



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚLOHY VYUŽÍVAJÍCÍ DIRICHLETŮV PRINCIP

Doc. PhDr. Marta Volfová, CSc., Katedra matematiky

Název úloh byl zvolen podle významného německého matematika G. L. Dirichleta (1805 – 59).

Dirichletův princip pomáhá řešit celou řadu zajímavých úloh. V některých zemích, jako např. v Anglii, se mu říká „příhrádkový princip“, ve Francii je znám pod názvem „princip zásuvek“. Domníváme se, že používání tohoto principu může matematické talenty zaujmout a pomoci jim v promyšlení a řešení řady i netriviálních úloh. – Proto jsme navrhli v rámci grantu Péče o matematické talenty seminář na toto téma. Zatím o něj nebyl dostatečný zájem, proto zde úlohy zveřejňujeme.)

V nejjednodušších úlohách (řešitelných i mladšími žáky logickou úvahou) je princip zřejmý:

1. Mám 3 šperky a 2 krabičky na ně. – Tedy v jedné krabičce musí být aspoň dva šperky. (Princip ovšem neříká, v které z nich a zda tam budou právě dva nebo dokonce všechny tři šperky.) Obecněji: V n příhrádkách je aspoň $(n + 1)$ předmětů; tedy aspoň v jedné jsou aspoň dva předměty. Silnější znění věty: Je-li v n příhrádkách $k \cdot n + 1$ předmětů, pak aspoň v jedné příhrádce je aspoň $(k + 1)$ předmětů.
2. Anička má dvě terária a dostala pět křečků na chov. – Tedy aspoň v jednom teráriu musí být aspoň tři křečci.
3. Na půdě visí Honzíkovy ponožky – černé, šedé a béžové. Honza pro ně jde pozdě večer, na půdě je tma a on potřebuje jeden pár ponožek stejné barvy. Kolik jich má vzít? Všechny? Tři?
4. Ve sklepě má tatínek dobré moravské víno – 4 lahve červeného a 2 bílého. Přijeli hosté a přáli by si červené víno ochutnat. Bohužel jsou lahve tmavé, málo čitelně označené a ve sklepě je šero. Kolik lahví musí tatínek vzít, aby mezi nimi byla aspoň jedna lahev červeného? (A kdyby chtěl aspoň dvě?)

5. Ve stejném sklepě má maminka kompoty – na jaře zbyly ještě 3 jahodové, 2 višňové a 4 borůvkové. Ráda by dala hostům od každého druhu jednu sklenici. Kolik jich má vzít? (Opět ve sklepě není vidět.) A kdyby chtěla jen jeden borůvkový?
6. Kolik musí být ve skupině lidí, abychom mohli říci, že aspoň dva se narodili určitě
 - a) ve stejném dnu týdne,
 - b) ve stejném měsíci,
 - c) mají narozeniny ve stejném dnu roku?
7. Můžeme říci, že na světě jsou aspoň dva lidé, co se narodili v téže minutě? (Předpokládejme, že nikdo není starší 120 let.) A ve stejné sekundě?
8. Počet vlasů na hlavě nepřevyšuje 150 000. Můžeme říci, že v Praze určitě aspoň dva lidé mají týž počet vlasů? (A v Hradci Králové?)
9. Standa má za 23 dní dělat přijímací zkoušky a chce ještě propočítat 93 úloh. Doplňte správně výrok: „Standa musí aspoň jeden den vyřešit aspoň úloh.“
10. Uvnitř čtverce o straně 16 cm je umístěno 5 bodů. Dokažte, že aspoň dva jsou vzdáleny méně než 6 cm.
11. Do obchodu přivezli 25 beden jablek tří druhů (v bedně byl vždy jen jeden druh). Lze tam určitě najít 9 beden téhož druhu?
12. V zásuvce je 10 červených, 8 zelených, 8 modrých a 4 žluté pastelky. Vybírám-li je poslepu, kolik jich musím vzít, aby mezi nimi byly
 - a) aspoň čtyři téže barvy,
 - b) aspoň jedna od každé barvy,
 - c) aspoň šest modrých?
13. Dokažte, že mezi 100 (třemi; pěti) přirozenými čísly lze vždy vybrat několik takových, že jejich součet je dělitelný 100 (třemi; pěti).
14. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu n existuje číslo zapsané jen číslicemi 5; 0 takové, že je dělitelné číslem n .
15. Kolik musí být ve skupině lidí, abychom mohli určitě tvrdit, že v nějakém měsíci v roce má aspoň pět z nich narozeniny?
16. Na škole je 1000 žáků a 30 tříd. Lze dokázat, že aspoň jedné třídě bude aspoň 34 žáků?
17. V krychli s hranou 19 je dáno 1332 bodů. Dokažte, že mezi nimi aspoň 2 body mají vzdálenost menší než 3.
18. V prostoru je dáno 9 bodů s celočíselnými souřadnicemi. Dokažte, že lze mezi nimi vybrat aspoň 2 body tak, že střed jimi určené úsečky má celočíselné souřadnice.
19. Cestovní kancelář zkoumala podmínky šesti měst a zjistila s potěšením, že každé dvě z nich mají mezi sebou buď autobusové nebo vlakové spojení (ale nikdy obojí). Můžeme z toho usoudit, že tedy aspoň tři z těchto měst jsou vzájemně propojena stejným druhem dopravy?

20. Dokažte, že v každé skupině šesti lidí jsou buď aspoň 3 lidé, kteří se navzájem znají nebo aspoň 3 lidé, kteří si jsou navzájem neznámí.
21. Ve třídě je 33 žáků. Jan Adamec udělal v diktátu 15 chyb. Nikdo neměl víc. Mají tedy aspoň tři žáci týž počet chyb (může být i 0)? A čtyři žáci?
22. Dokažte, že 2. 3. 2010 byli v hradeckém divadle na večerním představení aspoň dva lidé, kteří měli mezi diváky stejný počet známých. (Víme, že v divadle aspoň dva diváci byli.)
23. V rovině vybereme několik bodů s celočíselnými souřadnicemi. Spojíme je úsečkami a určíme středy těchto úseček. Kolik musíme vzít bodů, aby jistě aspoň jeden střed úsečky měl celočíselné souřadnice?
24. Dokažte, že z 50 libovolně zvolených navzájem různých prvočísel lze vždy vybrat 13 prvočísel tak, že rozdíl každých dvou je dělitelný pěti. (MO, kategorie C)
25. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu n existují přirozená čísla $r \neq s$ tak, že číslo $3^r - 3^s$ je dělitelné číslem n . (MO, kategorie C)
26. V předvečer deště nám do chalupy nalétalo mnoho komárů. Honza spočítal ty, co se usadili na váleňdě (rozměr 180 cm \times 90 cm). Bylo jich 145. Bylo by (aspoň teoreticky) možné, že bychom jednou ranou plácačkou o rozměrech 15 cm \times 15 cm zasáhli aspoň tři z nich?
27. V našem paneláku se důchodci – kutilové rozhodli vylepšit podlahu ve sklepě a tak ji natřeli. Teď její povrch představují nahodile velké a nahodile umístěné skvrny dvou barev (co zbyly po předchozích pracích). Lze na podlaze najít úsečku, která by byla dlouhá přesně 98 cm a měla krajní body téže barvy?
28. V rovině je dáno 17 bodů, z nichž žádné tři neleží v téže přímce, které jsou spojeny úsečkami barvy žluté, červené nebo modré. Dokažte, že tak vznikne aspoň jeden „jednobarevný trojúhelník“ (tj. jehož stranami jsou úsečky téže barvy).
29. V chemické laboratoři je devět lavic s vybavením vždy pro tři badatele. Na seminář sem přišlo 23 lidí. Kolik lavic bude jistě plně obsazeno?
30. V pravidelném dvacetiúhelníku je 9 vrcholů vyznačeno zlatou barvou. Dokažte, že aspoň tři z nich tvoří rovnoramenný trojúhelník.

ŘEŠENÍ

3. 4 ponožky
4. aspoň 3 lahve; ve 2. případě aspoň 4
5. osm sklenic; ve 2. případě 6 sklenic
6. a) 8, b) 13, c) 367 (Připomeňme ovšem z teorie pravděpodobnosti, že ve skupině 50 lidí je už 97% pravděpodobnost, že dva lidé mají narozeniny týž den.) Výpočet pravděpodobnosti toho, že žádní dva nemají narozeniny v týž den (pro skupinu 50 lidí): $\frac{365 \cdot 364 \dots 316}{365^{50}} = 0,03$

a tedy že mají v týž den je pravděpodobnost $1 - 0,03 = 0,97$, tj. 97 %.)

7. Ano, minut je méně nebo rovno $120 \cdot 366 \cdot 24 \cdot 60 = 63\,244\,800$ (a lidí asi $7 \cdot 10^9$).

Na druhou otázku je též odpověď ano; sekund je 60krát více než minut; je to méně nebo rovno 3 794 688 000, což je opět méně než je počet lidí na Zemi.

8. V Praze ano, v Hradci ne (má méně než $100 \cdot 10^3$ obyvatel – tedy teoreticky může každý mít jiný počet vlasů.)
9. Aspoň jeden den musí vyřešit 5 úloh. Kdyby každý den spočítal maximálně 4 úlohy, za 23 dní by měl vyřešeno $4 \cdot 23 = 92$ úloh a 1 by mu chyběla (a zrovna by mohla být u zkoušky zadaná).
10. Rozdělíme čtverec na 4 čtvrtiny; bodů je 5, tedy aspoň v jedné čtvrtině budou aspoň dva body. Čtvrtina představuje čtverec o straně 4 cm; nejdelší úsečkou je úhlopříčka a ta měří $4 \cdot \sqrt{2}$, což je zaokrouhleně $5,7 < 6$. Každé dva vnitřní body jsou vzdáleny méně než $5,8 < 6$ (cm).
11. $25 = 3 \cdot 8 + 1$ aspoň 9 beden téhož druhu musí existovat
12. a) $3 + 3 + 3 + 3 + 1 = 13$
b) $10 + 8 + 8 + 1 = 27$
c) $10 + 8 + 4 + 6 = 28$
13. Mějme 100 (3; 5) čísel; označme je $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ a utvořme součty $s_1 = a_1; s_2 = a_1 + a_2; s_3 = a_1 + a_2 + a_3; \dots s_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$. Těchto sto součtů má po dělení 100 některý ze zbytků 0 až 99. Má-li některý s_n zbytek 0, je to právě hledaný součet. Je-li pro $\forall s_n$ zbytek různý od nuly, pak musí mít aspoň dva týž zbytek – pak rozdíl těchto dvou součtů, např. $s_i - s_j$ je dělitelný č. 100 (a je to součet některých z čísel $a_1 \dots a_{100}$). (Pro 3, případně pro 5 čísel lze výsledek zkoumat i experimentálně.)
14. Zapišme čísla
50
5050
.
.
.
5050 ... 50
 n čísel
buď aspoň jedno z nich je dělitelné číslem n (tedy zbytek po dělení je 0) nebo jsou všechny zbytky nenulové 1 až $n - 1$; protože je čísel n a zbytků jen $(n - 1)$, musí mít aspoň 2 čísla zbytky stejné – rozdíl těchto čísel je pak dělitelný číslem n (a má žádaný tvar).
15. Kdyby měli v každém měsíci nejvýš 4, bylo by jich nejvýš $4 \cdot 12 = 48$. Ve skupině tedy musí být aspoň 49 lidí.
16. Ano. $1000 = 30 \cdot 33 + 10$.
17. Rozdělíme krychli na $11^3 = 1331$ krychliček, každá bude mít hranu délky $\frac{19}{11} = 1,72$ (cm) a velikost tělesové úhlopříčky $\frac{19}{11} \sqrt{3}$, což je zaokrouhleně $2,9917 < 3$. Podle Dirichletova principu budou aspoň v jedné krychličce aspoň dva body – a jejich vzdálenost bude < 3 .
18. Jde o užití Dirichletova principu a parity. Souřadnice bodů v prostoru jsou lichá (l) nebo sudá (s) čísla. Existuje tedy osm možností pro 3 souřadnice: $lll, lls, lsl, sll, lss, sls, ssl, sss$. Devátý bod bude patřit mezi některou ze zde uvedených možností - pak aspoň v jedné skupině budou aspoň dva body \Rightarrow střed úsečky má celočíselné souřadnice.
19. Označme města A, B, C, D, E, F

- Město A je spojeno s pěti městy buď vlakem nebo autobusem. Podle Dirichletova principu je aspoň se třemi spojeno tímž druhem dopravy. Uvažujme, že to budou města B, C, D a třeba vlakem.
 - Nyní uvažujme spoje mezi B, C ; B, D . Kdyby byl některý vlakový, třeba B, D , už bychom měli tři města vzájemně spojená vlakem (totiž A, B, D ; AB, AD, BD by byla vlaková spojení).
 - Uvažujme však, že spoje mezi B, C i B, D jsou autobusové. (To nám zatím žádná trojice měst, vzájemně propojených tímž druhem dopravy nevznikne.)
 - Jaký bude spoj mezi C, D ? Kdyby byl vlakový, byla by vlakem propojena města A, C, D . Kdyby byl autobusový, byla by autobusem propojena města B, C, D . Tedy vždy jsou aspoň tři města propojena stejným druhem dopravy.
20. Jde o stejnou úlohu jako je předchozí. Řešení naznačíme stručněji. Znázorníme graficky: označme návštěvníky čísla $1, 2, \dots, 6$, znázorníme body a spojme je červenou spojnicí, znají-li se, a modrou, když se neznají. Uvažujme č. 1 – je spojen aspoň se 3 body touž barvou. Nechť je to červená a body $2, 3, 4$ (bez újmy na obecnosti). Jsou-li některé z bodů $2, 3, 4$ spojeny červenou úsečkou, je důkaz skončen, existuje červený trojúhelník (tj. 3 lidé se navzájem znají). Jsou-li body $2, 3, 4$ spojeny modrými úsečkami, existuje modrý trojúhelník (tj. jsou mezi přítomnými aspoň 3 lidi, kteří si jsou si vzájemně neznámí).
21. Pro počty chyb ($0; 1; 2; \dots; 15$) je 16 možností $3^3 = 2 \cdot 16 + 1 \Rightarrow$ aspoň jedna trojice musela mít vždy stejný počet chyb.
22. Je-li n přítomných, každý může mít v divadle známých $0 \vee 1 \vee 2 \vee \dots \vee (n-1)$. Přitom se vylučuje případ, že by současně existoval člověk, který v divadle nemá žádného známého a člověk, který by znal všechny přítomné (být známý ... to je symetrické). Možností tedy není n , ale jen $(n-1)$. [Bud' $0; 1; 2; \dots (n-2) \dots$ je-li jeden zcela neznámý – nebo $1; 2; \dots; (n-1) \dots$ je-li tam jeden, co zná všechny.] Tedy n diváků .. $(n-1)$ možností počtu známých – tedy aspoň dva mají týž počet známých.
23. Jde o obdobu úlohy 18. Stačí pět bodů.
24. Prvočísla po dělení pěti mohou dávat zbytky 0 (ale to jen prvočíslo 5); $1; 2; 3; 4$. Rozdělíme všech 49 (50) prvočísel (je-li mezi nimi číslo 5, vypustíme jej – zbyde nám 49 prvočísel) do zbytkových tříd $1; 2; 3; 4$; $4 \cdot 49 = 12 \cdot 4 + 1$, tedy aspoň v jedné bude 13 prvočísel a jejich rozdíl $(k \cdot 5 + z) - (m \cdot 5 + z) = 5 \cdot (k - m)$ je dělitelný pěti.
25. Dělíme-li $(n+1)$ mocnin čísla 3 $3^1, 3^2, 3^3, \dots, 3^n, 3^{n+1}$ číslem n , dostaneme maximálně n různých zbytků, totiž $0, 1, 2, \dots, n-1$. Podle Dirichletova principu tedy aspoň dvě mocniny mají týž zbytek – a jejich rozdíl je dělitelný číslem n .
26. Obdélník $180 \text{ cm} \times 90 \text{ cm}$ lze rozdělit na čtverce $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$; bude jich $\frac{180}{15} \cdot \frac{90}{15} = 12 \cdot 6 = 72$; kdyby v každém seděli jen dva komáři, bylo by jich usazeno jen 144; komárů je ale 145, v některém čtverci jsou tedy tři a dali by se (aspoň teoreticky) jednou ranou zasáhnout.
27. Stačí narýsovat na podlaze rovnostranný trojúhelník o délce stran 98 cm. Pro jeho tři vrcholy existuje vybarvení jen dvěma barvami – tedy dva vrcholy musí mít stejnou barvu – a ty také určují hledanou úsečku.
28. Očíslujeme body $1, 2, \dots, 17$. Existuje aspoň šest bodů, s nimiž je bod 1 spojen stejnou barvou. Nechť je to (bez újmy na obecnosti) třeba žlutá a nechť to jsou body $2, 3, 4, 5, 6, 7$. Jsou-li některé z bodů $2, 3, \dots, 7$ spojeny úsečkou žluté barvy, je důkaz ukončen (existuje „žlutý“ trojúhelník). Nechť nejsou. Pak jsou spojeny úsečkami barvy např. modré a červené. Vybereme bod 2. Je spojen s body $3, 4, 5, 6, 7$ aspoň třemi úsečkami téže barvy. Nechť je to (bez újmy na obecnosti) červená barva a nechť to jsou body $3, 4, 5$. Jsou-li některé z těchto bodů $3, 4, 5$, spojeny červenou úsečkou, je důkaz ukončen

- (existuje červený trojúhelník). Necht' tomu tak není. Pak jsou body 3, 4? 5 spojeny modrou úsečkou a tedy existuje jednobarevný modrý trojúhelník.
29. $23 = 9 \cdot 2 + 5$; v pěti lavicích budou plně obsazená místa.
30. Vyznačíme čtyři pravidelné pětiúhelníky (s vrcholy ve vrcholech pravidelného dvacetiúhelníku). Aspoň v jednom pětiúhelníku musí být aspoň tři „zlaté“ vrcholy ($9 = 4 \cdot 2 + 1$) a ty tvoří rovnoramenný trojúhelník.

Literatura:

- 1) Volfová, M.: Metody řešení matematických úloh. Hradec Králové, Gaudeamus 2000
- 2) Objevování, motivace a podpora matematických talentů na evropských školách. Manuál. MATH.EU Projekt, 2006
- 3) Úlohy MO
- 4) Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh. SPN Bratislava 1992