

Úloha 2.1 (3 body). U následujících relací rozhodněte, zda jsou reflexivní, symetrické, slabě/silně antisymetrické nebo tranzitivní.

- i) $R_1 := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid x = y + 1 \vee x = 2y\}$
- ii) $R_2 := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a - b \in \mathbb{Q}\}$
- iii) $R_3 := \{((a, b), (u, v)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid a < u \vee b = v\}$

Úloha 2.2 (4 body). U následujících relací rozhodněte, zda se jedná o funkce, případně jestli jsou injektivní, surjektivní nebo dokonce bijekce.

- i) $F_1 := \{(x, y) \in (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Q} \mid y = \frac{1}{x}\}$
- ii) $F_2 := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 = y\}$
- iii) $F_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$
- iv) $F_4 := \{(a + bi, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{(a + bi) \cdot (a - bi)}\}$

Poznámka. Každé komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ lze psát ve tvaru $z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Úloha 2.3 (1 body). Necht' F je množina všech funkcí $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (tedy $F = {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$). Na F uvažujme relaci $\sim$ definovanou jako

$$f \sim g \iff \text{Rng}(f) = \text{Rng}(g).$$

Ukažte, že $\sim$ je ekvivalence. Jak vypadá $F/\sim$?

Definice 2.1 (Graf). Graf je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde:

- V je konečná neprázdná množina vrcholů,
- $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ je množina hran,

tj. každá hrana je neuspořádaná dvojice různých vrcholů. Takový graf nazýváme *neorientovaný*.

Definice 2.2 (Sled a cesta). **Sled** (nebo též procházka) v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost vrcholů a hran $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, kde $v_0, \dots, v_k \in V$ a $e_1, \dots, e_k \in E$.

Cesta z vrcholu u do vrcholu v je sled $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, t.ž. $u = v_0$, $v = v_k$ a pro $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ platí $i \neq j \rightarrow e_i \neq e_j$ (žádná cesta se ve sledu nevyskytuje víckrát než jednou).

Úloha 2.4 (2 body). Necht' $G = (V, E)$ je neorientovaný graf. Na V definujme relaci $\sim$ jako

$$u, v \in V : \quad u \sim v \iff \text{existuje cesta z } u \text{ do } v.$$

Dokažte, že $\sim$ je ekvivalence.

Poznámka. Třídám ekvivalence $\sim$ se říká komponenty souvislosti.