

4 Polynomy více neurčitých

0.1 Normální tvar, stupeň, výška, vedoucí člen

1. Zapište polynomy v **normálním tvaru**, určete **stupně jeho členů** a **stupeň daného polynomu**:

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3 - 3x_1^2 + 2x_2 x_3^2 - \frac{1}{3} x_1^2 x_2^2 x_3 + \frac{4}{5} x_2 x_3^2 - 6x_1 x_2,$

(b) $f(x, y) = (x - y)^3 + (x + y)^3,$

(c) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 x_2 + 4x_1 x_3 - 5x_1 x_2 + 6x_3 x_1 - 8x_1 x_2 x_3.$

2. Určete **výšky** členů polynomů ze cvičení 1, uspořádejte je a určete **výšku** a **vedoucí člen** polynomů.

0.2 Symetrický a jednoduchý symetrický polynom

1. Rozhodněte, zda je polynom symetrický. V kladném případě ho zapište pomocí jednoduchých symetrických polynomů. V záporném případě nejprve doplňte další sčítance tak, aby nově vzniklý polynom byl symetrický.

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_3 + x_3^2 + x_1^2 + x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3,$

(b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^3 x_3^3 + 2x_1 x_2 + x_1^3 x_2^3 x_3 + 5x_1^2 x_2^2 x_3^2,$

(c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4 + 2x_1^2 x_4 + 5x_1 x_3 x_4^2 - 5x_4 x_1^2 + 2x_1 x_3^2 x_4 - 8x_1 x_3 x_4^2.$

2. Určete počet členů jednoduchých symetrických polynomů, pomocí kterých jste zapsali polynomy v předchozím cvičení.

0.3 Součin jednoduchých symetrických polynomů

1. Vyjádřete $f \cdot g$ jako součet jednoduchých symetrických polynomů.

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = \sum^{(3)} x_1^3 x_2^2 x_3^2, g(x_1, x_2, x_3) = \sum^{(3)} x_1^3 x_2,$

(b) $\left(\sum^{(3)} x_1^3\right) \left(\sum^{(3)} x_1 x_2\right),$

(c) $\left(\sum^{(3)} x_1^2 x_2\right) \left(\sum^{(3)} x_1\right),$

(d) $\left(\sum^{(3)} x_1^2 x_2\right) \left(\sum^{(3)} x_1 x_2 x_3\right)$

(e) $\left(\sum^{(3)} x_1^3 x_2\right) \left(\sum^{(3)} x_1^2 x_2\right)$

$$(f) \left(\sum^{(4)} x_1^3 x_2 x_3 \right) \left(\sum^{(4)} x_1^3 x_2^2 x_3 \right)$$

$$(g) \left(\sum^{(4)} x_1^2 x_2^2 \right) \left(\sum^{(4)} x_1 x_2 \right)$$

$$(h) \left(\sum^{(5)} x_1^3 x_2^2 x_3 \right) \left(\sum^{(5)} x_1^3 x_2^2 x_3^2 x_4^2 \right)$$

$$(i) \left(\sum^{(5)} x_1^3 x_2^3 x_3 \right) \left(\sum^{(5)} x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 \right)$$

$$(j) s_4 s_2 \text{ ve třech proměnných,}$$

$$(k) s_1 s_1 \text{ ve třech proměnných,}$$

$$(l) s_1 s_2 s_3 \text{ v pěti proměnných,}$$

$$(m) s_1^2 s_2 \text{ ve třech proměnných.}$$

2. Vyjádřete součin elementárních symetrických polynomů jako součet jednoduchých symetrických polynomů:

$$(a) \sigma_1 \sigma_2^2 \text{ (ve třech a poté čtyřech proměnných),}$$

$$(b) \sigma_1 \sigma_2 \text{ (ve třech proměnných),}$$

$$(c) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \text{ (v pěti proměnných),}$$

$$(d) \sigma_1^3 \text{ (ve třech proměnných).}$$