

Definice 3.1. Grupou rozumíme čtveřici $(G, \star, ', e)$, kde G je neprázdná množina, $e \in G$, $\star$ je binární operace na G (tedy $\star: G \times G \rightarrow G$) a $'$ je unární operace na G ($': G \rightarrow G$) splňující axiomy:

$$(G1) \text{ Asociativita: } \forall x, y, z \in G: \quad x \star (y \star z) = (x \star y) \star z,$$

$$(G2) \text{ Neutrální prvek: } \forall x \in G: \quad x = x \star e = e \star x,$$

$$(G3) \text{ Inverzní prvky: } \forall x \in G: \quad e = x \star x' = x' \star x,$$

Pokud je operace $\star$ navíc komutativní, tedy splňuje:

$$(A) \text{ Komutativita: } \forall x, y \in G: \quad x \star y = y \star x,$$

řekneme, že je komutativní, nebo Abelovská.

Definice 3.2. Nechť $G = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa a $H \subseteq G$ podmnožina taková, že $1 \in H$. Řekneme, že H je uzavřena na grupové operace, pokud pro každé $a, b \in H$ platí:

$$a^{-1} \in H \quad \text{a} \quad a \cdot b \in H.$$

Čtveřici $H = (H, \cdot|_H, ^{-1}|_H, 1)$ nazýváme podgrupou, přičemž $|_H$ značí restrikci operace na množinu H . Značíme $H \leq G$.

Definice 3.3. Nechť H, G jsou grupy t.ž. $H \leq G$. Množinu $gH := \{g \cdot h \mid h \in H\}$, kde $g \in G$, nazýváme levý coset nebo levá rozkladová třída podgrupy H .

Úloha 3.1 (4 body). Rohodněte, zda následující dvojice (množina, operace) tvoří grupu - ověřte, zda platí grupové axiomy:

- i) $(\mathcal{P}(X), \cap)$, kde X je libovolná neprázdná množina a $\cap$ je klasická operace průniku.
- ii) $(\mathcal{P}(X), \Delta)$, kde X je libovolná neprázdná množina a Δ je operace symetrického rozdílu:

$$a \Delta b := (a \setminus b) \cup (b \setminus a).$$

- iii) Nechť $G = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa a $a \in G$. Na G definujme operaci $\star: G \times G \rightarrow G$ jako $g \star h := g \cdot a \cdot h$. Tvoří $(G, \star)$ grupu?

Úloha 3.2 (2 body). Nechť $G = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je abelovská grupa a H její podgrupa. Na G definujme relaci $\sim$ jako:

$$\forall a, b \in G: \quad a \sim b \iff ab^{-1} \in H.$$

Ukažte, že $\sim$ je ekvivalence.

Úloha 3.3 (2 body). Dokažte, že průnik dvou podgrup je opět podgrupa.

Úloha 3.4 (2 body). Bud' $G = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa a H její podgrupa. Dokažte, že pro každé $a, b \in G$ platí:

$$aH = bH \iff a^{-1}b \in H.$$

Bonusová úloha (1 bod). Nechť $G = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je konečná grupa a H její podgrupa. Odůvodněte, že pro každé $a, b \in G$ platí $|aH| = |bH|$ (všechny cosety mají stejnou velikost).