2. soutěžní série

9. 3. 2026

Úloha 1. Je dána čtvercová tabulka $n \times n$ s $n-1$ označenými poli. Dokažte, že je možné přesunout všechna označená pole pod úhlopříčku pomocí přesouvání řádků a sloupců. (5 bodů)

Úloha 2. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{N}$ platí

$$f(2f(x)) = x + 2026.$$

(10 bodů)

Úloha 3. Pro daná reálná čísla x a y je množina

$$\{\cos(n\pi x) + \cos(n\pi y) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

konečná. Rozhodněte, zda nutně $x, y \in \mathbb{Q}$. (10 bodů)

Úloha 4. Některé vrcholy čtvercové sítě $n \times n$ jsou obarveny tak, že každý čtverec se stranami ležícími v této síti má alespoň jeden obarvený bod na svém obvodu. Buď $l(n)$ nejmenší nutný počet obarvených vrcholů. Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{l(n)}{n^2} = \frac{2}{7}$. (15 bodů)

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

2nd contest series

March 10, 2025

Problem 1. Given the square table $n \times n$ with $n - 1$ marked fields. Prove that it is possible to move all the marked fields below the diagonal by moving rows and columns. (5 points)

Problem 2. Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for every $x \in \mathbb{N}$ we have

$$f(2f(x)) = x + 2026.$$

(10 points)

Problem 3. For given real numbers x and y, the set

$$\{\cos(n\pi x) + \cos(n\pi y) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

is finite. Determine whether it necessarily follows that $x, y \in \mathbb{Q}$.

(10 points)

Problem 4. Some vertices of the $n \times n$ square grid are colored so that every square whose sides lie on this grid has at least one colored vertex on its boundary. Let $l(n)$ be the smallest possible number of colored vertices. Show that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l(n)}{n^2} = \frac{2}{7}.$$

(15 points)