

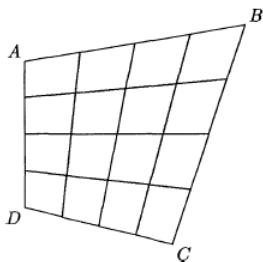
3. soutěžní série

23. 3. 2026

Úloha 1. V jedné zemi jsou některá města spojena silnicemi. Silnice se setkávají pouze ve městech. V každém městě je tabule, na níž je uvedena délka nejkratší trasy začínající v tomto městě a procházející všemi ostatními městy (trasa může některými městy procházet vícekrát a nemusí se vracet do výchozího města). Dokažte, že libovolné číslo na těchto tabulích je nejvýše $\frac{3}{2}$ -násobkem libovolného jiného. (5 bodů)

Úloha 2. Je-li A čtvercová matice řádu n s prvky 1 nebo -1 , pak $\det A$ je dělitelné číslem 2^{n-1} . Dokažte. (10 bodů)

Úloha 3. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Každá jeho strana je rozdělena na N úseček stejné délky. Dělicí body na straně AB jsou spojeny úsečkami s dělicími body na straně CD a dělicí body na straně BC jsou spojeny s dělicími body na straně DA . Tím vznikne N^2 menších čtyřúhelníků. Z nich vybereme N čtyřúhelníků tak, aby žádné dva neležely ve stejném „řádku“ ani „sloupci“. Dokažte, že součet jejich obsahů je roven obsahu čtyřúhelníku $ABCD$ vydělenému N . (10 bodů)



Úloha 4. Nechť f je racionální funkce (podíl dvou reálných polynomů) taková, že $f(n) \in \mathbb{Z}$ pro nekonečně mnoho celých čísel n . Dokažte, že f musí být ve skutečnosti polynom. (15 bodů)

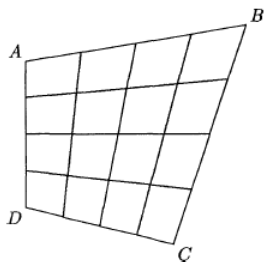
3rd contest series

March 23, 2026

Problem 1. In a country, some cities are connected by roads. The roads meet only at cities. In each city, there is a sign displaying the length of a shortest route starting at that city and passing through all the other cities (the route may pass through some cities more than once and does not need to return to the starting city). Prove that any number on these signs is at most $\frac{3}{2}$ times any other. (5 points)

Problem 2. If A is an $n \times n$ matrix whose entries are 1 or -1 , then $\det A$ is divisible by 2^{n-1} . Prove. (10 points)

Problem 3. We are given a convex quadrilateral $ABCD$. Each of its sides is divided into N segments of equal length. The division points on side AB are connected by straight lines to the division points on side CD , and the division points on side BC are connected to those on side DA . This construction forms N^2 smaller quadrilaterals. From these, we choose N quadrilaterals in such a way that no two lie in the same “row” or “column.” Prove that the sum of their areas is equal to the area of $ABCD$ divided by N . (10 points)



Problem 4. Let f be a rational function (a quotient of two real polynomials) such that $f(n) \in \mathbb{Z}$ for infinitely many integers n . Prove that f must in fact be a polynomial. (15 points)