

5. soutěžní série

27. 4. 2026

Úloha 1. Hoďme n krát mincí a zapišme výsledek ve tvaru $101\dots 011$. Označme $P(n)$ pravděpodobnost, že délky všech maximálních konstantních podřetězců výsledku mají stejnou paritu jako n . Ukažte, že pro n sudé je $P(n) = 2^{-n/2}$ a pro n liché je $P(n) = 2^{1-n}F_n$, kde F_n je n -té Fibonacciho číslo. (10 bodů)

Úloha 2. Nalezněte všechny polynomy p s reálnými koeficienty takové, že $p(p(x)) = (x^2 + x + 1)p(x)$ pro každé x . (10 bodů)

Úloha 3. Buď $\mathbb{Z}^d$ množina mřížových bodů v $\mathbb{R}^d$ a pro $A \subset \mathbb{Z}^d$ označme $D(A) = \{\|x - y\| : x, y \in A\}$ množinu vzdáleností množiny A . Ukažte, že

(a) $\mathbb{Z}^d$ lze rozdělit na dvě podmnožiny A, B takové, že $D(A) \neq D(\mathbb{Z}^d)$ a $D(B) \neq D(\mathbb{Z}^d)$.

(b) Pokud $A \cup B = \mathbb{Z}^d$ a $A \cap B \neq \emptyset$, pak $D(A) = D(\mathbb{Z}^d)$ nebo $D(B) = D(\mathbb{Z}^d)$. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce spojitá v nule a nechť λ, μ jsou navzájem různá kladná reálná čísla. Ukažte, že limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\lambda x) - f(\mu x)}{x}$$

existuje právě tehdy, když f je diferencovatelná v nule. (10 bodů)

5th contest series

April 27, 2026

Problem 1. Let us toss a coin n times and record the result in the form $101\dots 011$. Let $P(n)$ denote the probability that the lengths of all maximal constant substrings of the result have the same parity as n . Show that for even n , $P(n) = 2^{-n/2}$, and for odd n , $P(n) = 2^{1-n}F_n$, where F_n is the n -th Fibonacci number. (10 points)

Problem 2. Find all polynomials p with real coefficients such that $p(p(x)) = (x^2 + x + 1)p(x)$ for every x . (10 points)

Problem 3. Let $\mathbb{Z}^d$ be the set of lattice points in $\mathbb{R}^d$, and for $A \subset \mathbb{Z}^d$, let $D(A) = \{\|x - y\| : x, y \in A\}$ denote the set of distances of the set A . Show that:

(a) $\mathbb{Z}^d$ can be partitioned into two subsets A, B such that $D(A) \neq D(\mathbb{Z}^d)$ and $D(B) \neq D(\mathbb{Z}^d)$.

(b) If $A \cup B = \mathbb{Z}^d$ and $A \cap B \neq \emptyset$, then $D(A) = D(\mathbb{Z}^d)$ or $D(B) = D(\mathbb{Z}^d)$. (10 points)

Problem 4. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function continuous at zero, and let λ, μ be distinct positive real numbers. Show that the limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\lambda x) - f(\mu x)}{x}$$

exists if and only if f is differentiable at zero. (10 points)