log_2 3$ je kladné reálné číslo.

Nechť $\log_2 3 = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Potom platí $2^{\frac{p}{q}} = 3$. Z toho plyne $\sqrt[q]{2^p} = 3$ a po umocnění dostáváme $2^p = 3^q$. Víme, že součin lichých čísel je číslo liché a součin sudých čísel je číslo sudé. Proto $2^p = \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{p}$ je číslo sudé a $3^q = \underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{q}$ je číslo liché.

Odvozená rovnost $2^p = 3^q$ říká, že se dvě čísla rovnají a jedno je liché a druhé sudé. Což je ve sporu s tvrzením, že pokud se rovnají dvě čísla, pak mají stejnou *paritu* (obě jsou sudá nebo obě lichá).

Námi odvozený výrok $2^p = 3^q$ je nepravdivý, tudíž i negace věty je nepravdivá. Pak ovšem musí být původní věta pravdivá.

▲

Příklad 4.12. Dokažte pomocí matematické indukce, že pro každou konečnou množinu X platí $|2^X| = 2^{|X|}$.

Řešení. Každou konečnou množinu X si umíme představit jako n-prvkovou množinu ($|X| = n$), kde $n \in \mathbb{N}_0$. Připomeňme ještě, že množina 2^X je systém všech podmnožin množiny X.

Ukažme, v prvním kroku (základ indukce), že naše věta platí pro $n = 0$, neboť množina $\mathbb{N}_0$ nezačíná jedničkou, ale nulou. Je-li $|X| = n = 0$, pak $X = \emptyset$ a $2^\emptyset = \{\emptyset\}$. Množina $2^\emptyset$ je tudíž jednoprvková a platí $|2^\emptyset| = 1$. Zároveň však víme, že $2^{|\emptyset|} = 2^0 = 1$.

Ve druhém kroku (indukční krok), budeme předpokládat, že naše věta platí pro libovolnou množinu X, kde $|X| = n$, a budeme chtít dokázat, že pak platí i pro libovolnou množinu X', kde $|X'| = n + 1$. Předpokládáme tedy, že pro nějaké libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ platí, že je-li $|X| = n$, pak $|2^X| = 2^n = 2^{|X|}$.

Avšak, než započneme samotné dokazování, proveďme následující konstrukci. Každou $(n+1)$-prvkovou množinu X' můžeme vytvořit z nějaké n-prvkové množiny X, přidáním nějakého určitého prvku $a \notin X$. Proto $X' = X \cup \{a\}$.

Nechť $A, B \subseteq 2^{X'}$ a množina A je systém všech podmnožin množiny X', které prvek a obsahují, zatímco množina B je systém všech podmnožin množiny X', které prvek a neobsahují. Vidíme, že $A \cup B = 2^{X'}$ a $A \cap B = \emptyset$. Množiny A, B tvoří *rozklad množiny* $2^{X'}$. Proto $|A| + |B| = |2^{X'}|$. Budeme chtít ukázat, že $|A| = |B| = 2^n$.

Z faktu $X' = X \cup \{a\}$ plyne, že všechny podmnožiny, které prvek a neobsahují, jsou všechny podmnožiny n-prvkové množiny X. Ale z předpokladu víme, že těch je 2^n. Proto $|B| = |2^X| = 2^n$.

Libovolná podmnožina M, která prvek a obsahuje, vznikne z přesně jedné podmnožiny N, která prvek a neobsahuje tak, že do N prvek a přidáme. A naopak, N vznikne z M vyškrtnutím prvku a. Proto podmnožin, které a obsahují, je stejně jako podmnožin, které a neobsahují a platí $|A| = |B| = 2^n$.

Odtud $|2^{X'}| = |A| + |B| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = 2^{|X'|}$. Dokázali jsme, že pokud věta platí pro n-prvkovou množinu X, pak platí i pro $(n+1)$-prvkovou množinu X' a důkaz je ukončen.

▲

Příklad 4.13. Dokažte, že součet prvních n lichých přirozených čísel je n^2.

Řešení. První důkaz provedeme matematickou indukcí. Máme vlastně dokázat, že $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ pro každé přirozené n.

Základ indukce. Zvolme $n = 1$. Levá strana rovnosti je $2 \cdot 1 - 1 = 1$ a pravá $1^2 = 1$.

Indukční krok. Předpokládejme nyní, že pro nějaké přirozené n platí $1+3+5+\dots$ $+(2n-1) = n^2$. Budeme chtít dokázat, že potom musí být splněno $1+3+5+\dots+$ $+(2n-1)+(2(n+1)-1) = (n+1)^2$. Vyjděme z levé strany dokazované rovnosti $1+3+5+\dots\ +(2n-1)+(2(n+1)-1)$. Využijeme-li předpoklad, dostaneme $n^2+(2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ a důkaz je hotov.

V druhém důkazu použijeme aritmetickou posloupnost. Čísla $1, 3, 5, \dots, 2n-$ -1 tvoří aritmetickou posloupnost. Součet na levé straně rovnosti je tudíž součet prvních n členů aritmetické posloupnosti. Proto můžeme levou stranu přepsat takto $\frac{n}{2}(1+(2n-1)) = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$.

▲

Příklad 4.14. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geqq 5$ platí $2^n > n^2$.

Řešení. Použijeme matematickou indukci.

Základ indukce. Neboť máme prokázat platnost pro všechna přirozená čísla větší nebo rovna pěti, položíme v prvním kroku $n = 5$. Na levé straně dostaneme $2^n =$ $= 2^5 = 32$ a na pravé $n^2 = 5^2 = 25$ a vidíme, že skutečně $32 > 25$.

Indukční krok. Opět budeme předpokládat, že $2^n > n^2$ pro nějaké přirozené $n \geqq 5$ a budeme chtít dokázat, že pak také $2^{n+1} > (n+1)^2$. Při dokazování nerovností matematickou indukcí, je vždy dobré vytvořit nějakou strategii, jak žádaný vztah dokázat. Zpravidla začneme tak, že dokazovanou nerovnost upravíme a doufáme, že nás u toho nějaká strategie napadne. Poznamenejme, že úpravy provádíme takovým způsobem, abychom v dalších úvahách mohli využít platnost předpokladu. Pokud bychom platnost předpokladu v důkazu nepoužili, nešlo by o matematickou indukci!

Ze vztahu $2^{n+1} > (n+1)^2$ plyne $2 \cdot 2^n > n^2+2n+1$ a dostáváme $2^n+2^n > n^2+$ $+2n+1$. Z předpokladu víme, že $2^n > n^2$ a pokud by se nám podařilo prokázat, že $2^n > 2n+1$ pro každé přirozené $n \geqq 5$, pak máme vyhráno, neboť strategie by byla na světě.

Prokažme, že $n^2 > 2n+1$. Protože uvažujeme $n \geqq 5$, víme, že platí $n^2 =$ $= n \cdot n \geqq 5n$. Ale $5n > 2n+1$, neboť $3n > 1$ dokonce pro každé přirozené n. Takže $n^2 \geqq 5n > 2n+1$ pro každé přirozené $n \geqq 5$. Z předpokladu, ale také víme, že $2^n > n^2 \geqq 5n > 2n+1$ pro každé $n \geqq 5$. V tuto chvíli je strategie důkazu hotova.

Vyjdeme z předpokladu $2^n > n^2$. K levé straně nerovnosti přičteme 2^n a k pravé $2n+1$. Tím jsme nerovnost nemohli porušit, neboť na levou stranu jsme přidali větší číslo a na pravou menší ($2^n > 2n+1$). Platí tudíž $2^n+2^n > n^2+2n+1$ a dostáváme $2^n+2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} > (n+1)^2$ a podle principu matematické indukce platí, že $2^n > n^2$ pro všechna přirozená čísla $n \geqq 5$.

▲

Příklad 4.15. Dokažte, že platí *Bernoulliho nerovnost* $(1+x)^n \geqq 1+nx$ pro každé reálné $x > -1$ a pro každé přirozené číslo n.

Řešení. Opět použijeme matematickou indukci. Budeme stručnější.

Základ indukce. Nechť $n = 1$, pak dostáváme $(1 + x)^1 \geqq 1 + x$, což platí.

Indukční krok. Předpokládejme platnost nerovnosti $(1+x)^n \geqq 1+nx$ pro nějaké přirozené n. Chceme dokázat vztah $(1 + x)^{n+1} \geqq 1 + (n + 1)x$. Odtud $(1 + x)(1 + x)^n \geqq 1+ +nx + x$ a obdržíme $(1 + x)^n + x(1 + x)^n \geqq 1 + nx + x$. Pokud se nám podaří prokázat platnost vztahu $x(1+x)^n \geqq x$ máme strategii nalezenu, neboť z předpokladu víme, že $(1 + x)^n \geqq 1 + nx$.

Uvažujme $x \in (-1, 0)$. Číslo x je tedy záporné. Pak k nerovnici $x(1 + x)^n \geqq x$ dostaneme nerovnici ekvivalentní (má tatáž řešení) $(1+x)^n \leqq 1$, která je splněna pro každé přirozené číslo n ($1+x \in (0, 1)$ a jestliže číslo z takového intervalu umocníme, tak výsledek v něm nadále zůstává, proto $(1 + x)^n \in (0, 1)$).

Nechť $x \in \langle 0, \infty)$. Pak z nerovnice $x(1+x)^n \geqq x$ dostáváme ekvivalentní nerovnici $(1 + x)^n \geqq 1$, která opět platí pro každé přirozené n, neboť umocňujeme čísla větší nebo rovna jedné.

Nyní víme, že platí $(1 + x)^n \geqq 1 + nx$ (předpoklad) pro nějaké přirozené n a $x(1 + x)^n \geqq x$ pro každé přirozené n, $x \in (-1, \infty)$. Odtud plyne, že $(1 + x)^n + x(1+x)^n \geqq 1+nx+x$ a dostáváme $(1+x)^{n+1} \geqq 1+(n+1)x$ pro nějaké přirozené n.

▲

Příklad 4.16. Dokažte speciální binomickou větu $(1 + x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Pro první důkaz použijeme matematickou indukcí.

Základ indukce. Pro $n = 1$ dostáváme na levé straně $(1 + x)^1 = 1 + x$ a na pravé $\sum\limits_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k = \binom{1}{0} x^0 + \binom{1}{1} x^1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x = 1 + x$.

Indukční krok. Předpokládejme platnost identity $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ a dokažme platnost vztahu $(1 + x)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$.

Vyjděme z levé strany $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n = (1 + x)^n + x(1 + x)^n$. Pokud nyní využijeme předpoklad, obdržíme $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + x \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} = [\binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n] + [\binom{n}{0} x^1 + \binom{n}{1} x^2 + \binom{n}{2} x^3 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^n + \binom{n}{n} x^{n+1}]$.

Pro pevně zvolené $k \in [1, n]$ bude ve výrazu $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ před x^k koeficient $\binom{n}{k}$, zatímco ve výrazu $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}$ bude před x^k koeficient $\binom{n}{k-1}$. Z těchto dvojic členů vytkneme x^k a dostaneme $\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) x^k$ pro $k \in [1, n]$.

Proto můžeme psát $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^{k+1} = \binom{n}{0}x^0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) x^k + + \binom{n}{n}x^{n+1}$. Člen s x^0 z prvního výrazu a člen s x^{n+1} z druhého výrazu zůstaly osamoceny, neboť neměly žádný další člen do páru.

Ze vztahu $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (Pascalův trojúhelník) plyne, že $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = = \binom{n+1}{k}$. Dále víme, že $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ a $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.

Tudíž $\binom{n}{0}x^0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) x^k + \binom{n}{n}x^{n+1} = \binom{n+1}{0}x^0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\binom{n+1}{k}\right) x^k + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k}\right) x^k$ a důkaz matematickou indukcí je hotov.

Druhý důkaz provedeme kombinatoricky.
Víme, že platí $(1+x)^n = \underbrace{(1+x)\cdot(1+x)\cdots(1+x)}_{n}$. Pokud takový součin chceme vyřešit, musíme každý člen roznásobit s každým. Při roznásobování vznikne součet součinů, přičemž každý sčítanec vypadá obecně takto:

$$\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{k} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1}_{n-k} = x^k,$$

kde k je nějaké číslo z $[0, n]$, neboť k nějakých závorek přispělo do součinu svým x a zbývajících $n-k$ závorek svou jedničkou. Kolik bude v rámci součtu sčítanců, které obsahují přesně k-krát x a $(n-k)$-krát jedničku pro pevně zvolené $k \in [0, n]$? Přesně tolik, kolika způsoby jsme z n závorek schopni vybrat k těch, které do součinu přispějí svým x. Proto sčítanců pro pevně zvolené $k \in [0, n]$, které obsahují x^k je přesně $\binom{n}{k}$. Čili každý sčítanec má tvar $\binom{n}{k} \cdot x^k$ a k projde všechna čísla z množiny $[0, n]$. Odtud $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k$.

Na závěr porovnejme oba důkazy. Jistě se shodneme, že kombinatorický důkaz je nejen kratší, ale i velmi elegantní. Všimněme si, že vyžaduje nějaký pěkný nápad, jak problém dokazované matematické formule převést do řeči kombinatorických výběrů. Právě takové důkazy se v diskrétní matematice vyskytují nejčastěji.

▲

Příklad 4.17. Dokažte kombinatoricky platnost vztahu $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (Pascalův trojúhelník) pro všechna $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geqq k+1$.

Řešení. Použijeme důkaz, o němž již byla několikrát řeč v první kapitole. Kombinatorický důkaz *dvojím počítáním*. Pravá strana rovnosti říká, kolika způsoby je možné z $(n+1)$-prvkové množiny vybrat $(k+1)$-prvkovou podmnožinu. Pokusíme se ukázat, že levá strana popisuje totéž.

Vezměme si $(n+1)$-prvkovou množinu X a jeden z jejích prvků označíme a. Všechny k-prvkové podmnožiny množiny X můžeme roztřídit do dvou disjunktních množin (budou množiny k-prvkových podmnožin), podle toho, zda prvek a obsahují či ne. Každou $(k+1)$-prvkovou podmnožinu, která neobsahuje a, lze vybrat z n-prvkové množiny $X \setminus \{a\}$, tj. $\binom{n}{k+1}$ možností. Podmožin s $k+1$ prvky, které obsahují a, je přesně tolik, kolik je k-prvkových podmnožin množiny $X \setminus \{a\}$ ($\binom{n}{k}$ možností), neboť každou $(k+1)$-prvkovou podmnožinu s prvkem a vytvoříme z přesně jedné k-prvkové podmnožiny bez prvku a jeho přidáním a naopak každou k-prvkovou podmnožinu bez a vytvoříme z přesně jedné $(k+1)$-prvkové vyškrtnutím a. Tudíž $(k+1)$-prvkových podmnožin s prvkem a je $\binom{n}{k}$.

Sečteme-li počet všech $(k+1)$-prvkových podmnožin množiny X s prvkem a a počet všech $(k+1)$-prvkových podmnožin množiny X bez prvku a ($\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$) dostaneme počet všech $(k+1)$-prvkových podmnožin množiny X.

▲

Příklad 4.18. Dokažte, že platí $\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ pro každé $n, k \in \mathbb{N}, n \geqq k$.

Řešení. První důkaz provedeme matematickou indukcí. V naší formuli nyní vystupují dvě přirozená čísla n a k. Musíme se tudíž rozhodnout, které z nich budeme považovat za fixní, a které za proměnné. Své rozhodnutí dáme na jevo tvrzením: „Důkaz provedeme indukcí na n." Z toho plyne, že n je proměnné a k fixní.

Základ indukce. Protože je třeba platnost vztahu prokázat pouze pro přirozená čísla $n \geqq k$, začneme důkaz pro $n = k$. Na levé straně bude $\binom{k}{k} = 1$ a na pravé $\binom{k+1}{k+1} = 1$.

Indukční krok. Předpokládejme $\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ pro nějaké přirozené $n \geqq k$ a budeme chtít dokázat $\sum\limits_{i=k}^{n+1} \binom{i}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + {} + \dots + \binom{n}{k} + {} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}$.

Vyjděme z levé strany dokazované rovnosti $\sum\limits_{i=k}^{n+1} \binom{i}{k} = \sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k} + \binom{n+1}{k}$. Z předpokladu víme, že $\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$, proto $\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}$. Ale z příkladu 4.17 vyplývá, že $\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}$.

▲

Příklad 4.19. Dokažte, že platí $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Řešení. Opět použijeme kombinatorickou metodu dvojího počítání. Na pravé straně rovnosti je kombinační číslo $\binom{2n}{n}$, které říká, kolika způsoby jsme schopni vybrat z $2n$-prvkové množiny n-prvkové podmnožiny. Budeme chtít ukázat, že levá strana popisuje totéž.

Víme, že $\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k}$. Ze symetrie kombinačních čísel plyne $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = {} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$.

Představme si, že prvky $2n$-prvkové množiny jsou kuličky, n z nich obarvíme bílou barvou a zbylých n černou barvou. Vybírejme nyní n kuliček tak, že nejdříve z bílých kuliček vybereme k kuliček pro nějaké pevně zvolené $k \in [0, n]$ ($\binom{n}{k}$ možností), a pak z černých kuliček zbylých $n-k$ kuliček ($\binom{n}{n-k}$ možností). Čili existuje $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ možností, jak z $2n$-prvkové množiny vybrat n-prvkovou podmnožinu pro pevně zvolené k. Uvědomíme-li si, že z bílých kuliček můžeme vybrat, žádnou, jednu, dvě atd. až n kuliček, pak je zřejmé, že číslo $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ skutečně udává počet všech n-prvkových podmnožin $2n$-prvkové množiny. Proto $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

▲

Příklad 4.20. Dokažte, že platí $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$ pro každé přirozené n.

Řešení. Předvedeme si nyní poněkud náročnější příklad dvojího počítání. Nechť X je nějaká n-prvková množina. Ukážeme, že obě strany rovnosti udávají počet všech uspořádaných dvojic (A, B), přičemž A, B jsou nějaké podmnožiny množiny X a platí $A \subseteq B$.

Představme si, že množiny $A, B, A \subseteq B$, vybíráme z množiny X tak, že nejdříve vybereme B jako nějakou k-prvkovou podmnožinu množiny X ($\binom{n}{k}$ možností), a pak k B vybíráme A jako její libovolnou podmnožinu. Ovšem B má 2^k podmnožin. Čili ke každé pevně vybrané k-prvkové podmnožině B umíme najít její podmnožinu 2^k způsoby. Tudíž uspořádaných dvojic množin (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq X$, musí být $\binom{n}{k} 2^k$ pro každé pevně zvolené $k \in [0, n]$. Neboť k musí projít všechna celá čísla z množiny $[0, n]$, dostáváme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ všech uspořádaných dvojic (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq X$.

Spočítejme počet dvojic (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq X$, jiným způsobem. Neboť $A \subseteq B \subseteq \subseteq X$, tak z definice množinové inkluze musí pro každý prvek $x \in X$ platit buď $x \in A \wedge x \in B \wedge x \in X$ nebo $x \notin A \wedge x \in B \wedge x \in X$ nebo $x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in X$. Tudíž, pokud tvoříme všechny uspořádané dvojice (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq X$, pak ke každému prvku z X můžeme nezávisle zvolit jeden ze tří výše zmíněných stavů. Protože X má n prvků, dostáváme 3^n možností.

Předveďme si ještě jeden důkaz. Z příkladu 4.16 plyne, že $(1 + x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Pokud zvolíme $x = 2$ dostáváme $3^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

▲

Věta 4.21. (Zobecněný princip matematické indukce) *Nechť $V(n)$ je výrok platný pro nějaké přirozené číslo n. Jestliže dokážeme, že*

- *platí $V(1)$ a*
- *z platnosti výroku $V(k)$ pro každé přirozené $k < n$ plyne platnost výroku $V(n)$,*

pak $V(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n.

Poznámka 4.22. Zaprvé si uvědomme, že je úplně lhostejné, zda dokazujeme $(n - 1) \in M \Rightarrow n \in M$ nebo $n \in M \Rightarrow (n + 1) \in M$. Zobecněný princip matematické indukce se liší od předešlého principu matematické indukce pouze tím, že v něm předpokládáme platnost věty pro všechna čísla menší než n, zatímco v předešlém případě jsme předpokládali, že věta platí pouze pro nejbližší menší číslo než n, tj. $n-1$. Jinak v obou případech se za těchto předpokladů pokoušíme větu dokázat pro n.

To že můžeme předpokládat pravdivost věty ne jen pro $n - 1$, ale pro libovolné číslo menší než n, nám při dokazování uvolňuje ruce, což dobře ilustruje následující příklad.

Příklad 4.23. Tabulka čokolády se skládá z mn čtverečků. Dokažte, že tabulku umíme rozlámat na jednotlivé čtverečky minimálně $mn - 1$ zlomy.

Řešení. Začneme *základem indukce.* Nejmenší možnou tabulku čokolády s $1 \cdot 1$ čtverečkem skutečně umíme rozlámat na jednotlivé čtverečky $mn - 1 = 1 \cdot 1 - 1 = 0$ zlomy.

Představme si, že tabulku s mn čtverečky jsme jediným zlomem rozdělili na dvě menší části třeba tak, že jedna část má $k < mn$ čtverečků a druhá $mn-k$ čtverečků, přičemž k je nějaké přirozené číslo.

Indukční krok. Neboť $k < mn$ a $mn - k < mn$ (obě části jsou menší než celá tabulka), můžeme předpokládat, že pro tyto menší části naše věta platí. Tabulku s k čtverečky tudíž umíme rozlámat na jednotlivé čtverečky $k - 1$ zlomy a tabulku s $mn - k$ čtverečky $mn - k - 1$ zlomy.

Celkově jsme tedy provedli $(k-1)+(mn-k-1)+1 = mn-1$ zlomů. Předpokládali jsme pravdivost věty pro čísla menší než mn a dokázali jsme, že věta platí i pro mn. Důkaz matematickou indukcí je tudíž ukončen.

▲

Příklad 4.24. Varovný! V rovině je $n \geqq 2$ přímek $p_1, p_2, \dots, p_n$ a každé dvě jsou různoběžné. Dokažte, že tyto přímky musí mít jediný společný bod.

Řešení. Máme-li dvě různoběžné přímky p_1, p_2, pak ty jistě mají právě jeden společný bod. Pro $n = 2$ věta platí.

Vezměme si přímky $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$. Protože je jich méně než n, můžeme předpokladat, že pro ně věta platí. Přímky $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ tudíž mají jediný společný bod, označme jej X. Nyní vezmeme přímky $p_1, p_3, p_4, \dots, p_n$ (chybí p_2), těch je ovšem také méně než n, takže pro ně předpokládáme platnost věty. Přímky $p_1, p_3, p_4, \dots, p_n$ mají jediný společný bod, který označíme Y. Všimněte si, že v obou výběrech přímek figurují například přímky p_1, p_3. Protože figurují v prvním výběru, je jejich společný bod X, neboť jsou i v druhém výběru jejich společný bod je Y. Ale dvě různoběžné přímky p_1, p_3 mají jediný společný bod, proto $X = Y$ a přímky $p_1, p_2, \dots, p_n$ mají jediný společný bod.

Mnozí z vás si teď asi říkají, jak je to možné, že jsme dokázali úplnou „ptákovinu“. Vždyť každý z nás si určitě umí představit tři přímky v rovině, které jsou po dvojicích různoběžné, ale nemají jediný společný bod (proložte si přímky body, které tvoří vrcholy libovolného trojúhelníka). Kde se stala chyba?

Není to v tom, že matematické důkazy jsou prostě spekulace a s pravdou nemají nic společného? Ne, není! Přehlédli jsme jedinou drobnost, naše indukční úvaha nedokáže zdůvodnit, že pokud věta platí pro $n = 2$, pak platí pro $n = 3$.

Pojďme si to rozebrat. Máme 3 vzájemně různoběžné přímky p_1, p_2, p_3 a z nich vybíráme přímky dvě. Ukažme si všechny možné výběry: $\{p_1, p_2\}$, $\{p_1, p_3\}$ a $\{p_2, p_3\}$. Když jsme obhajovali, že n přímek má jediný společný bod, předpokládali jsme, že nějaké dva různé výběry $n-1$ přímek obsahují tutéž dvojici přímek. Všimněte si, že pro $n = 3$ to neplatí! Žádné dva různé výběry dvou přímek ze tří společnou dvojici přímek neobsahují!

Nu, a tato „drobná díra“ v úvaze zapřičinila, že důkaz je úplně špatně.

Jestliže z platnosti pro $n = 2$ neplyne platnost pro $n = 3$, pak platnost pro $n = 3$ musíme ověřit v základu indukce a při ověřování bychom snadno zjistili, že věta neplatí.

▲

4.1 Dirichletův princip

Věta 4.25. (Dirichletův princip)
Více než n holubů se schovalo v n děrách, které jsou v holubníku. Pak ovšem v alespoň jedné díře jsou dva nebo více holubů.

Zkusme tuto pěknou větu zformulovat v matematickém jazyce.

Věta 4.26. (Dirichletův princip) *Nechť* $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| > n$. *Potom existuje* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *takové, že* $|A_i| \geqq 2$.

Důkaz. Dirichletův princip nám říká, že jestliže sjednocení n nějakých množin obsahuje více než n prvků, pak musí v alespoň jedné množině býti dva nebo více prvků. Větu budeme dokazovat *nepřímo*, což je poslední základní způsob dokazování, který jsme si dosud nevyjasnili. Vychází z faktu, že výroky $P \Rightarrow D$ a $\neg D \Rightarrow \neg P$ jsou ekvivalentní, tzn. říkají totéž. Předpoklad P naší věty je $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| > n$ a důsledek D je *Existuje* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *takové, že* $|A_i| \geqq 2$.

Poznámka 4.27. Nebudeme vlastně dokazovat původní větu $P \Rightarrow D$, ale větu ekvivalentní $\neg D \Rightarrow \neg P$ tak, že důkaz bude mít formu $\neg D \Rightarrow V_1 \Rightarrow V_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow V_n \Rightarrow \Rightarrow \neg P$, kde V_i jsou pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ nějaké výroky. Vidíme, že schéma nepřímého důkazu je podobné schématu přímého důkazu, jen vycházíme z negace důsledku a dojdeme k negaci předpokladu.

Nejdříve znegujme důsledek, který zní takto: *Existuje* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ *takové, že* $|A_i| \geqq 2$. Dostaneme *pro všechna* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ *platí* $|A_i| < 2$ (negace kvantifikátoru $\exists$ je $\forall$). Potom má ovšem každá množina nejvýše jeden prvek a nutně musí platit $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \leqq n$, což je negace předpokladu a důkaz je hotov.

$\square$

Poznámka 4.28. Dirichletův princip je v angličtině nazýván *Pigeon-hole principle*, princip holubů a děr, a proto jsme jako první zařadili poněkud nematematickou formulaci tohoto principu.

Příklad 4.29. Vybrali jsme náhodně z množiny $[1, n]$ šest čísel. Ukažte, že rozdíl některých dvou z vybraných šesti čísel musí být dělitelný pěti.

Řešení. Pokud dvě přirozená čísla a, b dávají při dělení přirozeným číslem m tentýž zbytek, pak je jejich rozdíl dělitelný číslem m (viz cvičení níže). Libovolné přirozené číslo při dělení pěti dává jako zbytek jedno z čísel $0, 1, 2, 3, 4$. Vybraných 6 čísel rozdělíme do pěti množin tak, že společně budou v množině jen ta čísla, co dávají při dělení pěti tentýž zbytek. Protože rozdělujeme 6 čísel do 5 množin (šest holubů se schová do pěti děr), musí být v alespoň jedné množině dvě nebo více čísel a rozdíl dvou čísel z jedné množiny (dávají tentýž zbytek) je dělitelný pěti.

$\blacktriangle$

Příklad 4.30. V místnosti je $2n + 1$ lidí. Každý člověk v místnosti si podal ruku s alespoň n lidmi. Dokažte, že jestliže jsou v místnosti dva lidé kteří si ruku nepodali, pak existuje v místnosti člověk, s kterým si podali ruce oba.

Řešení. Mějme množinu $L, |L| = 2n + 1$, všech lidí v místnosti. Dva lidi, kteří si nepodali ruku označíme x a y. Označme $M = L \setminus \{x, y\}$. Existuje množina $X \subseteq$ $\subseteq M$ těch lidí, s kterými si podal ruku x. Ze zadání plyne $|X| \geqq n$. Dále existuje množina $Y \subseteq M$ těch lidí, s kterými si podal ruku y a ze zadání plyne $|Y| \geqq n$. Víme, že $|M| = 2n - 1$. Pokud by byli podmnožiny X a Y disjunktní, platilo by $|X \cup Y| = |X| + |Y| \geqq 2n$, což není možné, protože by sjednocení podmnožin mělo více prvků než celková množina M. X a Y tudíž mají neprázdný průnik a prvek z tohoto průniku je člověk, který si podal ruku s x i y.

V tomto příkladu vystupují jako díry prvky množiny M, kterých je $2n - 1$, a holubi jsou prvky množin X a Y, kterých je v součtu alespoň $2n$.

Pojmy k zapamatování

— Axióm, věta, lemma.

— Přímý důkaz ($P \Rightarrow V_1 \Rightarrow V_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow V_n \Rightarrow D$).

— Nepřímý důkaz ($\neg D \Rightarrow V_1 \Rightarrow V_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow V_n \Rightarrow \neg P$).

— Důkaz sporem ($(P \wedge \neg D) \Rightarrow V_1 \Rightarrow V_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow V_n \Rightarrow \neg T$, přičemž T je platný výrok v teorii).

— Kombinatorický důkaz, levou a pravou stranu dokazované identity modelujeme jako počet nějakých kombinatorických výběrů. Často používáme dvojí počítání.

— Důkaz matematickou indukcí.

— Dirichletův princip (n děr a více než n holubů).

▲

Příklady k procvičení

!

1. Dokažte, že součet dvou sudých čísel je sudý.

2. Dokažte, že součet dvou lichých čísel je sudý.

3. Dokažte, že součet sudého a lichého čísla je lichý.

4. Dokažte, že rozdíl dvou přirozených čísel, které dávají při dělení číslem $m \in \mathbb{N}$ tentýž zbytek, je dělitelný m.

5. Dokažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

6. Z množiny $\mathbb{N}$ jsme vybrali náhodně 3 čísla. Ukažte, že mezi těmito třemi čísly musí být nějaké dvě, jejichž součet je sudé číslo.

7. Dokažte Lemma 3 přímo.

8. Dokažte alespoň dvěma způsoby, že $\sum\limits_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

9. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 3$ platí $3^n \geqq n^3$.

10. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí $6 \mid n^3 - n$.

11. Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo n platí $4 \mid n^3 - n$.

12. Dokažte, že každá n-prvková množina má přesně 2^{n-1} podmnožin s lichým počtem prvků.

13. Dokažte alespoň dvěma způsoby, že platí $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

14. Dokažte alespoň dvěma způsoby, že platí $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} = 0$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. Přímý důkaz, vhodné označení obou čísel.

2. Přímý důkaz, vhodné označení obou čísel.
3. Přímý důkaz, vhodné označení obou čísel.
4. Přímý důkaz, vhodné označení obou čísel.
5. Důkaz sporem.
6. Dirichletův princip.
7. Při volbě značení vycházejte z důkazu sporem Lemmatu 3.
8. matematickou indukcí nebo přímo odvozením.
9. matematickou indukcí.
10. matematickou indukcí nebo přímo.
11. matematickou indukcí nebo přímo.
12. Dokažte, že podmnožin s lichým a sudým počtem prvků je stejně.
13. z binomické věty nebo dle příkladu 4.12 nebo indukcí.
14. z binomické věty nebo indukcí.

Kapitola 5

Relace a zobrazení

Každý sám jsme nic
Každý sám ani nejsme
jen šém vzájemných doteků je to
…co nás oživí…

Autor výše uvedených řádků nám chce zřejmě říci, že objekty jako takové jsou vlastně „mrtvé“, tedy bez projevů, popřípadě nedávají „smysl“, pokud je vnímáme osamoceně bez jejich vztahů k předmětům ostatním. Proto se většina věd, a nejen exaktních, zabývá více vztahy mezi objekty než-li objekty samotnými. Připomeňme, že vztah se řekne latinsky *relatio*, proto *relace* je nějaký vztah mezi dvěma či více objekty.

V exaktních vědách potřebujeme exaktní a zároveň dostatečně obecné definice pojmů, proto musíme pojem relace formalizovat v následujících definicích.

Poznámka 5.1. Dovolte, v tuto chvíli, malou odbočku. O matematice se často říká, že je příliš *abstraktní*. Pojem „abstraktní“ mívá při běžné řeči často pejorativní nádech. Abstraktní, tudíž zbytečné nebo nesrozumitelné. Uvědomme si, že abstraktní umění či věda se vždy snaží vyhledat v zobrazovaném či zkoumaném objektu to, co je v něm „podstatné“. Podstatné rysy pak zdůrazní a méně podstatné detaily potlačí nebo vynechá. Proto se nám abstraktní objekty jeví tak cizí a nesrozumitelné, jsme totiž zvyklí vnímat věci v celé jejich, smysly dostupné, složitosti. Ale na druhé straně právě abstraktní objekty jsou dostatečně „čisté“ a přehledné, abychom právě na nich započali cestu k poznání reálných objektů se všemi jejich složitostmi. Připomeňme také, že proces abstrakce nám dovoluje odhalovat příbuznost objektů i přesto, že se jeví velmi odlišně.

5.1 Binární a n-ární relace na množině A

Definice 5.2. Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou nějaké množiny. Potom *kartézský součin* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ těchto množin je množina všech uspořádaných n-tic $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kde $a_i \in A_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, což symbolicky zapíšeme $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Definice 5.3. *n-ární relace* R na množinách $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je libovolná podmnožina kartézského součinu $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Definice 5.4. *n-ární relace* R na množině A je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times A \times \ldots \times A = A^n$.

Definice 5.5. *Binární relace* R na množinách A, B je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$.

Definice 5.6. *Binární relace* R na množině A je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times A = A^2$.

Poznámka 5.7. V dalším textu se budeme věnovat především binárním relacím na množině A, a proto pod stručným pojmem *relace* budeme rozumět právě *binární relace na množině A*.

Přejděme nyní k vlastnostem relací.

- Binární relace R na množině A je *reflexivní* právě tehdy, když pro každé $x \in A$ platí $(x, x) \in R$.
- Binární relace R na množině A je *symetrická* právě tehdy, když pro každé $x, y \in A$ platí, pokud $(x, y) \in R$, pak $(y, x) \in R$.
- Binární relace R na množině A je *antisymetrická* právě tehdy, když pro každé $x, y \in A$ platí, jestliže $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$, pak $x = y$.
- Alternativní definice *antisymetrie*: $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow (x, y) \notin R \vee (y, x) \notin R$
- Binární relace R na množině A je *tranzitivní* právě tehdy, když pro každé $x, y, z \in A$ platí, jestliže $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$, pak $(x, z) \in R$.

Poznámka 5.8. Často místo $(x, y) \in R$ píšeme xRy. Dodejme ještě, že na prázdné množině A můžeme definovat pouze tzv. *prázdnou relaci*, tzn. neobsahuje žádnou uspořádanou dvojici (resp. n-tici). Uvědomme si, že prázdná relace paradoxně splňuje všechny vlastnosti, které jsme si výše vyjmenovali. Ptáte se proč?

Vše je postaveno na faktu, že implikace $P \Rightarrow D$ je pravdivá vždy, když výrok P je nepravdivý (symbolicky zapsáno $0 \Rightarrow 0$ a $0 \Rightarrow 1$ jsou pravdivé výroky). Čili vůbec nezáleží na tom, zda je splněn důsledek! Všimněte si, že všechny vlastnosti relací mají tvar implikace (i reflexivitu můžeme přepsat do implikace následovně: Je-li a libovolný prvek z A, pak $(a, a) \in R$). Máme-li prázdnou množinu A, tak nikdy nemůže být splněn předpoklad libovolné vlastnosti, a proto je každá vlastnost, bez ohledu na pravdivost důsledku, splněna.

Pozor! Prázdnou relaci můžeme nadefinovat i na neprázdné množině (viz 5.10) a tam musíme být opatrnější.

Skutečnost, že na množině A je definována relace R budeme také často zapisovat pomocí uspořádané dvojice (A, R).

Příklad 5.9. Nechť $A = [1, 4]$ a $R = \{(1, 1), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (1, 2), (2, 1)\}$ je relace na A. Zjistěte vlastnosti zadané relace R.

Řešení. Má-li být relace R reflexivní, pak musí obsahovat všechny dvojice typu (i, i), kde $i = 1, 2, 3, 4$. Protože neobsahuje dvojici $(2, 2)$, není reflexivní.

Má-li být symetrická, pak ke každé dvojici typu (i, j), kde $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, musí obsahovat také dvojici (j, i). Tato vlastnost je splněna ve všech případech, R je tudíž symetrická.

Má-li být antisymetrická, pak podle alternativní definice může z dvojic typu (i, j) a (j, i) pro $i \neq j$, $i, j \in [1, 4]$, obsahovat vždy nejvýše jednu, tzn. buď žádnou nebo přesně jednu z nich. Což není splněno například pro dvojice $(1, 2)$ a $(2, 1)$. R není antisymetrická.

Má-li být tranzitivní, pak ke každým dvěma dvojicím typu (i, j) a (j, k) (čím první končí, tím druhá začíná) pro $i, j, k \in [1, 4]$ musí obsahovat dvojici (i, k). Snadno se přesvědčíme, že v našem případě tato vlastnost není splněna, neboť R obsahuje dvojice $(2, 3)$ a $(3, 2)$, ale neobsahuje dvojici $(2, 2)$. R není tranzitivní.

▲

Příklad 5.10. Nechť A je nějaká neprázdná množina lidí. Na A je definována relace R tak, že $\forall a, b \in A : aRb \Leftrightarrow a$ je starší než b. Určete vlastnosti relace R.

Řešení. Žádný člověk $a \in A$ není starší než on sám, proto $(a, a) \notin R$ a relace R není reflexivní.

Pro každé dva (různé) lidi $a, b \in A$ platí buď a je starší než b nebo b je starší než a nebo a, b jsou stejně staří. V prvním případě $(b, a) \notin R$, ve druhém $(a, b) \notin R$ a ve třetím $(b, a) \notin R$ a $(a, b) \notin R$. Z alternativní definice antisymetrie plyne, že R je antisymetrická, neboť vždy alespoň jedna z dvojic $(a, b), (b, a)$ v relaci chybí.

Pokud by obsahovala množina A jediného člověka a, pak by mohla býti R i symetrická, neboť v tomto případě je R relace prázdná (jediná usp. dvojice, kterou by mohla relace obsahovat, a to (a, a), obsahovat nemůže) Protože prázdná relace nesplní předpoklad definice symetrie, je R symetrická (viz 5.8).

Pokud je $|A| > 1$, pak R není symetrická.

▲

Příklad 5.11. Nechť A je množina všech přímek v rovině. Na A je definována relace R tak, že $\forall p, q \in A : pRq \Leftrightarrow p$ je rovnoběžná s q. Jaké vlastnosti má relace R?

Řešení. Přímky splývající považujeme za rovnoběžné, proto pRp pro libovolnou přímku $p \in A$ a relace R je reflexivní.

Je-li přímka p rovnoběžná s q, pak q je rovnoběžná s p, proto je R symetrická.

Protože v rovině existuje ke každé přímce nějaká jiná přímka, která je s ní rovnoběžná, tak relace R nemůže být antisymetrická.

Uvědomme si však, pokud by byla množina A množina všech přímek v rovině, které jsou po dvojicích různoběžné, pak by byla naše relace R na množině A i antisymetrická, poněvadž ke každé přímce $p \in A$ by existovala jediná přímka, která je s ní rovnoběžná, a to p. Byla by tudíž splněna podmínka, jestliže pRq a qRp, pak $p = q$, neboť pokud p a q jsou různoběžné, tak není splněn předpoklad podmínky, a potom podmínka platí vždy bez ohledu na pravdivost důsledku, a pokud by p, q byly rovnoběžné (tedy pRq a qRp), pak nutně $p = q$.

Nechť $p, q, r \in A$. Je-li p rovnoběžná s q a q rovnoběžná s r, pak je p rovnoběžná s r. Tudíž je R tranzitivní.

▲

Zjišťování některých vlastností relací nám může zpříjemnit fakt, že si relaci zakreslíme pomocí vhodného schématu, například pomocí čtvercové matice nebo diagramu. Připomeňme si ještě, že prvek nějaké matice A v i-tém řádku a j-tém sloupci zapisujeme $[A]_{ij}$.

Definice 5.12. Nechť $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a nechť R je relace na A. Potom *diagramem relace* R nazýváme takové rovinné schéma, kde prvky množiny A jsou body v rovině (malá kolečka) a dva body a_i a a_j, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, jsou spojeny šipkou ve směru od bodu a_i do bodu a_j právě tehdy, když $(a_i, a_j) \in R$. Diagram relace R budeme značit $D(R)$.

Příklad 5.13. Mějme relaci R z příkladu 5.9. Zakreslete diagram této relace.

Řešení. Přeznačíme si prvky množiny $A = [1, 4]$ tak, že bude platit $i = a_i$ pro každé $i = 1, 2, 3, 4$. Potom budeme postupovat přesně podle definice 5.12 a dostaneme $D(R)$ na obrázku??

Všimněme si, že z diagramu snadno vyčteme, zda je relace reflexivní, symetrická nebo antisymetrická.

Relace R je reflexivní právě tehdy, když má každý prvek v $D(R)$ šipku, která z něj vychází a v něm končí. Takové šipce budeme říkat *smyčka*. Neboť prvek $2 = a_2$ takovou smyčku nemá, R není reflexivní.

Relace R je symetrická právě tehdy, když mezi každými dvěma různými body a_i, a_j v $D(R)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, jsou buď šipky v obou směrech nebo žádná. V našem případě je splněno, R je symetrická.

Relace R je antisymetrická právě tehdy, když mezi každými dvěma různými body a_i, a_j v $D(R)$ je buď šipka jen v jednom směru nebo žádná. V našem případě není splněno, R není antisymetrická.

Relace R je tranzitivní právě tehdy, když ke každým dvěma šipkám, první ve směru z a_i do a_j, druhá ve směru z a_j do a_k, existuje šipka ve směru z a_i do a_k pro $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Odtud, buď se uzavře trojúhelník nebo byly původní dvě šipky protisměrné, ale pak oba koncové body musí mít smyčku. V našem případě to není splněno mezi body $2 = a_2$ a $3 = a_3$, kde jsou šipky v obou směrech, ale bod a_2 nemá smyčku. R není tranzitivní.

Z výše uvedeného plyne, že má-li být symetrická relace tranzitivní, tak každé dva body mezi nimiž jsou obousměrné šipky musí mít smyčky.

▲

Definice 5.14. Nechť $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a nechť R je relace na A. Matici $M(R)$ typu $n \times n$ nazýváme *maticí sousednosti relace* R právě tehdy, když $[M(R)]_{ij} = 1$, je-li $(a_i, a_j) \in R$ a $[M(R)]_{ij} = 0$, je-li $(a_i, a_j) \notin R$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Příklad 5.15. Mějme relaci R z příkladu 5.9. Určete její matici sousednosti.

Řešení. Opět si přeznačíme prvky množiny $A = [1, 4]$ tak, že bude platit $i = a_i$ pro každé $i = 1, 2, 3, 4$. Potom budeme postupovat přesně podle definice 5.14 a dostaneme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Všimněme si, že z matice sousednosti snadno vyčteme, zda je relace reflexivní, symetrická nebo antisymetrická.

Relace R je reflexivní právě tehdy, když všechny prvky na hlavní diagonále v $M(R)$ jsou 1. Protože má naše matice na pozici $(2, 2)$ nulu, tak R není reflexivní.

Relace R je symetrická právě tehdy, když $M(R)$ má na symetrických pozicích dle hlavní diagonály (tj. na pozicích (i, j) a (j, i)) buď na obou nulu nebo na obou jedničku, to znamená, že i samotná matice $M(R)$ musí být symetrická. V našem případě to platí, a proto je relace R symetrická.

Relace R je antisymetrická právě tehdy, když $M(R)$ má na symetrických pozicích dle hlavní diagonály alespoň jednu nulu, což v tomto případě splněno není.

Ještě dodejme, že tranzitivita relace R se bohužel z matice $M(R)$ nedá snadno vyčíst.

▲

Příklad 5.16. Kolik existuje relací na n-prvkové množině A, které jsou

- reflexivní?
- reflexivní a antisymetrické?

Řešení. Představme, si že k dané relaci R máme její matici sousednosti $M(R)$. Je-li to matice reflexivní relace, pak musí mít na hlavní diagonále samé jedničky a na ostatních pozicích cokoliv, tzn. buď 0 nebo 1. Celá matice má n^2 prvků a na hlavní diagonále je n prvků. To znamená, že mimo diagonálu máme $n^2 - n = n(n-1)$ prvků a každý z nich může být buď 0 nebo 1. Celkově tudíž máme $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n(n-1)} = 2^{n(n-1)}$ možností, jak vytvořit matici sousednosti reflexivní relace.

Pohrejme si ještě trošku s číslem $n(n-1)$. Víme, že $n(n-1) = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, ale $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$. Na n-prvkové množině tudíž existuje $2^{n(n-1)} = 2^{2\binom{n}{2}} = 4^{\binom{n}{2}}$ reflexivních relací.

Už víme, že matice reflexivní relace má na hlavní diagonále samé jedničky. Představme si, že máme reflexivní a antisymetrickou relaci. Pokud má její matice na pozici (i, j), $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$, jedničku, pak na pozici (j, i) musí být nutně 0. Zaměřme se nyní na tu část matice, která je nad diagonálou $(i < j)$. Tato část obsahuje $\frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ prvků. Umístíme zde pevně k nul, $k \in [0, \binom{n}{2}]$, a zbytek budou jedničky. Na pozicích symetrických s jedničkou (těch je $\binom{n}{2} - k$) musí být nula, zatímco na pozicích symetrických s nulou (těch je k) může být jak nula, tak jednička.

Matic reflexivní a antisymetrické relace, která má nad diagonálou pevně rozmístěno k nul je tudíž 2^k. Kolika způsoby je možné rozmístit k nul pro pevně zvolené k nad hlavní diagonálu? Přesně $\binom{\binom{n}{2}}{k}$ způsoby, neboť vybíráme z $\binom{n}{2}$ prvků k pozic, na které umístíme nuly. Odtud víme, že existuje $\binom{\binom{n}{2}}{k} \cdot 2^k$ matic reflexivní a antisymetrické relace pro pevně zvolené $k \in [0, \binom{n}{2}]$.

Víme však, že k musí projít všechna celá čísla od 0 do $\binom{n}{2}$. Proto existuje $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{k} \cdot 2^k$ matic sousednosti reflexivní a antisymetrické relace a přesně tolik je reflexivních a antisymetrických relací.

Z příkladu 4.20 navíc víme, že $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{k} \cdot 2^k = 3^{\binom{n}{2}}$. Tato identita nám napovídá, že bychom při řešení příkladu mohli postupovat i jinak, jednodušeji. Ukažme si to.

Matice sousednosti reflexivní a antisymetrické relace má na hlavní diagonále samé jedničky. Spárujme si nyní v $M(R)$ symetrické pozice (i, j) a (j, i) pro $i \neq$

$\neq j, i, j \in [1, n]$. Takových párů bude $\frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$. Protože je relace antisymetrická, tak na symetrických pozicích může být buď 0 na (i, j) a 1 na (j, i) nebo 1 na (i, j) a 0 na (j, i) nebo 0 na (i, j) a 0 na (j, i) (stav 1 na (i, j) a 1 na (j, i) není možný). Odtud každý pár symetrických dvojic (je jich $\binom{n}{2}$) může mít v $M(R)$ jeden ze tří možných stavů buď $0, 1$ nebo $1, 0$ nebo $0, 0$. Proto existuje $3^{\binom{n}{2}}$ matic $M(R)$, je-li relace R reflexivní i symetrická a přesně tolik je i reflexivních a symetrických relací.

▲

Příklad 5.17. Množina A je množina všech studentů v posluchárně, předpokládejme, že jich je $n \in \mathbb{N}$ a existuje řada, kde sedí alespoň dva studenti. Na A je definována relace R takto: $\forall x, y \in A : xRy \Leftrightarrow x$ a y sedí ve stejné řadě. Určete vlastnosti relace R.

Řešení. Každý student x sedí ve stejné řadě jako on sám, proto xRx pro každé $x \in A$. Relace R je reflexivní.

Pro každé dva studenty $x, y \in A$ platí, jestliže x sedí ve stejné řadě s y, pak y sedí ve stejné řadě s x. Tudíž je splněno $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$ a R je symetrická.

Protože, existuje řada, kde sedí alespoň dva studenti a R je symetrická, nemůže být R antisymetrická. (Promyslete si!)

Sedí-li x v jedné řadě s y a y v jedné řadě se z, pak nutně musí sedět x v jedné řadě se z. Platí tudíž $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$. Relace R je tranzitivní.

▲

Příklad 5.18. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\}$, přičemž $\overrightarrow{u} = (0, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, 0)$, $\overrightarrow{w} = (1, 1)$, $\overrightarrow{x} = (0, -1)$, $\overrightarrow{y} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{z} = (1, -1)$. Jde tudíž o vybrané dvojrozměrné aritmetické vektory z $\mathbb{R}^2$. Na A je definovaná relace R takto: $\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in A : \overrightarrow{a} R \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tak, že platí $\overrightarrow{a} = k \cdot \overrightarrow{b}$. Určete vlastnosti relace R.

Řešení. V $\mathbb{R}$ je určitě číslo 1. Potom ovšem pro každý vektor $\overrightarrow{a} \in A$ platí $\overrightarrow{a} = 1 \cdot \overrightarrow{a}$, a tudíž $\overrightarrow{a} R \overrightarrow{a}$. R je reflexivní.

Nechť pro nějaké dva vektory $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in A$ platí $\overrightarrow{a} R \overrightarrow{b}$, potom musí v $\mathbb{R}$ existovat k takové, že $\overrightarrow{a} = k \cdot \overrightarrow{b}$. Protože jsou v A pouze nenulové vektory, musí být $k \neq 0$. Potom ovšem existuje $\frac{1}{k} \in \mathbb{R}$ tak, že $\overrightarrow{b} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{a}$. Proto platí $\overrightarrow{b} R \overrightarrow{a}$. R je symetrická.

Sami zdůvodněte, že není antisymetrická.

Platí-li $\overrightarrow{a} R \overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{b} R \overrightarrow{c}$ pro každé tři vektory $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in A$, musí existovat v $\mathbb{R}$ čísla k, l taková, že $\overrightarrow{a} = k \cdot \overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{b} = l \cdot \overrightarrow{c}$. Potom platí $\overrightarrow{a} = k \cdot l \cdot \overrightarrow{c}$, kde $k \cdot l \in \mathbb{R}$. Proto $\overrightarrow{a} R \overrightarrow{c}$. R je tranzitivní.

▲

Příklad 5.19. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\}$, přičemž $\overrightarrow{u} = (0, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, 0)$, $\overrightarrow{w} = (1, 1)$, $\overrightarrow{x} = (0, -1)$, $\overrightarrow{y} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{z} = (1, -1)$. Na A je definovaná relace R takto: $\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in A, \overrightarrow{a} = (a_1, a_2), \overrightarrow{b} = (b_1, b_2) : \overrightarrow{a} R \overrightarrow{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$. Určete vlastnosti relace R.

Řešení. Nechť $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2) \in A$. Potom musí být $\overrightarrow{a}$ nenulový, a tudíž $a_1a_1 + a_2a_2 = a_1^2 + a_2^2 > 0$. Z čehož plyne, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) \notin R$ a R není reflexivní.

Platí-li $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in R$, kde $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$, pak musí být splněno $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. Je-li ale splněno $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$, pak musí platit $b_1a_1 + b_2a_2 = 0$, z čehož plyne $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) \in R$. Proto je relace R symetrická.

Sami prokažte, že není antisymetrická.

Na příkladu ukážeme, že R není tranzitivní. Vidíme, že pro vektory $\overrightarrow{u} = (0, 1)$ a $\overrightarrow{v} = (1, 0)$ platí $0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$, tudíž $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in R$. Dále $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}) \in R$, protože $\overrightarrow{v} = (1, 0)$, $\overrightarrow{x} = (0, -1)$ a $1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$. Avšak $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}) \notin R$, protože $\overrightarrow{u} = (0, 1)$, $\overrightarrow{x} = (0, -1)$ a $0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0$.

Ověřit fakt, že R není tranzitivní, by bylo možné i kratším způsobem, najděte jej sami (Využijte skutečnosti, že R není reflexivní a je symetrická).

▲

Příklad 5.20. Množina A je množina všech studentů v posluchárně, předpokládejme, že jich je $n \in \mathbb{N}, n \geqq 2$ a že mezi nimi jsou dva, kteří sedí v různých řadách. Na A je definována relace R takto: $\forall x, y \in A : xRy \Leftrightarrow x$ sedí v řadě před y. Určete vlastnosti relace R.

Řešení. Žádný student x nesedí před sebou samým, proto $(x, x) \notin R$ a relace R není reflexivní.

Vezměme dva libovolné studenty v posluchárně a označme je $x, y, x \neq y$. Mohou nastat tři situace, buď x sedí ve stejné řadě jako y, potom $(x, y) \notin R$ a $(y, x) \notin R$, nebo x sedí před y, pak $(x, y) \in R$ a $(y, x) \notin R$, nebo y sedí před x, pak $(x, y) \notin R$ a $(y, x) \in R$. Vidíme, že pro každé dva studenty $x, y, x \neq y$ platí, že alespoň jedna z uspořádaných dvojic (x, y) a (y, x) do relace R nepatří, takže R splňuje alternativní definici antisymetrie.

Dokažte sami, že R není symetrická.

Platí-li $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$, pak x sedí před y a y sedí před z. Potom ovšem musí x sedět před z a platí $(x, z) \in R$. Proto je relace R tranzitivní.

▲

5.2 Relace ekvivalence

Definice 5.21. Každá relace R na množině A, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní se nazývá *ekvivalence.*

Poznámka 5.22. Je-li relace R ekvivalencí, pak často zápis xRy zaměníme zápisem $x \sim y$ a zápis $x \sim y$ čteme *prvek x je ekvivalentní s prvkem y.*

Všimněte si, že relace z příkladů 5.11, 5.17 a 5.18 jsou ekvivalence.

Definice 5.23. Mějme neprázdnou množinu A, na níž je definována nějaká relace ekvivalence $\sim$ a prvek $a \in A$. Potom množinu všech prvků z množiny A, které jsou ekvivalentní s prvkem a budeme nazývat *třídou ekvivalence prvku a* a budeme ji značit $[\sim a]$.

Samozřejmě, že $[\sim a] = [\sim b]$, pokud $a \sim b$. Umíte to zdůvodnit?

Věta 5.24. *Pro každou množinu A s relací ekvivalence $\sim$ platí:*

- $\bigcup_{a \in A} [\sim a] = A$ *a*
- $[\sim a] \cap [\sim b] = \emptyset$*, jsou-li* $[\sim a]$ *a* $[\sim b]$ *dvě různé třídy ekvivalence* $\sim$.

Důkaz. Chceme-li dokázat, že sjednocením všech tříd ekvivalence dostaneme celou množinu A, pak stačí ukázat, že každý prvek množiny A musí patřit do některé třídy ekvivalence. Pro každý prvek a v množině A platí $a \sim a$, neboť ekvivalence $\sim$ je reflexivní, potom ovšem $a \in [\sim a]$. Tudíž každý prvek $a \in A$ musí patřit do nějaké třídy ekvivalence.

Nechť $[\sim a]$ a $[\sim b]$ jsou nějaké třídy ekvivalence $\sim$ a nechť existuje prvek $x \in [\sim a] \cap [\sim b]$. Potom ovšem libovolný prvek $k \in [\sim a]$ je ekvivalentní s prvkem x (jsou v téže třídě ekvivalence) a zároveň musí být x ekvivalentní s libovolným prvkem $l \in [\sim b]$. S tranzitivity ekvivalence $\sim$ pak plyne, že také prvky k a l jsou ekvivalentní, a tudíž patří do téže třídy rozkladu. Ukázali jsme, že libovolné dva prvky $k \in [\sim a]$ a $l \in [\sim b]$ patří vždy do téže třídy ekvivalence, proto $[\sim a] = [\sim b]$ a důkaz je ukončen.

Mnozí z Vás se teď možná ptají, proč je ukončen? Všimněte si, že jsme použili nepřímý důkaz. Předpoklad naší věty je $[\sim a]$ *a* $[\sim b]$ *jsou dvě různé třídy ekvivalence* $\sim$ a důsledek $[\sim a] \cap [\sim b] = \emptyset$. Vyšli jsme z negace důsledku $x \in [\sim a] \cap [\sim b]$ a došli k negaci předpokladu $[\sim a] = [\sim b]$.

□

Definice 5.25. Mějme neprázdné podmnožiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ množiny A, pro které platí:

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ a
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$.

Potom podmnožiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tvoří *rozklad množiny A*.

Věta 5.26. *Různé třídy ekvivalence $\sim$ na množině A tvoří rozklad množiny A.*

Důkaz. Plyne přímo z věty 5.24 a definice 5.25.

□

Příklad 5.27. Určete třídy ekvivalence z příkladu 5.17

Řešení. Studenti sedící v jedné z řad v posluchárně jsou navzájem ekvivalentní. Proto třídou této ekvivalence $\sim$ je množina všech studentů sedících v nějaké neprázdné řadě. Vezmeme-li si nějaké dva studenty x, y, kteří nesedí ve stejné řadě, pak $x \nsim y$. Třída ekvivalence $[\sim x]$ obsahuje jen všechny studenty, kteří sedí s x v jedné řadě (včetně x) a třída ekvivalence $[\sim y]$ obsahuje jen všechny studenty, kteří sedí s y v jedné řadě (včetně y). Je evidentní, že $[\sim x] \cap [\sim y] = \emptyset$ a $[\sim x], [\sim y]$ reprezentují různé třídy ekvivalence na množině A. Je také zřejmé, že pokud provedeme sjednocení studentů ve všech neprázdných řadách (sjednocení všech různých tříd ekvivalence) tak dostaneme množinu A všech studentů v posluchárně.

▲

Příklad 5.28. Určete třídy ekvivalence z příkladu 5.18

Řešení. Připomeňme $A = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, přičemž $\vec{u} = (0,1)$, $\vec{v} = (1,0)$, $\vec{w} = (1,1)$, $\vec{x} = (0,-1)$, $\vec{y} = (-1,0)$, $\vec{z} = (1,-1)$ a $\forall \vec{a}, \vec{b} \in A : \vec{a} \sim \vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k \cdot \vec{b}$.

Vidíme, že vektor $\vec{u} = (0,1)$ je ekvivalentní jen sám se sebou a s vektorem $\vec{x} = (0,-1)$. Neboť $(0,1) = (-1) \cdot (0,-1)$, zatímco $k \in \mathbb{R}$ takové, že by platilo $(0,1) = k \cdot (1,0)$ nebo $(0,1) = k \cdot (1,1)$ nebo $(0,1) = k \cdot (-1,0)$ nebo $(0,1) = k \cdot (1,-1)$, vůbec neexistuje.

Snadno ukážeme, že také $\vec{x} = (0,-1)$ je ekvivalentní jen sám se sebou a s vektorem $\vec{u} = (0,1)$.

Vektor $\vec{v} = (1,0)$ je ekvivalentní jen sám se sebou a s vektorem $\vec{y} = (-1,0)$, neboť $(1,0) = (-1) \cdot (-1,0)$, zatímco $k \in \mathbb{R}$ takové, že by platilo $(1,0) = k \cdot (0,1)$ nebo $(1,0) = k \cdot (1,1)$ nebo $(1,0) = k \cdot (0,-1)$ nebo $(1,0) = k \cdot (1,-1)$, vůbec neexistuje.

Opět lze snadno ověřit, že také $\vec{y} = (-1,0)$ je ekvivalentní jen sám se sebou a s vektorem $\vec{u} = (1,0)$.

Vektory $\vec{w} = (1,1)$ a $\vec{z} = (1,-1)$ jsou ekvivalentní jen sami se sebou.

Proto různé třídy ekvivalence $\sim$ jsou:

- $[\sim \vec{u}] = \{\vec{u}, \vec{x}\}$.
- $[\sim \vec{v}] = \{\vec{v}, \vec{y}\}$.
- $[\sim \vec{w}] = \{\vec{w}\}$.
- $[\sim \vec{z}] = \{\vec{z}\}$.

Ještě dodejme, že jako „reprezentanta“ třídy ekvivalence si můžeme vybrat kterýkoliv prvek, jenž do této třídy patří, protože například $[\sim \vec{u}] = [\sim \vec{x}]$ a $[\sim \vec{v}] = [\sim \vec{y}]$.

▲

Definice 5.29. Nechť $a, b, m \in \mathbb{N}_0$. Potom jsou dvě čísla a, b *kongruentní modulo* m (zapíšeme $a \equiv b \pmod{m}$), pokud a i b dávají tentýž zbytek $z \in [0, m-1]$ při dělení číslem m.

Příklad 5.30. Mějme množinu $A = \{5, 15, 29, 31, 45, 50, 64, 66, 82\}$ a na ní definovánu relaci kongruence modulo 7. Ověřte obecně, že relace kongruence modulo m je ekvivalence na množině $\mathbb{N}_0$ a najděte různé třídy kongruence modulo 7 na A.

Řešení. Určitě platí $a \equiv a \pmod{m}$ pro libovolné $a \in \mathbb{N}_0$, neboť totéž číslo musí dávat tentýž zbytek při dělení $m \in \mathbb{N}_0$. Kongruence je reflexivní.

Platí-li, že a dává při dělení číslem m tentýž zbytek z jako $b \in \mathbb{N}_0$, pak b dává při dělení číslem m tentýž zbytek z jako a. Kongruence je symetrická.

Platí-li, že a, b dávají při dělení m tentýž zbytek z a b, c, kde $c \in \mathbb{N}_0$, také stejný zbytek z, pak nutně čísla a, c musí mít při dělení m tentýž zbytek z. R je tranzitivní.

Relace kongruence modulo m je na $\mathbb{N}_0$ relací ekvivalence, proto musí být ekvivalencí i na každé podmnožině $\mathbb{N}_0$.

Snadno zjistíme, že čísla $15, 29, 50, 64$ dávají při dělení číslem 7 zbytek 1, čísla $31, 45, 66$ zbytek 3 a čísla $5, 82$ zbytek 5. Proto různé třídy kongruence modulo 7 jsou:

- $[\equiv 15] = \{15, 29, 50, 64\} = [\equiv 29] = [\equiv 50] = [\equiv 64]$.
- $[\equiv 31] = \{31, 45, 66\} = [\equiv 45] = [\equiv 66]$.
- $[\equiv 5] = \{5, 82\} = [\equiv 82]$.

▲

5.3 Relace částečné uspořádání

Definice 5.31. Každá relace R na množině A, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní se nazývá *částečné uspořádání množiny* A, stručněji *částečné uspořádání*.

Předefinujme relaci R v příkladu 5.10 tak, že stanovíme:

- Každý člověk je v relaci sám se sebou a
- pro každé dva různé lidi $x, y \in A$ platí $xRy \Leftrightarrow x$ je starší než y.

Relace R na množině A je potom nejen antisymetrická a tranzitivní, ale také reflexivní. Tudíž jde o částečné uspořádání.

Podobně předefinujme také relaci R v příkladu 5.20. Stanovme:

- Každý žák je v relaci sám se sebou a

• pro každé dva různé studenty x, y platí $xRy \Leftrightarrow x$ sedí v řadě před y.

Opět obdržíme relaci R, která je částečné uspořádání.

Poznámka 5.32. Pokud je relace R na množině A částečným uspořádáním, pak místo aRb raději píšeme $a \preceq b$ a zápis čteme buď a *předchází nebo je rovno* b nebo b *následuje nebo je rovno* a. Nový zápis totiž velmi pěkně vystihuje vlastnosti částečného uspořádání. Občas také používáme zápis $a \prec b$, který čteme buď a *předchází* b nebo b *následuje* a.

Příklad 5.33. Ukažte, že relace *dělí* na množině $\mathbb{N}_0$ je částečné uspořádání.

Řešení. Připomeňme, že b dělí a (značíme $b \mid a$) $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}_0$ takové, že $a = b \cdot x$.

Protože $a = a \cdot 1$, tak $a \mid a$ pro každé $a \in \mathbb{N}_0$ a relace $\mid$ je reflexivní. Nechť $a, b \in \mathbb{N}_0$. Pokud $b \mid a$ a $a \mid b$, pak musí nutně platit $a = b$, neboť pro různá čísla by alespoň jeden ze vztahů $b \mid a$ a $a \mid b$ nemohl být platný (větší číslo nikdy nedělí menší). Proto je relace $\mid$ antisymetrická.

Nechť $a, b, c \in \mathbb{N}_0$. Jestliže $a \mid b$ a $b \mid c$, pak $\exists x, y \in \mathbb{N}_0$ tak, že $b = a \cdot x$ a $c = b \cdot y$. Z čehož plyne $c = a \cdot x \cdot y$. Tudíž $\exists x \cdot y \in \mathbb{N}_0$ takové, že $c = a \cdot (x \cdot y)$. Proto $a \mid c$. Relace $\mid$ je tranzitivní.

Protože je relace $\mid$ reflexivní, symetrická a tranzitivní, jde o částečné uspořádání.

Poněvadž je relace $\mid$ částečné uspořádání, tak můžeme psát $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a \preceq b \Leftrightarrow a \mid b$.

▲

Příklad 5.34. Nechť $\mathfrak{A}$ je libovolný systém množin na němž je definována relace R takto: $\forall A, B \in \mathfrak{A} : (A, B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B$. Dokažte, že relace R je částečné uspořádání.

Řešení. Protože $\forall A \in \mathfrak{A} : A \subseteq A$, je relace R reflexivní. Poněvadž platí $\forall A, B \in \mathfrak{A} : A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$, je relace R antisymetrická. Je-li $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$ pro $A, B, C \in \mathfrak{A}$, pak musí platit $A \subseteq C$. Relace R je tudíž i tranzitivní, a proto je R částečným uspořádáním na $\mathfrak{A}$.

Když nyní víme, že relace R je částečné uspořádání, tak definici relace můžeme přepsat: $\forall A, B \in \mathfrak{A} : A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

▲

Definice 5.35. Mějme množinu A na níž je definováno částečné uspořádání $\preceq$. Jestliže pro dva různé prvky $a, b \in A$ neplatí ani $a \prec b$, ani $b \prec a$, pak a, b nazýváme *neporovnatelné prvky.*

Mějme systém množin $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}\}$ na němž je definováno částečné uspořádání $\subseteq$ (viz 5.34). Pak například dvojice množin $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}$ nebo $\{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}$ jsou dvojice neporovnatelných prvků, neboť $\{1, 2, 3\} \nsubseteq \{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3\} \nsupseteq \{1, 2, 4\}$ a $\{1, 2, 5\} \nsubseteq \{1, 2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 5\} \nsupseteq \{1, 2, 3, 6\}$.

Na množině $A = \{2, 3, 6, 12, 15, 60\}$ je definováno částečné uspořádání $|$ (viz 5.33). V A jsou neporovnatelné například dvojice prvků $2, 3$ nebo $6, 15$, neboť $2 \nmid 3$, $3 \nmid 2$ a $6 \nmid 15$, $15 \nmid 6$.

Definice 5.36. Nechť prvky $a_1, a_2, \ldots, a_k$ patří do množiny A s částečným uspořádáním $\preceq$. Potom posloupnost $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nazýváme *řetězec* právě tehdy, když $a_1 \preceq a_2 \preceq \cdots \preceq a_k$.

Mějme opět systém množin $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}\}$ na němž je definováno částečné uspořádání $\subseteq$ (viz 5.34) a množinu $A = \{2, 3, 6, 12, 15, 60\}$ s částečným uspořádáním $|$ (viz 5.33). Pak například posloupnost $(\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 6\})$ je řetězec v systému množin $\mathfrak{A}$, neboť $\emptyset \subseteq$ $\subseteq \{1, 2\} \subseteq$ $\subseteq \{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 6\}$ (jinak $\emptyset \preceq \{1, 2\} \preceq \{1, 2, 3\} \preceq \{1, 2, 3, 6\}$) a posloupnost $(2, 6, 12, 60)$ je řetězec v množině A, neboť 2 dělí 6 dělí 12 dělí 60 (jinak $2 \preceq 6 \preceq 12 \preceq 60$).

Definice 5.37. Nechť je na množině A definováno částečné uspořádání $\preceq$. Potom prvku $m \in A$ pro který platí, že žádný prvek z $A \setminus \{m\}$ jej nepředchází, říkáme *minimální prvek* v množině A.

Mějme $(\mathfrak{A}, \subseteq)$, kde $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}\}$, a $(A, |)$, kde $A = \{2, 3, 6, 12, 15, 60\}$. $\mathfrak{A}$ obsahuje jediný minimální prvek, a to $\emptyset$, neboť tento prvek jako jediný splňuje podmínku, že neexistuje množina $X \in \mathfrak{A} \setminus \{\emptyset\}$ taková, že $X \subseteq \emptyset$ (jiný zápis $X \preceq \emptyset$). V A jsou dva minimální prvky, neboť pouze pro 2 a 3 platí, že neexistuje $x \in A \setminus \{2, 3\}$ takové, že $x \mid 2$ a $x \mid 3$ (jiný zápis $x \preceq 2$ a $x \preceq 3$).

Definice 5.38. Nechť je na množině A definováno částečné uspořádání $\preceq$. Potom prvku $M \in A$ pro který platí, že žádný prvek z $A \setminus \{M\}$ jej nenásleduje, říkáme *maximální prvek* v množině A.

V systému množin $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}\}$ jsou maximální prvky $\{1, 2, 4, 5\}$ a $\{1, 2, 3, 6\}$, neboť pouze pro ty platí, že neexistuje $X \in \mathfrak{A} \setminus \{\{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}\}$ takové, že $\{1, 2, 4, 5\} \subseteq X$ a $\{1, 2, 3, 6\}\} \subseteq X$ (jiný zápis $\{1, 2, 4, 5\} \preceq X$ a $\{1, 2, 3, 6\}\} \preceq X$). V množině $A = \{2, 3, 6, 12, 15, 60\}$ je jediný maximální prvek, a to 60, protože pouze číslo 60 nedělí žádné jiné číslo z A, tedy šedesátku žádné číslo z A nenásleduje.

Definice 5.39. Mějme množinu A na níž je definováno částečné uspořádání $\preceq$. Jestliže v A existuje prvek m^* tak, že $\forall x \in A, x \neq m^* : m^* \prec x$, pak prvku m^* říkáme *nejmenší prvek* v množině A.

Pouze minimální prvek může být nejmenší (Proč?). Mějme $(\mathfrak{A}, \subseteq)$, kde $\mathfrak{A} =$ $= \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}\}$, a $(A, |)$, kde $A =$ $= \{2, 3, 6, 12, 15, 60\}$. $\mathfrak{A}$ obsahuje nejmenší prvek, a to $\emptyset$, neboť $\forall X \in \mathfrak{A} \setminus \{\emptyset\}$ platí

$\emptyset \subseteq X$, tedy $\emptyset \prec X$. V A jsou dva minimální prvky 2 a 3, ale ani jeden není nejmenší, protože $2 \nmid 3$ a $3 \nmid 2$, nebo-li $2 \not\prec 3$ a $3 \not\prec 2$, z čehož plyne, že ani 2 ani 3 všechna ostatní čísla z A nenásledují.

Definice 5.40. Mějme množinu A na níž je definováno částečné uspořádání $\preceq$. Jestliže v A existuje prvek M^* tak, že $\forall x \in A, x \neq M^* : x \prec M^*$, pak prvku M^* říkáme *největší prvek* v množině A.

Pouze maximální prvek může být největší (Proč?). V systému množin $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3,6\}\}$ jsou maximální prvky $\{1,2,4,5\}$ a $\{1,2,3,6\}$, které jsou neporovnatelné. Protože platí $\{1,2,4,5\} \not\prec \{1,2,3,6\}$ a $\{1,2,4,5\} \not\prec \{1,2,3,6\}$, tak ani jeden z prvků $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,6\}$ všechny prvky z $\mathfrak{A} \setminus \{\{1,2,4,5\}, \{1,2,3,6\}\}$ nepředcházejí, tudíž ani jeden není největší.

V množině $A = \{2,3,6,12,15,60\}$ je jediný maximální prvek, a to 60, protože každý prvek z $A \setminus \{60\}$ dělí 60, tak $\forall x \in A \setminus \{60\} : x \prec 60$ a 60 je největší.

Věta 5.41. *Každá konečná neprázdná množina A s částečným uspořádáním $\preceq$ má minimální resp. maximální prvek.*

Důkaz. Pokud by $(A, \preceq)$, kde $|A| = n, n \in \mathbb{N}$, neměla minimální prvek, tak by každému prvku $x \in A$ musel nějaký prvek z A předcházet a $|A|$ by bylo větší než n ($|A|$ by muselo být alespoň $n+1$), což není možné. Proto musí $(A, \preceq)$ obsahovat minimální prvek. Podobně bychom dokázali, že $(A, \preceq)$, kde $|A| = n, n \in \mathbb{N}$, obsahuje maximální prvek.

□

Věta 5.42. *Existuje-li v množině A s částečným uspořádáním $\preceq$ více než jeden minimální resp. maximální prvek, pak množina A nemá nejmenší resp. největší prvek.*

Důkaz. Nechť $(A, \preceq)$ obsahuje dva různé minimální prvky m_1 a m_2. Pokud by platilo $m_1 \prec m_2$, tak m_2 není minimální a pokud by platilo $m_2 \prec m_1$, tak m_1 není minimální. Proto jsou m_1 a m_2 neporovnatelné. Potom ovšem k prvku m_1 existuje prvek m_2, který jej nenásleduje a k prvku m_2 existuje prvek m_1, který jej nenásleduje. Proto ani m_1 ani m_2 nejsou nejmenší. Takto bychom ukázali, že žádný z minimálních prvků (které jsou v A alespoň dva) není nejmenší a žádný další z prvků množiny A nejmenší být nemůže. Podobně bychom dokázali neexistenci prvku největšího.

□

Věta 5.43. *Má-li konečná množina A s částečným uspořádáním $\preceq$ přesně jeden minimální resp. maximální prvek, pak je tento prvek v množině A nejmenší resp. největší prvek.*

Důkaz. Chceme ukázat, že pokud má $(A, \preceq)$, $|A| = n, n \in \mathbb{N}$, jediný minimální prvek m, pak je m nejmenší v A, tedy, že jej všechny prvky z $A \setminus \{m\}$ následují. Připomeňme, že žádný prvek z A nepředchází minimální prvek m. Proto pro každý prvek $x \in A \setminus \{m\}$ platí buď $m \prec x$ nebo jsou x, m neporovnatelné.

Z výše uvedeného plyne, že pokud vyloučíme možnost, že by m, x byly neporovnatelné (x je nějaký prvek z A), pak pro každý prvek $x \in A \setminus \{m\}$ platí $m \prec x$ a m je nejmenší v A.

Předpokládejme, že existuje $x \in A \setminus \{m\}$, který je s m neporovnatelný. Jestliže by všechny prvky z $A \setminus \{m, x\}$ prvek x následovaly nebo s ním byly neporovnatelné, tak by byl x minimální, neboť by jej žádný prvek z A nepředcházel. Což není možné, protože A obsahuje jediný minimální prvek, a to m. Proto musí existovat prvek $x_1 \in A \setminus \{m, x\}$ takový, že $x_1 \prec x$.

Pokud by byl x_1 porovnatelný s m, tak by $m \prec x_1 \prec x$, tedy by $m \prec x$, což není možné, neboť m, x jsou neporovnatelné. Proto i x_1, m jsou neporovnatelné. Opět, pokud by všechny prvky z $A \setminus \{m, x, x_1\}$ prvek x_1 následovaly nebo s ním byly neporovnatelné, tak by byl x_1 minimální, neboť by jej žádný prvek z A nepředcházel, což ovšem není možné. Proto existuje $x_2 \in A \setminus \{m, x, x_1\}$ tak, že $x_2 \prec x_1$. Stejnou metodou, jako předešle, bychom ukázali, že x_2, m jsou neporovnatelné.

Tímto způsobem dokážeme, že $A \setminus \{m\}$ obsahuje řetězec $(x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_2, x_1, x)$ (může mít nejvýše $n-1$ prvků, neboť $|A \setminus \{m\}| = n - 1$), kde všechny prvky x, x_i pro $i \in [1, n-2]$ jsou neporovnatelné s m. Proto je prvek x_{n-2} minimální, neboť všechny prvky z $A \setminus \{m\}$ jej následují a m je s ním neporovnatelný. To ovšem není možné, neboť A obsahuje jediný minimální prvek, a to m.

Ukázali jsme, že pokud by A obsahovala prvek neporovnatelný s m, tak musí obsahovat alespoň dva minimální prvky, což je vyloučeno. Proto všechny prvky v A jsou s m porovnatelné, a tudíž $\forall x \in A \setminus \{m\}$ platí, že $m \prec x$, a proto je prvek m nejmenší v A.

Důkaz druhé části, tzn. *je-li v A jediný maximální prvek M, pak je M největší* se provede téměř shodně jako důkaz předešlý, a proto je ponechán váženému a pozornému čtenáři.

□

Definice 5.44. *Hasseův diagram* množiny $(A, \preceq)$, kde $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, je rovinné schéma takové, že prvky množiny A jsou body v rovině, přičemž bod a_i je umístěn v rovině pod bod a_j pro $i, j \in [1, n], i \neq j$, a tyto jsou spojeny křivkou (případně úsečkou) právě tehdy, když $a_i \prec a_j$ a neexistuje a_k takové, že $a_i \prec a_k \prec a_j$. Hasseův diagram množiny $(A, \preceq)$ budeme značit $H(A, \preceq)$.

Mějme $(\mathfrak{A}, \subseteq)$, kde $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3, 6\}\}$ a zkonstruujme $H(\mathfrak{A}, \subseteq)$. Nejníže bude umístěn bod $\emptyset$, neboť předchází všem ostatním prvkům $\mathfrak{A}$. Všechny ostatní prvky budou nad ním. Nad $\emptyset$ umístíme bod $\{1,2\}$, neboť $\emptyset \prec \{1,2\}$ a spojíme body $\emptyset, \{1,2\}$ úsečkou. Protože $\{1,2\} \prec \{1,2,3\}$, $\{1,2\} \prec \{1,2,4\}$ a $\{1,2\} \prec \{1,2,5\}$, tak body $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}$ budou umístěny nad $\{1,2\}$, ale mohou být umístěny na stejnou úroveň, neboť jsou vzájemně neporovnatelné. Doplníme úsečky mezi body $\{1,2\},\{1,2,3\}$ a $\{1,2\},\{1,2,4\}$ a $\{1,2\},\{1,2,5\}$. Úsečky mezi body $\emptyset,\{1,2,3\}$ a $\emptyset,\{1,2,4\}$ a $\emptyset,\{1,2,5\}$ nejsou, protože existuje prvek $\{1,2\}$ tak, že $\emptyset \prec \{1,2\} \prec \{1,2,3\}$, $\emptyset \prec \{1,2\} \prec \{1,2,4\}$ a $\emptyset \prec \{1,2\} \prec \{1,2,5\}$. Jinými slovy spojnice mezi body, které vyplývají z tranzitivity částečného uspořádání do Hasseova diagramu nezakreslujeme!

Nad body $\{1,2,4\},\{1,2,5\}$ musí být umístěn bod $\{1,2,4,5\}$ a nad $\{1,2,3\}$ bod $\{1,2,3,6\}$, protože $\{1,2,4\} \prec \{1,2,4,5\}$, $\{1,2,5\} \prec \{1,2,4,5\}$ a $\{1,2,3\} \prec \{1,2,3,6\}$. Mezi body $\{1,2,4\},\{1,2,4,5\}$ a $\{1,2,5\},\{1,2,4,5\}$, a $\{1,2,3\},\{1,2,3,6\}$ doplníme úsečky. Opět, spojnice vyplývající z tranzitivity relace nezakreslujeme. Body $\{1,2,3,6\},\{1,2,4,5\}$ mohou být umístěny ve stejné úrovni, neboť jsou neporovnatelné a $H(\mathfrak{A},\subseteq)$ je zkonstruován.

Dodejme ještě, že do schématu také nezakreslujeme spojnice vyplývající z reflexivity, tzn. spojnice z bodu x do bodu x pro nějaké $x \in A$, těmto spojnicím obvykle říkáme *smyčky*.

Máme částečně uspořádanou množinu $(A,|)$, kde $A = \{2,3,6,12,15,60\}$. Sestrojme $H(A,|)$. Nejníže budou umístěny body 2 a 3, neboť ostatní prvky v A jeden nebo druhý následují. Body 2 a 3 mohou být na stejné úrovni, protože jsou neporovnatelné. Nad body $2,3$ budou body $6,15$ a doplníme spojnice mezi $2,6$ a $3,6$ a $3,15$, neboť $2 \mid 6$, $3 \mid 6$ a $3 \mid 15$, tedy $2 \prec 6$, $3 \prec 6$ a $3 \prec 15$. Body $6,15$ mohou být na stejné úrovni, neboť jsou neporovnatelné. Bod 12 musí být nad bodem 6, protože $6 \mid 12$ $(6 \prec 12)$, doplníme spojnici $6,12$. Bod 60 je nad bodem 12, protože $12 \mid 60$ $(12 \prec 60)$. Doplníme spojnice $12,60$ a $15,60$, neboť $12 \mid 60$ a $15 \mid 60$ $(12 \prec 60$ a $15 \prec 60)$. Spojnice vyplývající z tranzitivity a reflexivity nezakreslujeme. V tuto chvíli je $H(A,|)$ hotov.

Definice 5.45. Relace R na množině A je *úplná* právě tehdy, když pro každou dvojici prvků $x,y \in A$ platí, že alespoň jedna z uspořádaných dvojic (x,y) a (y,x) do relace R patří.

Všimněte si, že úplná relace musí být reflexivní.

Definice 5.46. Je-li částečné uspořádání $\preceq$ úplná relace na množině A, pak se $\preceq$ nazývá *lineární* nebo-li *úplné uspořádání*.

Vidíme, že lineární uspořádání neobsahuje neporovnatelné prvky.

5.4 Zobrazení a cykly v permutacích

Definice 5.47. Mějme binární relaci $f \subseteq A \times B$ pro kterou platí, že ke každému $x \in A$ existuje přesně jedna uspořádaná dvojice $(x,y) \in f$, kde $y \in B$. Potom relaci f říkáme *zobrazení množiny A do množiny B*, což zapisujeme $f : A \to B$. Zobrazení množiny A do množiny B v diskrétní matematice také říkáme *funkce*.

Poznámka 5.48. Často také slýcháváme následující definici zobrazení $f : A \to B$, a to: *Zobrazení f každému prvku z A přiřadí jednoznačně nějaký prvek z B.* Nedá nám příliš práce rozeznat, že obě definice vlastně říkají totéž. V literatuře také můžeme najít pojem *zobrazení z množiny A do množiny B*, nikoliv *množiny A do množiny B* (Pozor na předložky!). První pojem připouští, že množina všech vzorů může být vlastní podmnožinou A, zatímco druhý říká, že množina všech vzorů je celá množina A.

Všimněte si, že v diskrétní matematice je pojem *funkce* obecnější než v matematické analýze, zatímco v matematické analýze bylo funkcí zobrazení f nějaké podmnožiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \supseteq D_f \to \mathbb{R}$), tak v diskrétní matematice je funkce f zobrazení jakékoliv množiny do jakékoliv množiny.

V případě zobrazení f píšeme raději místo $(x, y) \in f$ buď $x \to y$ nebo $f(x) = y$, což čteme buď *prvek x se zobrazí v zobrazení f na prvek y* nebo *obrazem prvku x v zobrazení f je prvek y*. Prvku $x \in A$ říkáme *vzor* a prvku $y = f(x)$ *obraz prvku x*. Množina A v zobrazení $f : A \to B$ je *množina vzorů* a množina všech prvků z B, na které se zobrazí alespoň jedno $x \in A$ se nazývá *množina obrazů*. Množině obrazů také říkáme *obor hodnot zobrazení f* a značíme jej H_f.

Příklad 5.49. Mějme relace $f_1, f_2, f_3 \subseteq A \times B$ takové, že $f_1 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\}$, $f_2 = \{(a, 1), (b, 4), (a, 2), (c, 5), (a, 3), (d, 2)\}$, $f_3 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\}$ a $A = \{a, b, c, d\}$, $B = [1, 5]$. Které z relací f_1, f_2, f_3 jsou zobrazení?

Řešení. V případě relace f_1 vidíme, že ke každému $x \in A$ je skutečně přiřazeno jediné číslo z B, proto je relace f_1 zobrazení.

Relace f_2 obsahuje například uspořádané dvojice $(a, 2), (a, 3)$, což znamená, že k prvku $a \in A$ byly přiřazeny dva různé prvky $2, 3 \in B$, a tudíž f_2 není zobrazení.

V relaci f_3 je sice k prvkům z A přiřazeno jediné číslo, ale ne ke všem. V f_3 totiž chybí uspořádaná dvojice, která by měla na první pozici d. Protože k $d \in A$ není přiřazen žádný prvek z B, tak f_3 není zobrazení.

▲

Příklad 5.50. Mějme relace f_4, f_5, f_6 takové, že $f_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$, $f_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 : y^2 = x\}$ a $f_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{arctg}(|x|)\}$. Které z relací f_4, f_5, f_6 jsou zobrazení?

Řešení. V tomto příkladu je $A = B = \mathbb{R}$.

V případě relace f_4 ne ke každému $x \in \mathbb{R}$ je přiřazeno číslo z $\mathbb{R}$. Pokud by bylo $x > 5$ nebo $x < -5$, pak nenalezneme y takové, že $x^2 + y^2 = 25$, neboť by bylo číslo $25 - x^2$ záporné a rovnice $y^2 = 25 - x^2$ by neměla řešení. Dále, pokud bychom zvolili například $x = 3$, tak $y^2 = 25 - 9 = 16$ a taková rovnice má dvě různá řešení, a to $y = 4$ a $y = -4$. Proto k číslu 3 jsou přiřazena dvě různá čísla. Odtud, relace f_4 určitě není zobrazení.

Relace f_5 obsahuje například uspořádané dvojice $(4,2),(4,-2)$, neboť $2^2 = 4$ a $(-2)^2 = 4$. Což znamená, že k prvku $4 \in \mathbb{R}$ byly přiřazeny dva různé prvky $2,-2 \in \mathbb{R}$, a tudíž f_5 není zobrazení.

Nalezněte graf funkce $y = \operatorname{arctg}(|x|)$. Už samotný fakt, že jde o funkci $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zajišťuje, že jde o zobrazení, pokud $D_f = \mathbb{R}$, neboť každá funkce f je zobrazení množiny D_f do množiny $\mathbb{R}$. Protože pro funkci $y = \operatorname{arctg}(|x|)$ platí $D_f = \mathbb{R}$, tak f_6 je zobrazení. Máte-li graf funkce $y = \operatorname{arctg}(|x|)$, pak vidíte, že opravdu každému reálnému číslu x je přiřazeno jediné reálné číslo $y \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$. Relace f_6 je zobrazení.

▲

Definice 5.51. Zobrazení $f : A \to B$ je *prosté* nebo-li *injektivní* právě tehdy, když ke každé dvojici různých vzorů $x_1 \neq x_2$ jsou přiřazeny dva různé obrazy $f(x_1) \neq f(x_2)$. Prostému zobrazení také říkáme *injekce*.

Zobrazení f_1 z příkladu 5.49 a f_6 z příkladu 5.50 nejsou prostá, neboť zobrazení f_1 přiřazuje dvěma různým prvkům $a \neq c, a, c \in A$ tentýž obraz $2 \in B$ a f_6 přiřazuje dvěma různým prvkům, například $-1, 1 \in \mathbb{R}$ jediný obraz $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$.

Příklad 5.52. Jsou zobrazení $f : A \to B$, kde $\forall x \in A : f(x) = \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor$, kde $A = \{-7,-4,-1,2\}, B = [-3,2]$ a $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, kde $g(x) = \frac{1}{x}$, prostá?

Řešení. Vidíme, že $f(-7) = -3, f(-4) = -2, f(-1) = 0$ a $f(2) = 1$. Zaprvé, každému prvku z A je přiřazen přesně jeden prvek z B, f je tedy opravdu zobrazení. Za druhé, každým dvěma prvkům z A jsou přiřazeny dva různé obrazy z B. Odtud f je prosté zobrazení.

Ke každému číslu $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje přesně jedno číslo $\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, proto je g opravdu zobrazení. Pokud $x_1 \neq x_2$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tak $\frac{1}{x_1} = g(x_1) \neq g(x_2) = \frac{1}{x_2}$. Proto je g prosté zobrazení.

▲

Definice 5.53. Mějme zobrazení $f : A \to B$ takové, že ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ tak, že $y = f(x)$. Potom o zobrazení f říkáme, že je *na množinu* B nebo-li *surjektivní*. Zobrazení na množinu B také říkáme *surjekce*.

Vidíme, že v surjekci $f : A \to B$ musí platit $B = H_f$. Pokud je zobrazení surjektivní, tak každý prvek y z množiny B je obrazem nějakého vzoru x z množiny A. Protože v zobrazení f z příkladu 5.52 existují prvky $-1, 2 \in [-3,2] = B$, které nejsou obrazy žádného prvku z A, tak f není surjektivní zobrazení.

Uvědomme si, že ke každému $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje číslo $x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tak, že $g(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$, proto je zobrazení g z příkladu 5.52 surjektivní.

Definice 5.54. Je-li zobrazení $f : A \to B$ injektivní a surjektivní, pak se nazývá *vzájemně jednoznačné* nebo-li *bijektivní*. Vzájemně jednoznačnému zobrazení také říkáme *bijekce*.

Všimněte si, že zobrazení g z příkladu 5.52 je prosté i surjektivní, tudíž jde o bijekci.

Definice 5.55. Mějme dvě zobrazení $g : A \to B$ a $f : B \to C$. Potom *složené zobrazení* $(f \circ g) : A \to C$ je takové zobrazení, že platí $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ pro každé $x \in A$. To znamená, že ve složeném zobrazení $(f \circ g) : A \to C$ nejdříve zobrazení g vzoru $x \in A$ přiřadí obraz $g(x) \in B$, a pak zobrazení f přiřadí vzoru $g(x) \in B$ obraz $f(g(x)) \in C$.

Poznámka 5.56. Máme-li složené zobrazení $(f \circ g)$, pak libovolný vzor x je nejdříve zobrazen pravým zobrazením g na obraz $g(x)$, a pak je $g(x)$ zobrazen levým zobrazením f na obraz $f(g(x))$, čili jako bychom zápis $(f \circ g)$ četli zprava doleva. V literatuře se také často objevuje jiný zápis složeného zobrazení, a to (fg). Tento zápis čteme naopak zleva doprava, tzn. nejdříve zobrazuje zobrazení f a až potom g.

Všimněte si také, že množina obrazů prvního zobrazení g musí být podmnožinou množiny vzorů druhého zobrazení f. Pokud by tomu tak nebylo, pak složené zobrazení vůbec neexistuje.

Příklad 5.57. Mějme zobrazení $g : A \to B$, kde $A = [-2, 3], B = [0, 2]$, $-2 \to 1, -1 \to 0, 0 \to 1, 1 \to 1, 2 \to 0, 3 \to 1$ a $f : B \to C$, kde $C = [-2, 1]$, $f(0) = -2, f(1) = 0, f(2) = 1$. Nalezněte složená zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$ a určete vlastnosti zobrazení g, f, $f \circ g$ a $g \circ f$.

Řešení. Nejdříve nalezneme zobrazení $(f \circ g) : A \to C$. Protože $-2 \xrightarrow{g} 1$ a $1 \xrightarrow{f} 0$, tak $-2 \xrightarrow{f \circ g} 0$. $-1 \xrightarrow{g} 1$ a $0 \xrightarrow{f} -2$, odtud $-1 \xrightarrow{f \circ g} -2$. Protože $0 \xrightarrow{g} 1$ a $1 \xrightarrow{f} 0$, tak $0 \xrightarrow{f \circ g} 0$. $1 \xrightarrow{g} 1$ a $1 \xrightarrow{f} 0$, odtud $1 \xrightarrow{f \circ g} 0$. Protože $2 \xrightarrow{g} 0$ a $0 \xrightarrow{f} -2$, tak $2 \xrightarrow{f \circ g} -2$. $3 \xrightarrow{g} 1$ a $1 \xrightarrow{f} 0$, odtud $3 \xrightarrow{f \circ g} 0$. Zobrazení $f \circ g$ můžeme zapsat takto:

$$f \circ g : A \to C,\ \text{kde}\ (f \circ g)(-2) = 0, (f \circ g)(-1) = -2, (f \circ g)(0) = 0, (f \circ g)(1) = 0, f(2) = -2, (f \circ g)(3) = 0.$$

Neboť $C = [-2, 1] \subseteq [-2, 3] = A$, tak i složené zobrazení $g \circ f : B \to B$ existuje. Víme, že $0 \xrightarrow{f} -2$ a $-2 \xrightarrow{g} 1$, $1 \xrightarrow{f} 0$ a $0 \xrightarrow{g} 1$, $2 \xrightarrow{f} 1$ a $1 \xrightarrow{g} 1$. Proto pro zobrazení $g \circ f : B \to B$ platí $(g \circ f)(0) = 1, (g \circ f)(1) = 1, (g \circ f)(2) = 1$.

Je zřejmé, že ani jedno zobrazení není surjektivní a pouze zobrazení f je injektivní (prosté).

▲

Příklad 5.58. Mějme zobrazení $g : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$, kde $g(x) = \arcsin(x)$ a $f : \langle -3, 3\rangle \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Nalezněte složená zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$ a určete vlastnosti zobrazení g, f, $f \circ g$ a $g \circ f$.

Řešení. Nakreslete si graf funkce $g(x) = \arcsin(x)$, vidíte, že $D_g = \langle -1, 1\rangle$ a $H_g = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Dále si uvědomme, že pokud $y = \sqrt{9 - x^2}$, pak $y^2 = 9 - x^2$ a dostáváme $x^2 + y^2 = 9$, což je rovnice kružnice se středem v počátku systému souřadného a poloměrem 3. Neboť $\sqrt{9 - x^2} \geqq 0$, tak grafem funkce $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ je půlkružnice se středem v počátku systému souřadného a poloměrem 3 nad osou x, přičemž krajní body $[-3, 0]$ a $[3, 0]$ do ní patří. Proto $D_f = \langle -3, 3\rangle$ a $H_f = \langle 0, 3\rangle$.

Hledejme zobrazení $f \circ g : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$. Protože $H_g = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \subseteq \langle -3, 3\rangle = D_f$, tak taková funkce existuje a má předpis $(f \circ g)(x) = \sqrt{9 - (\arcsin(x))^2}$ (místo argumentu x druhé funkce f napíšeme funkční hodnotu první funkce g). Neboť musí nutně platit, že $H_{f\circ g} \subseteq H_f = \langle 0, 3\rangle$, tak funkce $f \circ g$ není zobrazení na množinu $\mathbb{R}$, proto $f \circ g$ není surjektivní. Dále víme, že například $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$ a $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Potom $(f \circ g)(-\frac{1}{2}) = \sqrt{9 - \left(-\frac{\pi}{6}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{\pi^2}{36}} = \sqrt{9 - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2} = (f \circ g)(\frac{1}{2})$. Čili zobrazení $f \circ g$ přiřadí ke dvěma různým vzorům $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ jeden a tentýž obraz $\sqrt{9 - \frac{\pi^2}{36}}$, proto $f \circ g$ není prosté (injektivní).

Protože $H_f = \langle 0, 3\rangle \nsubseteq \langle -1, 1\rangle = D_f$, tak složené zobrazení $g \circ f$ vůbec neexistuje.

Není těžké zjistit, že zobrazení g je prosté (injektivní), ale není na množinu $\mathbb{R}$, proto není surjektivní. Ovšem zobrazení $g : \langle -1, 1\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, kde $g(x) = \arcsin(x)$, je i surjektivní, neboť tentokrát obrazy „pokrývají“ celou množinu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Stejně tak f není zobrazení na množinu $\mathbb{R}$, proto není surjektivní. Ale zobrazení $f : \langle -3, 3\rangle \to \langle 0, 3\rangle$, kde $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, by bylo surjektivní. Zobrazení f není určitě prosté, neboť například $f(2) = \sqrt{9 - 2^2} = \sqrt{5} = \sqrt{9 - (-2)^2} = f(-2)$.

Ještě si všimněte, že funkce f a g, kde $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ a $g(x) = \arcsin(x)$, nejsou zobrazení množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$ (Proč?).

▲

5.5 Bijekce konečné množiny A na sebe nebo-li permutace

Mějme množinu $A = [1, 6]$ a definujme na množině A zobrazení $\pi : A \to A$ tak, že $\pi(1) = 6, \pi(2) = 4, \pi(3) = 2, \pi(4) = 3, \pi(5) = 5$ a $\pi(6) = 1$. Není těžké ověřit, že zobrazení π je bijekce. Zobrazení π můžeme také popsat dvojřádkovou maticí tak, že do prvního řádku napíšeme všechny vzory v přirozeném pořadí a pod ně umístíme příslušné obrazy (viz následující zápis).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Zápis bijekce π můžeme ještě zjednodušit tak, že zapíšeme posloupnost $(6, 4, 2, 3, 5, 1)$, kde každá pozice v posloupnosti určuje vzor v bijekci π a číslo na této pozici, obraz příslušného vzoru. Například, protože na třetí pozici je dvojka platí $\pi(3) = 2$

nebo protože na páté pozici je pět platí $\pi(5) = 5$ atd. Čili bijekci π na množině $A = [1, 6]$ umíme zapsat jako posloupnost, tudíž permutaci bez opakování na množině $A = [1, 6]$. Pozorování zobecníme v následující definici.

Definice 5.59. Každou bijekci konečné množiny $A = [1, n]$ na sebe lze zapsat jako nějakou permutaci bez opakování na množině A. Proto *bijekci konečné množiny A na sebe* říkáme také *permutace na množině A* nebo stručněji *permutace*.

Uvědomme si, že prvky každé konečné množiny můžeme přeznačit čísly z množiny $[1, n]$. Proto bijekci libovolné konečné množiny na sebe můžeme nazvat permutací.

Vraťme se k permutaci $\pi = (6, 4, 2, 3, 5, 1)$. Všimněte si, že 2 se zobrazí na 4, 4 na 3 a 3 zpět na 2. Vytvoří se tedy jakýsi cyklus $2 \to 4 \to 3 \to 2$ délky 3. Dále, 1 se zobrazí na 6 a 6 zpět na 1, vzniká cyklus $1 \to 6 \to 1$ délky 2, a konečně 5 se zobrazí na 5, vzniká cyklus $5 \to 5$ délky 1. Cykly jsou disjunktní, neboť žádný prvek z $[1, 6]$ není ve více cyklech. Dále, každý prvek z $[1, 6]$ do nějakého cyklu patří. Permutaci $\pi = (6, 4, 2, 3, 5, 1)$ můžeme také zapsat pomocí disjunktních cyklů, a to $\pi = (2, 4, 3)(1, 6)(5)$, přičemž víme, že v zápisu pomocí cyklů nalezneme obraz čísla buď napravo od něj nebo na začátku cyklu, pokud je číslo na konci cyklu. V případě cyklu délky jedna je jediné číslo v cyklu obrazem sebe sama. Pozorování opět shrneme v následující definici a větě.

Definice 5.60. Nechť π je permutace na konečné množině $A = [1, n]$ a $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$. Potom *cyklem permutace* π rozumíme posloupnost $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, pokud platí:

- $\pi(a_i) = a_{i+1}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $\pi(a_k) = a_1$, je-li $k > 1$,
- $\pi(a_1) = a_1$, je-li $k = 1$.

Věta 5.61. *Každou permutaci π na konečné množině $A = [1, n]$ můžeme zapsat jako složení cyklů na vzájemně disjunktních podmnožinách množiny A.*

Poznámka 5.62. Máme-li permutaci například $\pi = (6, 4, 2, 3, 5, 1)$ musíme vždy zdůraznit, zda jde o zápis cyklický nebo o zápis „jednořádkový“. V prvním případě by totiž platilo $\pi(6) = 4, \pi(4) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 5, \pi(5) = 1$ a $\pi(1) = 6$, zatímco ve druhém případě $\pi(1) = 6, \pi(2) = 4, \pi(3) = 2, \pi(4) = 3, \pi(5) = 5$ a $\pi(6) = 1$.

Příklad 5.63. Mějme dvě permutace zapsané „jednořádkově“, a to $\pi_1 = (8, 1, 5, 6, 2, 7, 4, 3)$ a $\pi_2 = (5, 6, 2, 4, 1, 8, 3, 7)$. Přepište je do cyklického tvaru a nalezněte složené permutace $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ a $\Pi = \pi_2 \circ \pi_1$.

Řešení. Pokusíme se přepsat permutaci π_1 do cyklického tvaru. První cyklus zpravidla začínáme nejmenším číslem, tj. jedničkou. Víme, že 1 se zobrazí na 8, proto vedle jedničky napíšeme 8, 8 se zobrazí na 3, vedle 8 píšeme 3, 3 se zobrazí na 5, vedle 3 píšeme 5, 5 se zobrazí na 2, vedle 5 píšeme 2 a konečně 2 se zobrazí na 1, tudíž uzavřeme závorku a máme první cyklus $(1, 8, 3, 5, 2)$. Další cyklus začneme nejmenším dosud nezařazeným číslem, tj. čtyřkou. 4 se zobrazí na 6, 6 na 7 a 7 na 4, máme další cyklus $(4, 6, 7)$. Protože jsou v tuto chvíli zařazena všechna čísla do nějakého cyklu máme $\pi_1 = (1, 8, 3, 5, 2)(4, 6, 7)$.

Nyní se budeme věnovat permutaci π_2. První cyklus opět začneme jedničkou. 1 se zobrazí na 5, 5 se zobrazí na 1. Máme první cyklus $(1, 5)$. Druhý začneme dvojkou. 2 se zobrazí na 6, 6 se zobrazí na 8, 8 se zobrazí 7, 7 se zobrazí na 3 a 3 se zobrazí na 2. Máme další cyklus $(2, 6, 8, 7, 3)$. Poslední cyklus začneme čtyřkou. 4 se zobrazí na 4. Máme cyklus délky jedna, a to (4). Odtud $\pi_2 = (1, 5)(2, 6, 8, 7, 3)(4)$.

Najdeme cyklický zápis permutace $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ tak, že použijeme cyklické zápisy permutací π_1 a π_2. Platí $1 \stackrel{\pi_2}{\to} 5$ a $5 \stackrel{\pi_1}{\to} 2$, proto $1 \stackrel{\pi_1\circ\pi_2}{\to} 2$, $2 \stackrel{\pi_2}{\to} 6$ a $6 \stackrel{\pi_1}{\to} 7$, proto $2 \stackrel{\pi_1\circ\pi_2}{\to} 7$, $7 \stackrel{\pi_2}{\to} 3$ a $3 \stackrel{\pi_1}{\to} 5$, proto $7 \stackrel{\pi_1\circ\pi_2}{\to} 5$, $5 \stackrel{\pi_2}{\to} 1$ a $1 \stackrel{\pi_1}{\to} 8$, proto $5 \stackrel{\pi_1\circ\pi_2}{\to} 8$, $8 \stackrel{\pi_2}{\to} 7$ a $7 \stackrel{\pi_1}{\to} 4$, proto $8 \stackrel{\pi_1\circ\pi_2}{\to} 4$, $4 \stackrel{\pi_2}{\to} 4$ a $4 \stackrel{\pi_1}{\to} 6$, proto $4 \stackrel{\pi_1\circ\pi_2}{\to} 6$, $6 \stackrel{\pi_2}{\to} 8$ a $8 \stackrel{\pi_1}{\to} 3$, proto $6 \stackrel{\pi_1\circ\pi_2}{\to} 3$, $3 \stackrel{\pi_2}{\to} 2$ a $2 \stackrel{\pi_1}{\to} 1$, proto $3 \stackrel{\pi_1\circ\pi_2}{\to} 1$. Máme první a poslední cyklus $(1, 2, 7, 5, 8, 4, 6, 3)$, odtud cyklický zápis permutace π je $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 = (1, 2, 7, 5, 8, 4, 6, 3)$. Vidíme, že π obsahuje jediný cyklus.

Přejdeme k cyklickému zápisu permutace $\Pi = \pi_2 \circ \pi_1$. Opět použijeme cyklické zápisy permutací π_1 a π_2. Platí $1 \stackrel{\pi_1}{\to} 8$ a $8 \stackrel{\pi_2}{\to} 7$, proto $1 \stackrel{\pi_2\circ\pi_1}{\to} 7$, $7 \stackrel{\pi_1}{\to} 4$ a $4 \stackrel{\pi_2}{\to} 4$, proto $7 \stackrel{\pi_2\circ\pi_1}{\to} 4$, $4 \stackrel{\pi_1}{\to} 6$ a $6 \stackrel{\pi_2}{\to} 8$, proto $4 \stackrel{\pi_2\circ\pi_1}{\to} 8$, $8 \stackrel{\pi_1}{\to} 3$ a $3 \stackrel{\pi_2}{\to} 2$, proto $8 \stackrel{\pi_2\circ\pi_1}{\to} 2$, $2 \stackrel{\pi_1}{\to} 1$ a $1 \stackrel{\pi_2}{\to} 5$, proto $2 \stackrel{\pi_2\circ\pi_1}{\to} 5$, $5 \stackrel{\pi_1}{\to} 2$ a $2 \stackrel{\pi_2}{\to} 6$, proto $5 \stackrel{\pi_2\circ\pi_1}{\to} 6$, $6 \stackrel{\pi_1}{\to} 7$ a $7 \stackrel{\pi_2}{\to} 3$, proto $6 \stackrel{\pi_2\circ\pi_1}{\to} 3$, $3 \stackrel{\pi_1}{\to} 5$ a $5 \stackrel{\pi_2}{\to} 1$, proto $3 \stackrel{\pi_2\circ\pi_1}{\to} 1$. Permutace Π obsahuje jediný cyklus $(1, 7, 4, 8, 2, 5, 6, 3)$. Cyklický zápis permutace Π je $\Pi = \pi_2 \circ \pi_1 = (1, 7, 4, 8, 2, 5, 6, 3)$.

Je patrné, že skládání permutací není komutativní, neboť $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \neq \pi_2 \circ \pi_1 = \Pi$.

▲

Definice 5.64. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak n-tou mocninu permutace π budeme definovat rekurentně, a to $\pi^1 = \pi$ a $\pi^{n+1} = \pi^n \circ \pi = \pi \circ \pi^n$.

Z definice plyne, že $\pi^n = \underbrace{\pi \circ \pi \circ \cdots \circ \pi}_{n}$ pro každé přirozené n, neboť je známo, že skládání libovolných zobrazení je asociativní (platí $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$, pro libovolná zobrazení f, g, h jejichž skládání je možné).

Ještě dodejme, že permutace na množině $A = [1, n]$, kterou můžeme zapsat „jednořádkově" $(1, 2, 3, \ldots, n-1, n)$ nebo cyklicky $(1)(2)(3)\ldots(n-1)(n)$ se nazývá *identita* a značíme ji *id*.

Definice 5.65. Mějme nejmenší možné $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\pi^k = id$, kde π je nějaká permutace. Potom číslo k nazýváme *řád permutace* π.

Příklad 5.66. Permutace π je zadána „jednořádkově" takto $\pi = (6, 4, 2, 3, 5, 1)$. Nalezněte $\pi^2, \pi^3, \pi^4, \pi^5$ a π^6.

Řešení. Permutaci π si zapíšeme cyklicky $\pi = (1,6)(2,4,3)(5)$. Potom $\pi^2 = \pi \circ \pi = (1)(2,3,4)(5)(6)$, $\pi^3 = \pi \circ \pi^2 = (1,6)(2)(3)(4)(5)$, $\pi^4 = \pi \circ \pi^3 = (1)(2,4,3)(5)(6)$, $\pi^5 = \pi \circ \pi^4 = (1,6)(2,3,4)(5)$, $\pi^6 = \pi \circ \pi^5 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$. Vidíme, že $\pi^6 = id$, proto číslo 6 je řádem permutace $\pi = (2,3,4)(1,6)(5)$.

▲

Věta 5.67. *Mějme permutaci π s m cykly, přičemž čísla $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{N}$ jsou délky cyklů. Potom řád k permutace π, je nejmenší společný násobek čísel $c_1, c_2, \ldots, c_m$ ($k = nsn\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$).*

Vrátíme-li se k příkladu 5.66, tak vidíme, že $nsn\{3,2,1\} = 6$ a řád permutace π je opravdu 6.

Definice 5.68.
Permutace σ pro kterou platí $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi = id$ se nazývá *permutace inverzní k permutaci* π a budeme ji značit π^{-1}.

Věta 5.69. *Permutace π obsahuje cyklus $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ právě tehdy, když permutace π^{-1} obsahuje cyklus $(a_1, a_k, a_{k-1} \ldots, a_3, a_2)$.*

Poznámka 5.70. Populárně řečeno, permutace π a π^{-1} obsahují vzájemně opačné cykly. Z toho plyne, že mají tentýž řád.

Dejme si příklad. Mějme permutaci $\pi = (2,3,4)(1,6)(5)$. Potom podle věty 5.69 je $\pi^{-1} = (2,4,3)(1,6)(5)$, neboť cykly délky 1 a 2 zůstanou stejné. Nalezněme $\pi \circ \pi^{-1} = (1)(2)(3)(4)(5)(6) = id$ a $\pi^{-1} \circ \pi = (1)(2)(3)(4)(5)(6) = id$. Tímto jsme ověřili, že permutace π^{-1} je vskutku inverzní k π. Obě permutace mají řád $k = nsn\{3,2,1\} = 6$.

Jistě jste si všimli, že cykly v permutacích nám výrazně usnadnily hledání permutace inverzní a jejího řádu. Jenže se asi ptáte, k čemu je nám řád permutace a permutace inverzní?

V kasínech bývá k míchání karet často používán, strojek. Dejme tomu, že máme strojek, který míchá karty tak, že balíček 32 karet rozdělí na půlky a karty vsune mezi sebe. Přesněji, popisuje-li pořadí karet před zamícháním posloupnost $(1, 2, 3, \ldots, 31, 32)$, pak pořadí karet po prvním zamíchání je popsatelné posloupností $(1, 17, 2, 18, 3, 19, \ldots, 16, 32)$. Posloupnost $(1, 17, 2, 18, 3, 19, \ldots, 16, 32)$ je vlastně nějaká permutace π, kterou můžeme zapsat i cyklicky. Aby se nám to lépe dařilo, popišme ji dvojřádkovou maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 30 & 31 & 32 \\ 1 & 17 & 2 & 18 & 3 & 19 & \ldots & 31 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že taková permutace každé liché číslo $2k-1$, $k = 1, 2, \ldots, 16$, zobrazí na číslo k, zatímco každé sudé číslo $2k$ zobrazí na $k + 16$. Nyní již poměrně snadno najdeme cykly permutace. Určitě víme, že $\pi = (1)(32)\ldots$. Dále π obsahuje cykly $(2, 17, 9, 5, 3)$, $(4, 18, 25, 13, 7)$, $(6, 19, 10, 21, 11)$, $(8, 20, 26, 29, 15)$, $(12, 22, 27, 14, 23)$ a $(16, 24, 28, 30, 31)$. Takže π má pouze cykly délky 1 nebo 5, proto řád permutace π je 5. Z čehož plyne, že takový způsob míchání vytvoří jen pět různých zamíchání z 32! možných, a navíc, po každém pátém zamíchání dostaneme totéž pořadí karet, jaké bylo na počátku!

Představme si stroječek, který by poprvé zamíchal karty zcela libovolně a toto zamíchání bychom v něm zafixovali. Popišme takové zamíchání nějakou permutací π a převeďme ji do cyklického tvaru. Pak snadno najdeme permutaci inverzní π^{-1} (obrácením orientace cyklů viz věta 5.69). Pokud bychom ji strojku „naprogramovali“ tak, že by poprvé míchal dle permutace π a podruhé dle permutace π^{-1}, potom by vytvářel jen dvě různá zamíchání, a navíc bychom po každém sudém zamíchání obdrželi stejné pořadí karet jako na počátku.

$\boxed{\Sigma}$ Pojmy k zapamatování

- — n-ární a binární relace na množině A ($R \subseteq A^n$ a $R \subseteq A^2$).
- — Reflexivita: $\forall a \in A : aRa$.
- — Symetrie: $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$.
- — Antisymetrie: $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$.
- — Tranzitivita: $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.
- — Úplnost: $\forall a, b \in A : aRb \vee bRa$.
- — Diagram a matice sousednosti relace.
- — Ekvivalence $\sim$ je relace reflexivní, symetrická a tranzitivní, třídy ekvivalence.
- — Částečné uspořádání $\preceq$ je relace reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, Hasseův diagram.
- — Minimální resp. maximální prvek $m \in (A, \preceq)$: $\nexists x \in A \setminus \{m\} : x \prec m$ resp. $\nexists x \in A \setminus \{m\} : m \prec x$.
- — Nejmenší resp. největší prvek $m^* \in (A, \preceq)$: $\forall x \in A \setminus \{m^*\} : m^* \prec x$ resp. $\forall x \in A \setminus \{m^*\} : x \prec m^*$.
- — Zobrazení je $f \subseteq A \times B$, kde $\forall x \in A, \exists! y \in B : (x, y) \in f$.
- — Injekce f: $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- — Surjekce f: $\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)$.
- — Bijekce je injekce i surjekce.
- — Bijekce množiny A na sebe je permutace π.
- — Zápis permutace pomocí cyklů.
- — Řád permutace a permutace inverzní.

Pro zájemce:

Máme-li na množině A definovánu *binární operaci* $\triangle$, pak musí platit, že ke každým dvěma prvkům $a, b \in A$ je jednoznačně přiřazen nějaký prvek $c \in A$, což zapisujeme takto $a \triangle b = c$, c tedy chápeme jako výsledek operace $a \triangle b$ a je určen jednoznačně. Například sčítání a násobení na $\mathbb{N}$ jsou jistě binární operace. Uspořádané dvojici $(A, \triangle)$ říkáme *algebraická struktura.*

Vezměme si množinu S všech permutací na množině $X = [1, n]$ definujme na ní binární operaci skládání $\circ$ (složením libovolných dvou permutací z S dostaneme vždy jedinou permutaci z S). Máme tudíž algebraickou strukturu $(S, \circ)$.

Protože je skládání zobrazení asociativní, je také skládání permutací asociativní, platí tudíž $\forall \pi, \sigma, \omega \in S : \pi \circ (\sigma \circ \omega) = (\pi \circ \sigma) \circ \omega$. Dále je v S identita id a pro ní platí $\pi \circ id = id \circ \pi = \pi$, jestliže π je libovolná permutace z S (Vyzkoušejte si!). Můžeme říci, že se id chová vůči skládání neutrálně (jako 0 vůči sčítání a 1 vůči násobení), proto také permutaci id říkáme *neutrální prvek.* Víme také, že ke každé permutaci $\pi \in \S$ umíme najít permutaci inverzní π^{-1}, pro kterou platí $\pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = id$.

Platí-li v algebraické struktuře asociativní zákon, má-li neutrální prvek a ke každému prvku prvek inverzní, pak jí říkáme *grupa.* Odtud $(S, \circ)$ je grupa. Grupě $(S, \circ)$ říkáme *grupa permutací.*

Výzkumem algebraických struktur, zvláště pak grup, se věnuje teoretická algebra, která je, dá se říci, uhelným kamenem celé matematiky! Je obecně známo, že každá konečná grupa je izomorfní s nějakou podgrupou grupy permutací. Což znamená, že řešíme-li nějaký problém v libovolné konečné grupě, pak si jej umíme převést do řeči permutací s operací skládání. Jelikož je již grupa permutací velmi dobře prozkoumána, tak se nepřehledný problém v nějaké libovolné konečné grupě může tímto „překladem" do grupy permutací výrazně projasnit.

Příklady k procvičení

1. Může existovat na množině A relace R taková, že je zároveň symetrická i antisymetrická? Pokud ne, zdůvodněte. Pokud ano, uveďte příklad.

2. Kolik existuje relací na n-prvkové množině A, které nejsou reflexivní?

3. Kolik existuje relací na n-prvkové množině A, které jsou symetrické?

4. Kolik existuje relací na n-prvkové množině A, které jsou reflexivní a symetrické?

5. Kolik existuje relací na n-prvkové množině A, které nejsou symetrické?

6. Určete různé třídy ekvivalence $\equiv \pmod 5$ na množině $A = \{5, 16, 19, 50, 59, 61, 75\}$.

7. Mějme v rovině čtyři body o souřadnicích $X[0,0]$, $Y[1,0]$, $Z[1,1]$ a $U[0,1]$. Proložme těmito body všechny možné přímky a ty budou tvořit množinu A. Na A definujme relaci R tak, že $\forall p, q \in A : pRq \Leftrightarrow p \parallel q$. Je relace R ekvivalence? Pokud ano, určete různé třídy ekvivalence.

8. Je relace R v (A, R), kde $A = \{0, 3, 6, 9\}$ a $R = \{(0, 0), (3, 6), (9, 3), (0, 9), (3, 3), (6, 6), (6, 3), (3, 9), (9, 9), (9, 0)\}$ ekvivalence?

9. Dokažte, že R v (A, R), kde A je množina všech tříprvkových podmnožin množiny $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a pro každé dvě množiny $M, N \in A$ platí $(M, N) \in R \Leftrightarrow$ mají M a N stejný největší prvek, je ekvivalence. Nalezněte všechny různé třídy této ekvivalence.

10. Dokažte, že R v (A, R), kde $A = \mathbb{C}$ a $\forall (a + bi), (x + yi) \in \mathbb{C} : (a + bi)R(x + yi) \Leftrightarrow a = x$, je ekvivalence. Umíte popsat, co tvoří třídy této ekvivalence v Gaussově rovině? (Komplexní číslo $a + bi$ umíme zakreslit jako bod v rovině se souřadnicemi $[a, b]$, pokud zakreslíme všechna komplexní čísla, pak takto vzniklé body vyplní Gaussovu rovinu.)

11. Mějme $(A, |)$, kde $A = \{2, 5, 15, 20, 60, 300\}$. Nalezněte maximální, minimální, nejmenší a největší prvky množiny A, nějaký řetězec délky alespoň 4 a zakreslete Hasseův diagram množiny A.

12. Na systému množin $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ je definováno částečné uspořádání $\subseteq$. Určete maximální, minimální, nejmenší a největší prvky množiny A, nalezněte nějaký řetězec délky alespoň 4 a zakreslete Hasseův diagram systému množin $\mathfrak{A}$.

13. Je relace R v (A, R), kde $A = M^2$, $M = \{1, 2, 3\}$ a $\forall (a, b), (x, y) \in M^2 : (a, b)R(x, y) \Leftrightarrow a \leqq x$, částečné uspořádání?

14. Je relace R v (A, R) částečné uspořádání, pokud A je množina lidí a $\forall a, b \in A : aRb \Leftrightarrow a$ je vyšší nebo stejně vysoký jako b?

15. Najděte alespoň dvě úplná uspořádání na $\mathbb{N}$.

16. Mějme zobrazení $g : A \to B$, kde $\forall x \in A : g(x) = 3x - 2$, $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{1, 4, 16\}$ a $f : B \to C$, kde $\forall x \in B : f(x) = \log_2(x)$, $C = [0, 4]$. Nalezněte složená zobrazení $f \circ g$ a $g \circ f$ a určete vlastnosti zobrazení g, f, $f \circ g$ a $g \circ f$.

17. Mějme zobrazení $g : \langle -\pi, \pi \rangle \to \langle -1, 1 \rangle$, kde $\forall x \in \langle -\pi, \pi \rangle : g(x) = \cos(x)$, a $f : \langle - -2, 2 \rangle \to \langle \frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^3 \rangle$, kde $\forall x \in \langle -2, 2 \rangle : f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$. Nalezněte složená zobrazení $f \circ g$ a $g \circ f$ a určete vlastnosti zobrazení g, f, $f \circ g$ a $g \circ f$.

18. Mějme permutace $\pi_1 = (7, 4, 3, 6, 5, 2, 8, 1)$ a $\pi_2 = (3, 6, 1, 5, 4, 2, 8, 7)$ zadané jednořádkově. Přepište obě permutace do cyklického tvaru a najděte permutace $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, $\Pi = \pi_2 \circ \pi_1$, π^2 a Π^3.

19. Mějme permutace $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ a $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 4 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Přepište obě permutace do cyklického tvaru. Dále, najděte permutace π_1^{-1}, π_2^{-1} a řády permutací $\pi_1, \pi_2, \pi_1^{-1}, \pi_2^{-1}$.

20. Dokažte, že jestliže jsou zobrazení $f : A \to B$ a $g : B \to C$ prostá, pak i zobrazení $g \circ f : A \to C$ je prosté.

21. Dokažte, že jestliže jsou zobrazení $f : A \to B$ a $g : B \to C$ surjektivní, pak i zobrazení $g \circ f : A \to C$ je surjektivní.

22. Dokažte nebo vyvraťte, že jestliže jsou zobrazení $f : A \to B$ a $g : C \to D$ prostá, přičemž platí $B \subset C$ (B je vlastní podmnožinou C), pak i zobrazení $g \circ f : A \to D$ je prosté.

23. Dokažte nebo vyvraťte, že jestliže jsou zobrazení $f : A \to B$ a $g : C \to D$ surjektivní, přičemž platí $B \subset C$, pak i zobrazení $g \circ f : A \to D$ je surjektivní.

24. Dokažte větu 5.67.

Klíč k příkladům k procvičení

1. Ano, např. $A = [1, 5]$, $R = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$.

2. $2^{n^2}(1 - \frac{1}{2^n})$.

3. $2^{\binom{n+1}{2}}$.

4. $2^{\binom{n}{2}}$.

5. $2^{n^2} - (\sqrt{2})^{n^2+n}$.

6. $[\equiv 5] = \{5, 50, 75\}$, $[\equiv 16] = \{16, 61\}$ a $[\equiv 19] = \{19, 59\}$.

7. Ano, R je ekvivalence. Nechť $p = UZ$, $q = UY$, $r = UX$, $m = ZY$, $n = ZX$, $o = XY$, potom $[\sim p] = \{p, o\}$, $[\sim r] = \{r, m\}$, $[\sim q] = \{q\}$, $[\sim n] = \{n\}$.

8. R není ekvivalence, neboť není tranzitivní.

9. Ano, R je ekvivalence. $[\sim \{1, 2, 5\}] = \{\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$, $[\sim \{1, 2, 4\}] = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, $[\sim \{1, 2, 3\}] = \{\{1, 2, 3\}\}$.

10. Ano, R je ekvivalence. Nechť $a \in \mathbb{R}$, pak $[\sim a]$ je přímka kolmá na reálnou osu (osa x) procházející bodem $[a, 0]$.

11. Minimální prvky jsou $2, 5$, maximální 300, nejmenší neexistuje, největší je 300, řetězec $(5, 15, 60, 300)$.

12. Minimální prvek je $\emptyset$, maximální $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, nejmenší je $\emptyset$, největší je $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, řetězec $(\emptyset, \{2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 5\})$.

13. R není částečné uspořádání, neboť není antisymetrická $((1, 2)R(1, 3) \wedge (1, 3)R(1, 2) \wedge (1, 2) \neq (1, 3))$.

14. Pokud jsou v A dva lidé stejně vysocí, pak R není antisymetrická, tudíž není částečné uspořádání.

15. Relace $\leqq$ je na $\mathbb{N}$ úplné uspořádání. Mějme dvě různá přirozená čísla a, b zapsaná v desítkové soustavě $a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n$, $b = b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 10^2 +$

$+ \cdots + b_m \cdot 10^m$, kde $m, n \in \mathbb{N}_0, n \geqq m$ a $a_i, b_j \in [0, 9]$ pro každé $i \in [0, n], j \in [0, m]$. Najděme nejmenší $i \in [0, n]$ takové, že $a_i \neq b_i$. Pak $b \prec a \Leftrightarrow b_i < a_i$ (lexikografické uspořádání). Relace $\preceq$ je na $\mathbb{N}$ úplné uspořádání.

16. Zobrazení g je bijektivní, zobrazení f je prosté, ale není surjektivní. Zobrazení $f \circ g : A \to C$, kde $(f \circ g)(1) = 0, (f \circ g)(2) = 2, (f \circ g)(6) = 4$, obecně $(f \circ g)(x) = \log_2(3x - 2)$, je prosté, ale není surjektivní. Zobrazení $g \circ f$ vůbec neexistuje, protože $H_f \nsubseteq A$.

17. Zobrazení g není prosté, protože např. $\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$, ale je surjektivní. Zobrazení f je bijektivní. Zobrazení $f \circ g : \langle -\pi, \pi \rangle \to \langle \frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^3 \rangle$, kde $(f \circ g)(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)+1}$, není prosté, neboť $(f \circ g)(-\pi) = \mathrm{e}^{\cos(-\pi)+1} = \mathrm{e}^{-1+1} = \mathrm{e}^0 = 1 = \mathrm{e}^{\cos(\pi)+1} = (f \circ g)(\pi)$, a není surjektivní, protože například k e^3 neexistuje $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ tak, že $(f \circ g)(x) = \mathrm{e}^3$, neboť $-1 \leqq \cos(x) \leqq 1$ a exponent $\cos(x) + 1 \in \langle 0, 2 \rangle$. Zobrazení $g \circ f$ vůbec neexistuje, protože $\langle \frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^3 \rangle \nsubseteq \langle -\pi, \pi \rangle$.

18. $\pi_1 = (1, 7, 8)(2, 4, 6)(3)(5)$, $\pi_2 = (1, 3)(2, 6)(4, 5)(7, 8)$, $\pi = (1, 3, 7)(2)(4, 6, 5)(8)$, $\Pi = (1, 8, 3)(2, 5, 4)(6)(7)$, $\pi^2 = (1, 7, 3)(2)(4, 6, 5)(8)$, $\Pi^3 = id$.

19. $\pi_1^{-1} = (1, 8, 7)(2, 6, 4)(3)(5)$, $\pi_2^{-1} = \pi_2$, řád permutací π_1 a π_1^{-1} je 3, řád permutací π_2 a π_2^{-1} je 2.

20. Přímý důkaz s využitím definice injekce.

21. Přímý důkaz s využitím definice surjekce.

22. Platí, dokažte přímo.

23. Neplatí, ukažte protipříklad.

24. Nejdříve dokažte, že jestliže je x nějaký prvek cyklu délky m v permutaci π, pak každá mocnina permutace π, která je násobkem čísla m, zobrazí prvek x na prvek x, jinými slovy $\pi^{km}(x) = x$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Kapitola 6

Princip inkluze a exkluze

Již na střední škole jsme se setkávali s úlohami následujícího typu.

Příklad 6.1. Studenti naší školy, byly dotazováni, zda pravidelně čtou některou z uvedených tiskovin. Šlo o časopisy Respekt (dále R), Reflex (dále X) a Hospodářské noviny (dále HN). Ukázalo se, že 14 studentů čte R, 14 čte HN, 16 čte X, šest čte jak R tak HN, pět čte jak R tak X a sedm čte jak HN tak X. Tři studenti čtou všechny tři tiskoviny. Ještě zbývá dodat, že bylo dotázáno 36 studentů. Kolik studentů pravidelně čte alespoň jednu z uvedených tří tiskovin? Kolik studentů nečte žádnou z uvedených tiskovin?

Řešení. Označme množinu všech čtenářů Respektu R, množinu všech čtenářů Hospodářských novin H, množinu všech čtenářů Reflexu X. Je zřejmé, že pokud chceme odpovědět na první otázku z příkladu 6.1, tak musíme nalézt $|R \cup H \cup X|$, a pokud na druhou otázku, hledáme $|\overline{R \cup H \cup X}| = |S \setminus R \cup H \cup X| = |S| - |R \cup H \cup X|$, kde S je množina všech dotazovaných studentů.

Pokud by byly množiny R, H, X disjunktní, pak by platilo $|R \cup H \cup X| = |R| + |H| + |X|$. Množiny R, H, X však disjunktní nejsou, což je patrné již v zadání, nemají prázdné průniky.

V součtu $|R|+|H|+|X|$ jsou započítány prvky z průniků $R \cap H, R \cap X$ a $H \cap X$ dvakrát (vyjma prvků z průniku $R \cap H \cap X$) a z průniku $R \cap H \cap X$ dokonce třikrát. Upravme výpočet následovně: $|R \cup H \cup X| = |R| + |H| + |X| - |R \cap H| - |R \cap X| - |H \cap X|$. Nyní jsou všechny prvky započítány právě jednou vyjma prvků z průniku $R \cap H \cap X$, neboť původně byly započítány třikrát, a pak jsme je třikrát odečetli (jsou totiž přítomny ve všech průnicích $R \cap H, R \cap X$ a $H \cap X$). Následuje poslední úprava, a to $|R \cup H \cup X| = |R| + |H| + |X| - |R \cap H| - |R \cap X| - |H \cap X| + |R \cap H \cap X|$. Nyní je každý prvek ze sjednocení množin R, H, X započítán přesně jednou a dostáváme správný výsledek. Proto $|R \cup H \cup X| = |R| + |H| + |X| - |R \cap H| - |R \cap X| - |H \cap X| + |R \cap H \cap X| = 14 + 14 + 16 - 6 - 5 - 7 + 3 = 29$ a $|S| - |R \cup H \cup X| = 36 - 29 = 7$. 29 studentů čte alespoň jednu z uvedených tiskovin a 7 nečte žádnou.

▲

V příkladu 6.1 jsme poměrně snadno našli způsob, jak zjistit počet prvků ve sjednocení tří množin, které nejsou po dvojicích disjunktní. Ale dokázali bychom totéž v případě více než tří množin? Bylo by možné myšlenku z příkladu 6.1 zobecnit?

Mějme n množin $A_1, A_2, \dots, A_n$, které nejsou disjunktní. Můžeme počet prvků ve sjednocení množin spočítat tak, že vytvoříme všechny možné průniky těchto množin, vezmeme jejich mohutnosti, a ty obdaříme znaménkem $+$, jde-li o průnik lichého počtu množin (mezi tyto průniky jsou započítány i samotné mohutnosti jednotlivých množin) nebo znaménkem $-$, jde-li o průnik sudého počtu množin?

Odpověď zní, ano, takový princip funguje obecně a je popsán v následující větě.

Věta 6.2. (princip inkluze a exkluze) *Mějme množiny $A_1, A_2, \dots, A_n$, přičemž $n \in \mathbb{N}$. Potom platí*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|J|+1} |\bigcap_{j \in J} A_j|.$$

Všimněte si, že pokud $\emptyset \neq J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, pak jde o nějaký neprázdný výběr indexů těch množin, které budou figurovat v průniku $\bigcap_{j\in J} A_j$. Takto jistě obdržíme všechny možné průniky a každý přesně jednou. Dále, číslo $(-1)^{|J|+1}$ je -1, pokud je číslo $|J|$ sudé (tzn. počet množin v průniku je sudý), a naopak je rovno 1, pokud je číslo $|J|$ liché (tzn. počet množin v průniku je lichý). Vztah ve větě 6.2 tudíž popisuje skutečnost, kterou jsme výše pojmenovali jen slovy.

Omezme se na konečné množiny. Platí-li pro $|J| = k \in \mathbb{N}, k \leqq n$ (výběr k indexů pro pevně zvolené k z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$), že $|\bigcap_{j\in J} A_j| = M_k \in \mathbb{N}_0$, pak princip inkluze a exkluze můžeme přepsat následovně.

Věta 6.3. *Mějme konečné množiny $A_1, A_2, \dots, A_n$, přičemž $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} M_k,$$

pokud pro každou neprázdnou podmnožinu J množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ s přesně $k \leqq n$ prvky platí $|\bigcap_{j\in J} A_j| = M_k \in \mathbb{N}_0$.

Máme-li množiny $A_1, A_2, \dots, A_n$, pak existuje přesně $\binom{n}{k}$ průniků k množin a každý takový průnik má mohutnost M_k. Proto je možné nahradit výraz $|\bigcap_{j\in J} A_j|$ z obecného principu inkluze a exkluze výrazem $\binom{n}{k} M_k$ a sčítací index k volit od 1 do n.

Příklad 6.4. Příběh o sedmi statečných. Nejdříve krátký úvod. Sedm statečných, je sedm rázovitých kovbojů z USA, kteří se rozhodli šířit dobro i za hranice svého státu. Na mexickém území je již dlouhodobě sužována malá vesnice nájezdy místních gangsterů, přijedou, vyplení vše, co obyvatelé nashromáždí za celý rok, znásilní ženy a odjedou. Toto se periodicky opakuje. Sedm statečných se odhodlalo vesnici chránit. Po odražení zvláště prudkého útoku gangsterů se oněch sedm kovbojů rozhodlo navštívit místní hostinec. Při příchodu odevzdali obsluhující Juanitě své klobouky. Výborně se bavili, Juanita jen zářila, Tequilla tekla proudem a nejednu skleničku s nimi urazila i ona. Při odchodu šťastná a poněkud zasněná Juanita rozdala kovbojům jejich klobouky, ale jaké překvapení, ani jeden z kovbojů nedostal svůj klobouk. Kolika způsoby to mohla Juanita provést?

Řešení. Pokud v permutaci π na množině $[1, n]$ platí $\pi(i) = i$, kde $i \in [1, n]$, pak prvku i říkáme *pevný bod permutace* π. Máme-li tedy zjistit počet všech možných rozdání klobouků, kdy nikdo ze sedmi statečných nedostane svůj klobouk, máme vlastně určit počet všech permutací na množině $[1, 7]$ bez pevných bodů. My to učiníme tak, že si vypočítáme počet permutací s alespoň jedním pevným bodem, a toto číslo odečteme od počtu všech permutací.

Nazvěme A_i pro $i = 1, 2, \ldots, 7$ množinu všech permutací π na množině $[1, 7]$, které zobrazí prvek $i \in [1, 7]$ na i, tzn. $\pi(i) = i$. Tudíž například v množině A_3 jsou všechny permutace, pro které platí $\pi(3) = 3$. Uvědomme si, že takové permutace mohou obsahovat i jiné pevné body než-li trojku.

Hledáme-li všechny permutace, které obsahují alespoň jeden pevný bod, pak hledáme $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_7$, neboť v této množině jsou všechny permutace, které alespoň jeden z prvků $i \in [1, 7]$ zobrazí sám na sebe. Chceme-li znát počet takových permutací, pak chceme určit $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_7|$. Poněvadž množiny $A_1, A_2, \ldots, A_7$ nejsou disjunktní, musíme použít princip inkluze a exkluze.

Nalezneme mohutnosti všech průniků, jež obsahují k množin pro $k \in [1, 7]$. Dejme si několik konkrétních příkladů. Chceme-li určit $|A_2 \cap A_5 \cap A_6|$, pak si musíme uvědomit, že množina $A_2 \cap A_5 \cap A_6$ obsahuje všechny permutace π, pro které platí $\pi(2) = 2 \wedge \pi(5) = 5 \wedge \pi(6) = 6$. Každou permutaci z množiny $A_2 \cap A_5 \cap A_6$ vyjádříme jednořádkově takto: $\pi = (-, 2, -, -, 5, 6, -)$, přičemž na volných pozicích můžeme čísla $1, 3, 4, 7$ uspořádat libovolně. Proto $|A_2 \cap A_5 \cap A_6| = 4! = (7 - 3)!$. Je zřejmé, že pokud bychom do průniku vybrali jiné tři množiny, tak jeho mohutnost je opět $(7 - 3)!$. Najděme ještě $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7|$. Víme, že každou permutaci σ z množiny $A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7$ lze zapsat takto: $(1, -, 3, 4, -, 6, 7)$. Proto $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| = 2! = (7 - 5)!$. Je jasné, že každý průnik pěti množin bude mít mohutnost stejnou, tj. $(7 - 5)!$.

Výše uvedené myšlenky zobecníme. Máme-li libovolný průnik $k \in [1, 7]$ množin, pak je jeho mohutnost $(7 - k)!$ a pro výpočet použijeme princip inkluze a exkluze z věty 6.3, neboť víme, že $M_k = (7 - k)!$ a $n = 7$.

Dostáváme $|\bigcup_{i=1}^{7} A_i| = \sum\limits_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \binom{7}{k} (7 - k)! = \sum\limits_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{7!}{k!(7-k)!} (7 - k)! =$
$= \sum\limits_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{7!}{k!} = 7! \sum\limits_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$.

Číslo $7! \sum\limits_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$ určuje počet všech permutací s alespoň jedním pevným bodem. Chceme-li znát počet x všech permutací bez pevného bodu, pak $x = 7! - 7! \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} = 7!(1 - \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}) = 7! \sum_{k=0}^{7} (-1)^{k} \frac{1}{k!}$, neboť $\frac{1}{k!}$ pro $k = 0$ je 1 a místo $(-1)^{k+1}$ musí být $(-1)^{k}$, protože znaménko $-$ před sumou $\sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$ změní znaménka u všech sčítanců.

Nebylo by těžké zjistit, že pokud by do hostince přišlo n statečných, kde $n \in \mathbb{N}$, pak počet možností, jak může Juanita rozdat klobouky tak, aby nikdo nedostal svůj, by byl $n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{1}{k!}$.

Pro zájemce:

Na závěr ještě dodejme, že pro velká n by byl počet permutací na množině $[1, n]$ bez pevných bodů téměř přesně $\frac{n!}{\mathrm{e}}$, kde e je *eulerovo číslo* (e=2,7812. . .).

Zopakujme si *Mac Laurinův polynom* (Taylorův polynom se středem v bodě 0) pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$. Pro libovolnou funkci $f(x)$ vypadá Mac Laurinův polynom takto:

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Pro $f(x) = \mathrm{e}^x$ pak dostáváme

$$T_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n,$$

neboť $f^{(i)}(x) = \mathrm{e}^x$ (i-tá derivace) pro každé $i \in [0, n]$, a proto $f^{(i)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$. Zvolíme-li $x = -1$, obdržíme

$$T_n(-1) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Lze ukázat, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n) = \mathrm{e}^x$, proto $\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}x^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}) = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Číslo $\frac{1}{\mathrm{e}}$ je tudíž rovno sumě $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$ pro $n \to \infty$.

Nahradíme-li výraz $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$ číslem $\frac{1}{\mathrm{e}}$ pro dost velká n, dopustíme se jen zanedbatelné chyby. Dá se vypočítat, jak velké má být n, aby chyba nepřekročila libovolně stanovenou mez.

▲

Příklad 6.5. Na tramvajové refíži rozdávaly dvě studentky reklamní plakáty. Měly dohromady 15 různých plakátů a všechny rozdaly šesti lidem tak, že každý člověk dostal alespoň jeden. Kolika způsoby to mohly studentky provést?

Řešení. Nechť $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{15}\}$ je množina všech plakátů a $L = [1, 6]$ množina všech lidí. Rozdávání plakátů můžeme definovat jako přiřazení libovolného plakátu z množiny P právě jednomu člověku z množiny L, přičemž každému člověku z L je přiřazen alespoň jeden plakát z P. Každé rozdání plakátů můžeme tudíž modelovat jako surjektivní zobrazení f množiny P na množinu L.

Čili chceme zjistit počet všech surjekcí množiny P na množinu L. Víme, že všech zobrazení P do L je $V^*(6, 15) = 6^{15}$. Pokud se nám podaří určit počet x všech zobrazení, kde alespoň jeden prvek z L není obrazem žádného prvku z P (zobrazení, která nejsou surjekce), tak rozdíl $6^{15} - x$ udává počet s všech surjekcí množiny P na množinu L.

Nechť A_i je množina všech zobrazení množiny P do množiny L, kde prvek $i \in [1, 6] = L$ není obrazem žádného prvku z množiny P. Potom množina $A_1 \cup \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6 = \bigcup_{i=1}^{6} A_i$ je množina všech zobrazení P do L, kde alespoň jeden prvek $i \in [1, 6]$ není obrazem žádného prvku z P. Proto $|\bigcup_{i=1}^{6} A_i| = x$.

Všimněme si, že například $A_3 \cap A_5 \neq \emptyset$, protože jak v množině A_3 tak v množině A_5 jsou i zobrazení, kde ani 3, ani 5 nejsou obrazem žádného prvku z P. Proto pro výpočet $|\bigcup_{i=1}^{6} A_i| = x$ musíme použít princip inkluze a exkluze, neboť množiny $A_1, A_2, \ldots, A_6$ nejsou disjunktní.

Chceme-li vypočítat $|\bigcup_{i=1}^{6} A_i| = x$, pak musíme znát mohutnost (počet prvků) každého průniku k množin, kde $k \in [1, 6]$. Uveďme několik příkladů. V množině $A_1 \cap A_4 \cap A_5$ jsou zobrazení P do L, kde žádný z prvků $1, 4, 5$ není obrazem žádného prvku z P. Tedy jde o zobrazení množiny P do množiny $L \setminus \{1, 4, 5\}$ a těch je $V^*(6-3, 15) = (6-3)^{15}$. Proto $|A_1 \cap A_4 \cap A_5| = (6-3)^{15}$. Je zřejmé, že počet prvků v libovolném průniku tří množin je $(6-3)^{15}$. V množině $A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5$ jsou zobrazení P do L, kde žádný z prvků $1, 2, 4, 5$ není obrazem žádného prvku z P. Tedy jde o zobrazení množiny P do množiny $L \setminus \{1, 2, 4, 5\}$ a těch je $V^*(6 - - 4, 15) = (6-4)^{15}$. Proto $|A_1 \cap A_4 \cap A_5| = (6-4)^{15}$. Opět, počet prvků v libovolném průniku čtyř množin je $(6-4)^{15}$.

Mějme pevně zvolené $k \in [1, 6]$. Pak mohutnost každého průniku k množin je $(6-k)^{15}$. Všimněme si, že uvedený vzorec platí i pro $k = 6$, neboť $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6$ je množina všech zobrazení, kde žádné z čísel 1 až 6 není obrazem žádného prvku z P, ale takové zobrazení neexistuje, odtud $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6| = 0 = (6-6)^{15}$.

Hodnota M_k z věty 6.3 tudíž je v tomto případě $(6-k)^{15}$ a

$$|\bigcup_{i=1}^{6} A_i| = \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k+1} \binom{6}{k} (6-k)^{15} = x.$$

Odtud $s = 6^{15} - \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k+1} \binom{6}{k} (6-k)^{15} = \sum_{k=0}^{6} (-1)^{k} \binom{6}{k} (6-k)^{15} = \binom{6}{0} 6^{15} - - \binom{6}{1} 5^{15} + \binom{6}{2} 4^{15} - \binom{6}{3} 3^{15} + \binom{6}{4} 2^{15} - \binom{6}{5} 1^{15} + \binom{6}{6} 0^{15} = 6^{15} - 6 \cdot 5^{15} + 15 \cdot 4^{15} - 20 \cdot 3^{15} + + 15 \cdot 2^{15} - 6 \cdot 1^{15}$.

Spočítejme si $5^7 = 78125$, $3^7 = 2187$, $2^7 = 128$, potom $5^{15} = 78125 \cdot 78125 \cdot 5 =$

$= 30517578125$, $3^{15} = 2187 \cdot 2187 \cdot 3 = 14348907$ a $2^{15} = 128 \cdot 128 \cdot 2 = 32768$, a odtud $6^{15} = 3^{15} \cdot 2^{15} = 14348907 \cdot 32768 = 470184984576$, $4^{15} = 2^{15} \cdot 2^{15} = 32768 \cdot 32768 = 1073741824$. Dostáváme

$$470184984576 - 183105468750 + 16106127360 - 286978140 + 491520 - 6 =$$

$$= 287079515826 + 15819149220 + 491514 = 302899156560.$$

Existuje tudíž 302 miliard 899 miliónů 156 tisíc 560 způsobů, jak dívky mohou rozdat 15 plakátů šesti lidem tak, aby každý dostal alespoň jeden.

Nebylo by těžké zobecnit, že existuje $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$ surjekcí množiny M na množinu N, pokud $|M| = m$, $|N| = n$ a $m \geqq n$.

Dále si všimněme, že pro $|M| = m = n = |N|$ jsou surjekce množiny M na množinu N vlastně bijekce a my víme, že bijekcí množiny M na množinu N pro $m = n$ je $n!$. Proto

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = \binom{n}{0} n^n + \binom{n}{1} (n-1)^n + \cdots + \binom{n}{n-1} 1^n = n!.$$

▲

Příklad 6.6. Janě zbylo od narozenin 5 různých zákusků. Rozhodla se, že je sní v n po sobě jdoucích dnech s tím, že každý den sní alespoň jeden zákusek (n je libovolné číslo z množiny $[1, 5]$). Kolik existuje způsobů, jak může Jana všechny zákusky sníst?

Řešení. Nechť $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ je množina všech zákusků a $D = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina po sobě jdoucích dnů, kdy bude Jana jíst zákusky, přičemž $n \in [1, 5]$. Každému zákusku přiřadíme přesně jeden z n dní, ve kterém zákusek sní a ke každému dni bude přiřazen alespoň jeden zákusek. Opět vidíme, že počet možností, jak může Jana zákusky sníst odpovídá počtu surjekcí množiny Z na množinu D s tím, že n je libovolné číslo z množiny $[1, 5]$.

Pokud tedy spočítáme zvlášť počty surjekcí pro každé n z množiny $[1, 5]$, pak součet vypočítaných hodnot bude konečný výsledek. Obecně platí, že počet surjekcí m-prvkové množiny na n-prvkovou množinu je $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$. V našem případě je $m = 5$ a $n \in [1, 5]$.

Proto pro $n = 1$ dostáváme

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1}{k} (1-k)^5 = \binom{1}{0} (1-0)^5 - \binom{1}{1} (1-1)^5 = 1,$$

pro $n = 2$

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{2}{k}(2-k)^5=\binom{2}{0}(2-0)^5-\binom{2}{1}(2-1)^5+\binom{2}{2}(2-2)^5=32-2=30,$$

pro $n=3$

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{k}(3-k)^5=\binom{3}{0}(3-0)^5-\binom{3}{1}(3-1)^5+\binom{3}{2}(3-2)^5-\binom{3}{3}(3-3)^5=$$

$$=243-96+3=150,$$

pro $n=4$

$$\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\binom{4}{k}(4-k)^5=\binom{4}{0}(4-0)^5-\binom{4}{1}(4-1)^5+\binom{4}{2}(4-2)^5-\binom{4}{3}(4-3)^5+$$

$$+\binom{4}{4}(4-4)^5=1024-972+192-4=240,$$

pro $n=5$

$$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{5}{k}(5-k)^5=5!=120.$$

Tudíž počet možností, jak může Jana sníst zbylých pět zákusků je $1+30+150+$ $+240+120=541$.

▲

Příklad 6.7. Karel čte velmi zajímavou knihu, zbývá mu posledních 7 stran. Rozhodl se, že je přečte za k po sobě jdoucích dnů s tím, že každý den přečte alespoň jednu stránku (k je libovolné číslo z množiny $[1,7]$). Kolik existuje způsobů, jak může Karel knihu dočíst?

Řešení. Nechť $S=[1,7]$ je množina zbývajících stran a $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_k\}$ je množina po sobě jdoucích dnů, kdy bude Karel číst zbývající stránky, přičemž $k\in[1,7]$. Každé stránce přiřadíme přesně jeden z k dní, ve kterém Karel stránku přečte a ke každému dni bude přiřazena alespoň jedna stránka. Pokud bychom uvažovali takto, pak počet možností, jak může Karel zbylé stránky dočíst, je počet surjekcí množiny S na množinu D, kde k je libovolné číslo z množiny $[1,7]$.

Ovšem tato úvaha je zcela špatná! Jedna z možných surjekcí množiny S na množinu D je například zobrazení: $1\to d_3, 2\to d_1, 3\to d_1, 4\to d_2, 5\to d_1, 6\to d_3, 7\to$ $\to d_2$ pro $k=3$. Potom by ovšem Karel přečetl v prvním dni druhou,třetí a pátou, ve druhém dni čtvrtou, sedmou a třetí den první a šestou dosud nepřečtenou stránku. Proboha! Kdo by takto dočítal knihu?!

Musíme zvolit zcela jinou metodu uvažování. Potřebujeme vlastně rozdělit stránky $1 - 7$ do k přihrádek tak, že v první přihrádce je prvních n_1 stránek, ve druhé následujících n_2 stránek až v k-té je posledních n_k stránek, přičemž v každé přihrádce je alespoň jedna stránka a $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = 7$, $n_i \geqq 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$. Příklad takového rozdělení pro $k = 4$ je možné modelovat následující symbolikou $1, 2, 3 \mid 4, 5 \mid 6 \mid 7$, kde symbolu $\mid$ budeme říkat *přepážka*.

Představme si posloupnost dosud nepřečtených stránek $(1-2-3-4-5-6-7)$, kde symbol $-$ znázorňuje mezeru mezi čísly. Je zřejmé, že pokud pro dané $k \in [1, 7]$ vybereme $k - 1$ ze šesti mezer mezi čísly a zaměníme je přepážkami dosáhneme přesně jednoho správného rozdělení stránek do k dnů. Proto pro pevně zvolené $k \in [1, 7]$ existuje přesně $\binom{6}{k-1}$ správných rozdělení. Jelikož k může být libovolné číslo z množiny $[1, 7]$, dostáváme výsledek $\sum\limits_{k=1}^{7} \binom{6}{k-1} = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + {}$ $+ \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6 = 64$.

Všimněte si, že způsobů, jak může Karel dočíst knihu, je přesně tolik jako podmnožin šestiprvkové množiny (2^6). Dokázali by jste tuto rovnost vysvětlit?

▲

Σ Pojmy k zapamatování

— Princip inkluze a exkluze: $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum\limits_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|J|+1} |\bigcap_{j \in J} A_j|$.

— Princip inkluze a exkluze, pokud každý průnik k množin má mohutnost M_k: $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} M_k$.

— Počet všech permutací bez pevného bodu na n-prvkové množině: $n! \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$.

— Počet všech surjekcí m-prvkové množiny na n-prvkovou množinu: $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$.

! Příklady k procvičení

1. Ve třídě je 24 žáků. Učitel žákům náhodně rozdal opravené písemky tak, že alespoň jeden žák dostal svou písemku a zároveň alespoň jeden z žáků nedostal svou písemku. Kolika způsoby to mohl učitel provést?

2. Kolik zůstane v množině $[300, 6000]$ čísel, pokud vyškrtneme všechny násobky $3, 5$ a třinácti?

3. Kolika způsoby může Anna umístit 13 knih do sedmi poliček tak, že v každé je alespoň

jedna kniha (na pořadí knih v poličce nezáleží).

4. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném rozdání 12 lístků do divadla devíti lidem některý člověk nedostane lístek?

5. Na vánočním stromečku zůstaly čtyři čokoládové figurky. Jaromír se je chystá sníst v k po sobě jdoucích dnech s tím, že každý den sní alespoň jednu figurku (k je libovolné číslo z množiny $[1, 4]$). Kolika způsoby to může Jaromír provést?

Literatura

[1] Matoušek, J. – Nešetřil, J. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 2. vydání. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 2000. 205 s. ISBN 80-246-0084-6.

[2] Hermann, J. – Kučera, R. – Šišma, J. *Metody řešení matematických úloh I*. 2. vydání. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2001. ISBN 80-210-1202-1.

[3] Hermann, J. – Kučera, R. – Šišma, J. *Metody řešení matematických úloh II*. 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2004. ISBN 80-210-3528-5.