

Úloha 1.1 (3 body). Dokažte následující rovnosti:

$$(x \setminus y) \setminus z = x \setminus (y \cup z),$$

$$x \setminus (y \setminus z) = (x \setminus y) \cup (x \cap z).$$

Hint: *Dokažte postupně inkluze $\subseteq$ a $\supseteq$.*

Úloha 1.2 (4 body). Nechť x je množina. Najděte formuli $\varphi(x)$, která platí právě tehdy, když x má právě 2 prvky. Jinými slovy, najděte formuli φ , t.ž.

$$\varphi(x) \iff \text{množina } x \text{ má právě 2 prvky.}$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné. Dokážete obdobně sestavit formuli φ_n , t. ž.

$$\varphi_n(x) \iff \text{množina } x \text{ má právě } n \text{ prvků.}$$

Používejte pouze symboly jazyka teorie množin ($=, \in$) a symboly, které jsme si definovali ($\cap, \cup, \neq, \subseteq, \notin, \dots$). Nepoužívejte čísla a symboly pro velikost množiny ($|\cdot|$) - ten se právě snažíte popsat v jazyce teorie množin (pro konečné množiny).

Úloha 1.3 (3 body). Nechť X je množina, obsahující alespoň dva prvky. Relace R na $\mathcal{P}(X)$ je dána předpisem $R = \{(x, y) \in \mathcal{P}(X)^2 \mid x \subseteq y\}$. Rozhodněte zda je R reflexivní, antireflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní, ekvivalence nebo částečné uspořádání. Svá tvrzení zdůvodněte.

Bonusová úloha (1 bod). Použijte formuli φ z úlohy 1.2, abyste ukázali, že pro libovolnou množinu x existuje množina tvořená všemi dvouprvkovými podmnožinami x . Z axiomu extenzionality je tato množina jednoznačně určená - v literatuře se většinou značí $[x]^2$.

Hint: *Použijte φ a vydělení.*