

1 Základní terminologie, interpolační polynom

1. Co můžeme říct o řešení této soustavy rovnic ještě před samotným řešením? Soustavu vyřešte.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Řešte nehomogenní soustavu rovnic pro pravé strany $\vec{b}_1 = (1, 2, 1)^T$ a $\vec{b}_2 = (1, 3, 1)^T$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{b}.$$

3. Řešte nehomogenní soustavu rovnic pro pravé strany $\vec{b}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\vec{b}_2 = (0, 1, 0)^T$ a $\vec{b}_3 = (0, 0, 1)^T$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{b}.$$

4. Napište obecné řešení soustavy:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

5. Odvoďte vztah pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

6. Zapište polynom v *normálním tvaru* a určete jeho *stupeň*:

(a) $f(x) = (x - 2)(x^2 + 4) - (4x - 8 + x^3) + 2x^2,$

(b) $f(x) = (x - 2)^3(x + 2) - (x + 2)^3(x - 2).$

7. Nad konečným oborem integrity $\mathbb{Z}_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ nalezněte součet, součin a rozdíl $fg - (f + g)$ polynomů $f, g \in \mathbb{Z}_5[x]$, jestliže $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$, $g(x) = 2x^3 - x + 1$.

8. Rozložte polynom $f(x) = x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 10 \in \mathbb{R}\langle x \rangle$. Zjistěte také pro jaké hodnoty t platí, že $f(t) = 0$.

9. Nalezněte všechna komplexní čísla t , pro která polynom $f(x) = x^{10} - 16x^6 + 64x^4 - 1024$ nabývá hodnoty 0.
10. Vypište devět různých polynomů nad $\mathbb{Z}_2$. Rozhodněte, zda se jedná o devět různých funkcí. Pokud ne, nalezněte polynomy, které reprezentují stejné funkce.
11. Sestrojte polynom stupně 3 s koeficienty v $\mathbb{R}$, který:
 - (a) má kořeny v 0, 1 a 2.
 - (b) má kořeny v 0, 1 a 2 a zároveň má v bodu 3 hodnotu 1.
 - (c) prochází body $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$ a $(3, 1)$.
12. Určete reálnou polynomickou funkci minimálního stupně, jejíž graf prochází body $[0, 9]$, $[1, 1]$, $[2, 1]$ a $[4, 25]$.