

Posloupnosti

Definice 5.1 (Cauchyovská posloupnost). Posloupnost racionálních čísel $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **cauchyovská**, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |q_n - q_m| < \varepsilon.$$

Definice 5.2 (Omezená posloupnost). Řekneme, že posloupnost (a_n) je **omezená**, pokud je množina jejích členů $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omezená v $\mathbb{R}$. Tedy:

$$\exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K.$$

Úloha 5.1 (4 body). 1. Dokažte, že pro rostoucí, shora omezenou posloupnost reálných čísel (a_n) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

2. Dokažte, že každá cauchyovská posloupnost reálných čísel je omezená.

Nápověda. ad 1) Fakt, že $\sup X = s$ znamená dvě věci - s je horní závora X ($\forall x \in X : s \geq x$) a s je nejmenší horní závora ($\forall y \in \mathbb{R} : (\forall x \in X : x \leq y) \rightarrow s \leq y$). Zkuste tu druhou podmínku vyjádřit obměnou. To už by vám snad mělo pomoci. Pak budete chtít ukázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdete nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \rightarrow |a_n - s| < \varepsilon$, tedy $s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon$.

ad 2) V definici cauchyovské posloupnosti se kvantifikují dvě přirozená čísla $m, n \geq n_0$. Zkuste jedno z nich zafixovat - neomezí to tu posloupnost?

Indukce

Úloha 5.2 (4 body).

1) Nechť $(X, \leq)$ je **konečná** neprázdná částečně uspořádaná množina (poset). Dokažte matematickou indukcí podle počtu prvků množiny X (označme $n = |X|$), že X obsahuje alespoň jeden **minimální prvek**.

Formálně dokazujete tvrzení:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : (\forall X : |X| = n \implies \exists m \in X \text{ minimální}).$$

2) Dokažte, že platí:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2 \mid (n^3 + 11n).$$

Nápověda. Začněte tím, že tvrzení dokážete pro jednoprvkovou množinu. Potom přejděte k indukčnímu kroku - předpokládejte, že tvrzení platí pro n prvkové množiny, a chcete ho dokázat pro libovolnou $n + 1$ prvkovou množinu X . Zkuste využít indukční předpoklad pro množinu X - abyste to mohli udělat, budete ji muset nějak pozměnit.

Svazy

Úloha 5.3 (4 body). Necht' FLE je množina všech výrokových formulí.

1. **Vlastnosti vyplývání:** Určete, které vlastnosti (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita) má relace logického vyplývání $\models$ na množině FLE . Dokažte, že se **nejedná** o částečné uspořádání (nápopověda: co antisymetrie?).
2. **Faktorizace na poset:** Uvažujme relaci logické ekvivalence $\equiv$ definovanou jako:

$$\varphi \equiv \psi \iff (\models \varphi \rightarrow \psi \text{ a zároveň } \models \psi \rightarrow \varphi).$$

Ukažte, že na faktorové množině $\mathcal{L} = FLE / \equiv$ je indukovaná relace $[\varphi] \leq [\psi] \iff \varphi \models \psi$ skutečným **částečným uspořádáním**. (Tady $[\varphi] = \{\psi \mid \psi \in FLE \wedge \varphi \equiv \psi\}$.)

3. **Vizualizace a svazová struktura:** Nakreslete Hasseův diagram tohoto uspořádání pro případy, kdy máme k dispozici:
 - **1 atom** (proměnnou p) – diagram bude mít 4 prvky.
 - **2 atomy** (proměnné p, q) – diagram bude mít 16 prvků.

Na základě nakreslených diagramů rozhodněte:

- (a) Jedná se o **lineární** uspořádání? (Pokud ne, najděte v diagramu "neporovnatelnou" dvojici formulí).
- (b) Jedná se o **svaz**? (Tj. má každá dvojice v diagramu jednoznačný "strop" a "dno"?).
- (c) Jakou logickou spojku reprezentuje operace suprema a infima?
- (d) Existují nejmenší a největší prvek? Jak vypadají?

Nápopověda. 1. **Antisymetrie:** Uvědomte si rozdíl mezi rovností formulí a logickou ekvivalencí. Pokud $\varphi \models \psi$ a zároveň $\psi \models \varphi$, znamená to nutně, že φ a ψ jsou identické řetězce znaků? (Zkuste např. $\varphi = p \wedge q$ a $\psi = q \wedge p$). Na faktorové množině už tento problém zmizí, protože tam φ a ψ spadnou do stejné "krabičky" $[\varphi] = [\psi]$.

2. **Množinová interpretace (Jak to nakreslit):** Místo abyste pracovali s nekonečným množstvím formulí, dívejte se na jejich pravdivostní ohodnocení - ty se dají reprezentovat jako posloupnost nul a jedniček. Ekvivalenční třídu $[\varphi]$ můžeme ztotožnit s **množinou všech ohodnocení** v , pro která je φ pravdivá, tedy něco jako $V_\varphi = \{v \mid v \text{ ohodnocení atomů t.j. } v(\varphi) = 1\}$.
 - Čemu odpovídá relace vyplývání $\varphi \models \psi$, když si místo ekvivalenčních tříd $[\varphi], [\psi]$ budeme představovat množiny ohodnocení V_φ, V_ψ ?
 - Říkali jsme si, že potenční množina uspořádaná $\subseteq$ tvoří svaz (vzpomeňte si, čemu odpovídají sup a inf). Tady řešíte všechny podmnožiny množiny všech ohodnocení jednoho nebo dvou atomů.