

4. soutěžní série

13. 4. 2026

Úloha 1. Najděte všechna lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $f(AB) = f(BA)$ pro všechny dvojice matic $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(10 bodů)

Úloha 2. Kouzelníci Hokus a Pokus se od minulého semestru poučili a své kouzlo teď předvádějí jinak. Stále mají kružnici, nyní ovšem neobarvenou. Během představení odejde Hokus z místnosti, načež nechá Pokus diváky vyznačit na kružnici sto různých bodů. Pokus následně jeden bod vymaže. Potom se vrátí Hokus a pouze na základě pozic zbylých 99 bodů vyznačí na kružnici (uzavřené) půlkružnici, na které vymazaný bod ležel. Na kružnici není poznat, jak je natočená. Dokažte, že toto kouzlo jim může fungovat.

(10 bodů)

Úloha 3. Pro každé kladné celé m existuje celé k takové, že k nedělí $m + x^2 + y^2$ pro žádná celá čísla x, y . Dokažte.

(10 bodů)

Úloha 4. Nechtě $(a_n)_{n \geq 1}$ je posloupnost reálných čísel taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konverguje. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k = 0.$$

(10 bodů)

4th contest series

April 13, 2026

Problem 1. Find all linear maps $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f(AB) = f(BA)$ for all pairs of matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. (10 points)

Problem 2. Magicians Hokus and Pokus have took a lesson from the last semester and are now performing their trick differently. They still have a circle, but now it is uncolored. During the performance, Hokus leaves the room, after which Pokus lets the audience mark one hundred distinct points on the circle. Pokus then erases one point. Hokus then returns and, based solely on the positions of the remaining 99 points, marks a (closed) semicircle on the circle where the erased point was located. The circle has no distinguishable rotation. Prove that this trick can work. (10 points)

Problem 3. For every positive integer m , there exists an integer k such that k does not divide $m + x^2 + y^2$ for any integers x, y . Prove. (10 points)

Problem 4. Let $(a_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of reals such that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converges. Show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k = 0.$$

(10 points)