

4. soutěžní série

31. 3. 2025

Úloha 1. Diferencovatelné funkce $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou lineárně nezávislé. Dokažte, že mezi $f'_1, \dots, f'_n$ je $n - 1$ lineárně nezávislých funkcí. (5 bodů)

Úloha 2. Buď $S = n_1, n_2, \dots, n_k$ konečná posloupnost kladných celých čísel se součtem n . Předpokládejme, že $n < 2k$. Ukažte, že pro každé q , $1 \leq q \leq n$, existuje podposloupnost S (ne nutně souvislá) se součtem q . (10 bodů)

Úloha 3. Dokažte, že pro nekonečně mnoho přirozených čísel m je

$$\frac{1}{5 \cdot 2^m} \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k} 3^k$$

liché celé číslo. (10 bodů)

Úloha 4. Najděte nejmenší k takové, že každá k -prvková množina přímk v $\mathbb{R}^3$ obsahuje 3 po dvou rovnoběžné přímky nebo 3 po dvou různoběžné přímky, nebo 3 po dvou mimoběžné přímky. (15 bodů)

4th contest series

March 31, 2025

Problem 1. Differentiable functions $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are linearly independent. Prove that there are $n - 1$ linearly independent functions among $f'_1, \dots, f'_n$. (5 points)

Problem 2. Let $S = n_1, n_2, \dots, n_k$ be a finite sequence of positive integers with sum n . Suppose that $n < 2k$. Show that for all q with $1 \leq q \leq n$, there is a subsequence of S (not necessarily connected) with sum q . (10 points)

Problem 3. Prove that there are infinitely many positive integers m such that

$$\frac{1}{5 \cdot 2^m} \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k} 3^k$$

is an odd integer. (10 points)

Problem 4. Find the minimal k such that every set of k different lines in $\mathbb{R}^3$ contains either 3 mutually parallel lines or 3 mutually intersecting lines or 3 mutually skew lines. (15 points)