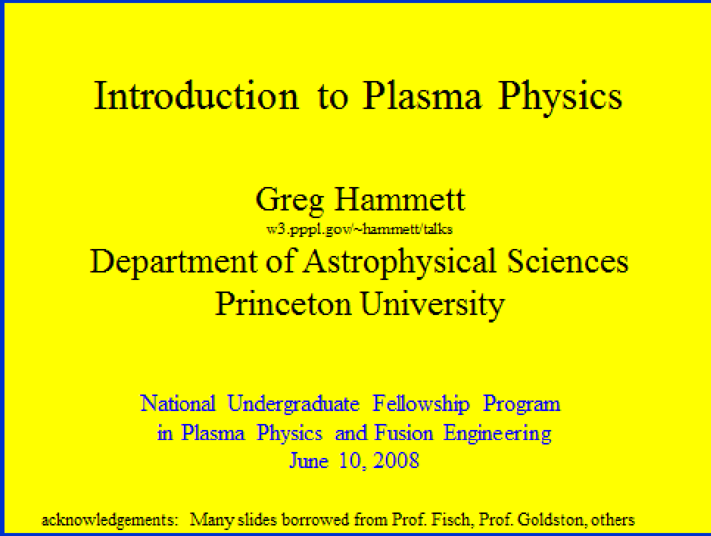
FP 1B 2024

Statistická mechanika nabitých částic – kinetické rovnice

Debyeho stínící vzdálenost

Coulombovský logaritmus

jazyk - česky, slovensky, anglicky, … v aproximaci



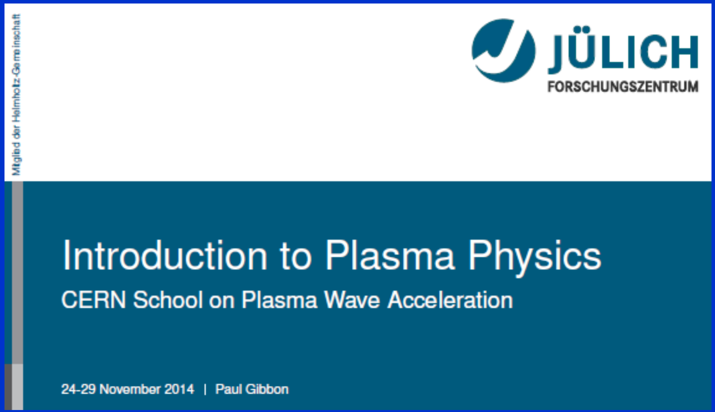
Literatura:

Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu

„Velký Kracík“

J.Kracík, B. Šesták a L. Aubrecht

Academia Praha 1974

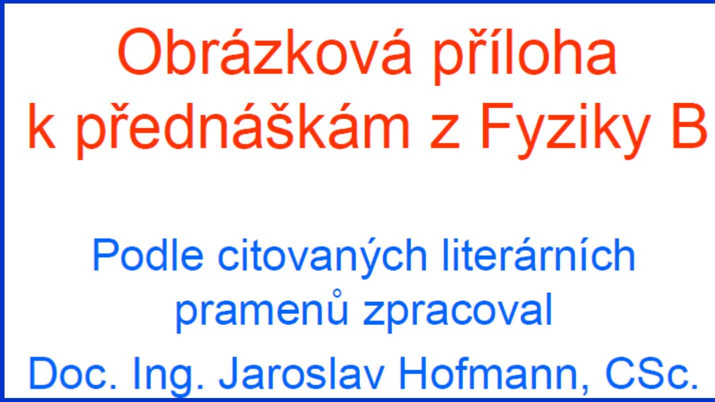


Fyzika plazmatu

J.Kracík, J. Tobiáš

Academia, Praha 1966

„Malý Kracík“



PLASMA

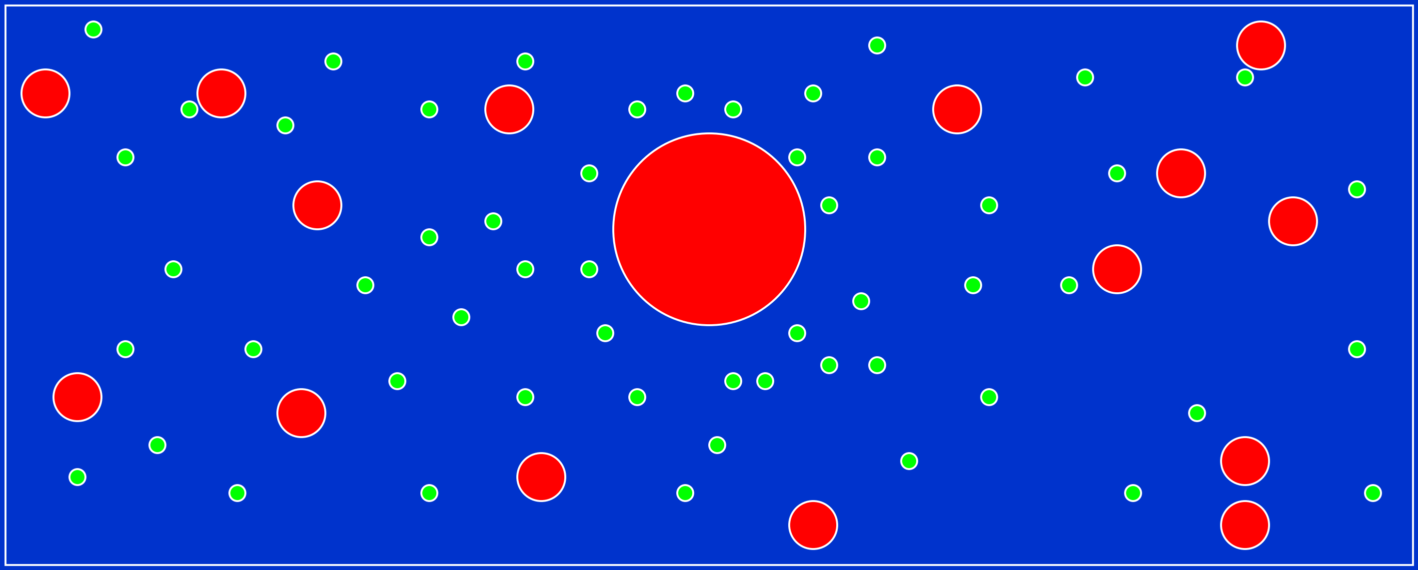
Simple definition:
a quasi-neutral gas of charged particles showing collective behaviour.

Quasi-neutrality: number densities of electrons, n_e, and ions, n_i , with charge state Z are locally balanced: $n_e \approx Zn_i$

Collective behaviour: long range of Coulomb potential (1/r) leads to nonlocal influence of disturbances in equilibrium.

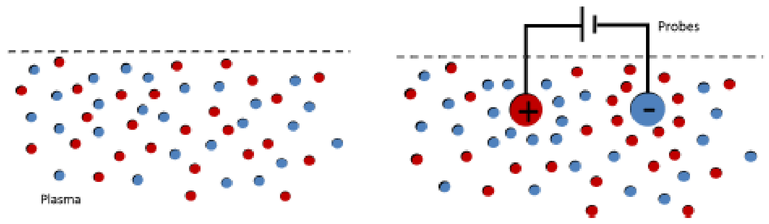
Macroscopic fields usually dominate over microscopic fluctuations, e.g.:

$$\rho = e(Zn_i - n_e) \Rightarrow \nabla.\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$



Plasma Shielding

Debye shielding



What is the potential $\phi(r)$ of an ion (or positively charged sphere) immersed in a plasma?

For equal ion and electron temperatures ($T_e = T_i$), we have:

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{3}{2}k_B T_e \qquad (2)$$

Therefore,

$$\frac{v_i}{v_e} = \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} = \left(\frac{m_e}{A m_p}\right)^{1/2} = \frac{1}{43} \qquad \text{(hydrogen, Z=A=1)}$$

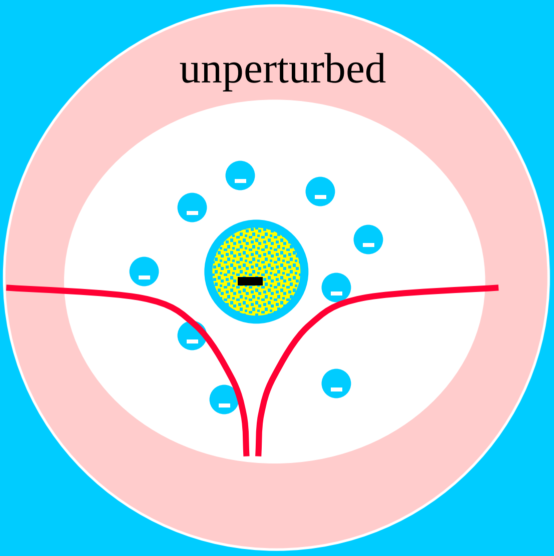
Ions are almost stationary on electron timescale!
To a good approximation, we can often write:

$$n_i \simeq n_0,$$

where the material (eg gas) number density, $n_0 = N_A \rho_m / A$.

$M_p/m_e \sim 1836$

Debye shielding 1



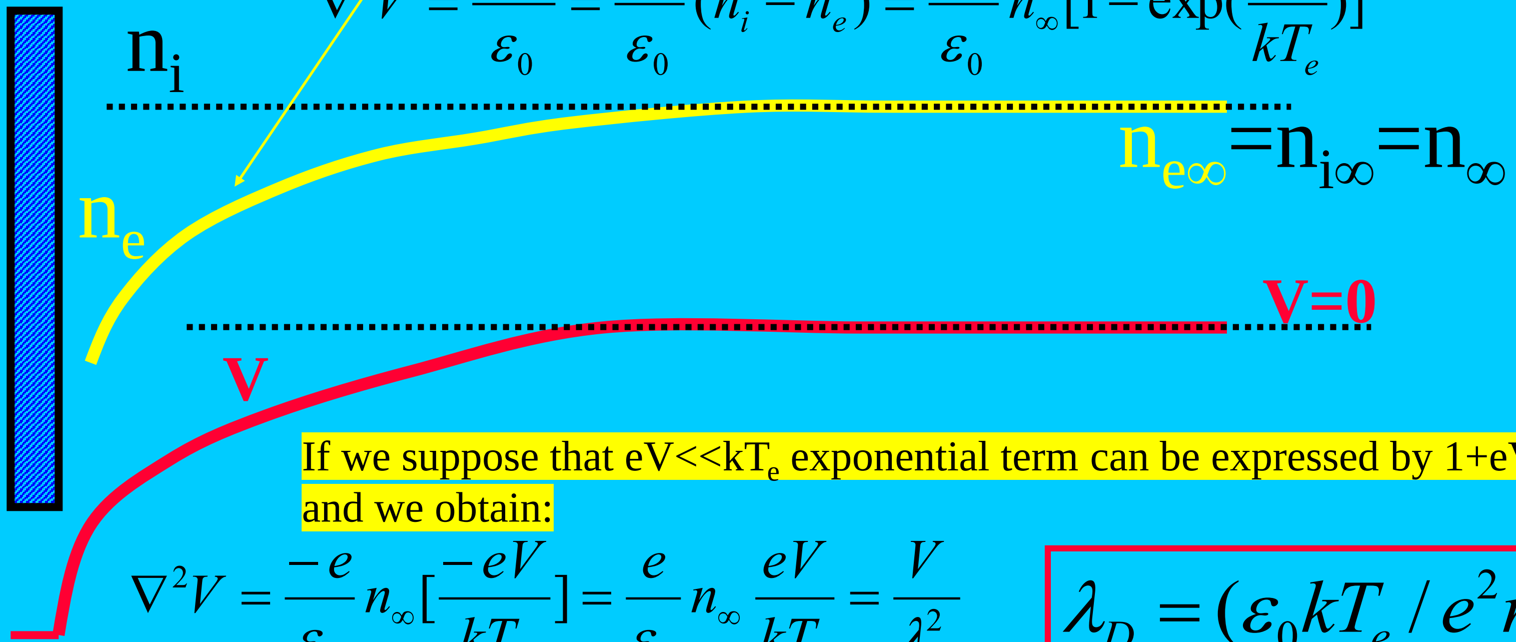
The effect of potential – perturbing charge in a plasma are generally much shorter- range than in vacuum because the charges in plasma tend to distribute themselves so as to shield the plasma from the electric field the perturbing charge generates.

The effect can be deduced readily from Poisson's equation by assuming, for example, <u>that ions do not move but that electrons adopt a thermal equilibrium</u> distribution in which electron distribution is determined by the Boltzmann factor:

$$n_e = n_\infty \exp(eV / kT_e)$$

n_∞ is electron density far from the perturbing charge where potential V is taken as a zero. Poisson's equation is:

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} = \frac{-e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e) = \frac{-e}{\varepsilon_0} n_\infty [1 - \exp(\frac{eV}{kT_e})]$$



If we suppose that $eV \ll kT_e$ exponential term can be expressed by $1 + eV/kT_e$ and we obtain:

$$\nabla^2 V = \frac{-e}{\varepsilon_0} n_\infty [\frac{-eV}{kT_e}] = \frac{e}{\varepsilon_0} n_\infty \frac{eV}{kT_e} = \frac{V}{\lambda_D^2}$$

$$\boxed{\lambda_D = (\varepsilon_0 k T_e / e^2 n_\infty)^{1/2}}$$

Linear approximation just to understand problem, signs are <u>roughly</u> OK

Debye shielding 2

$$n_e = n_\infty \exp(eV/kT_e)$$

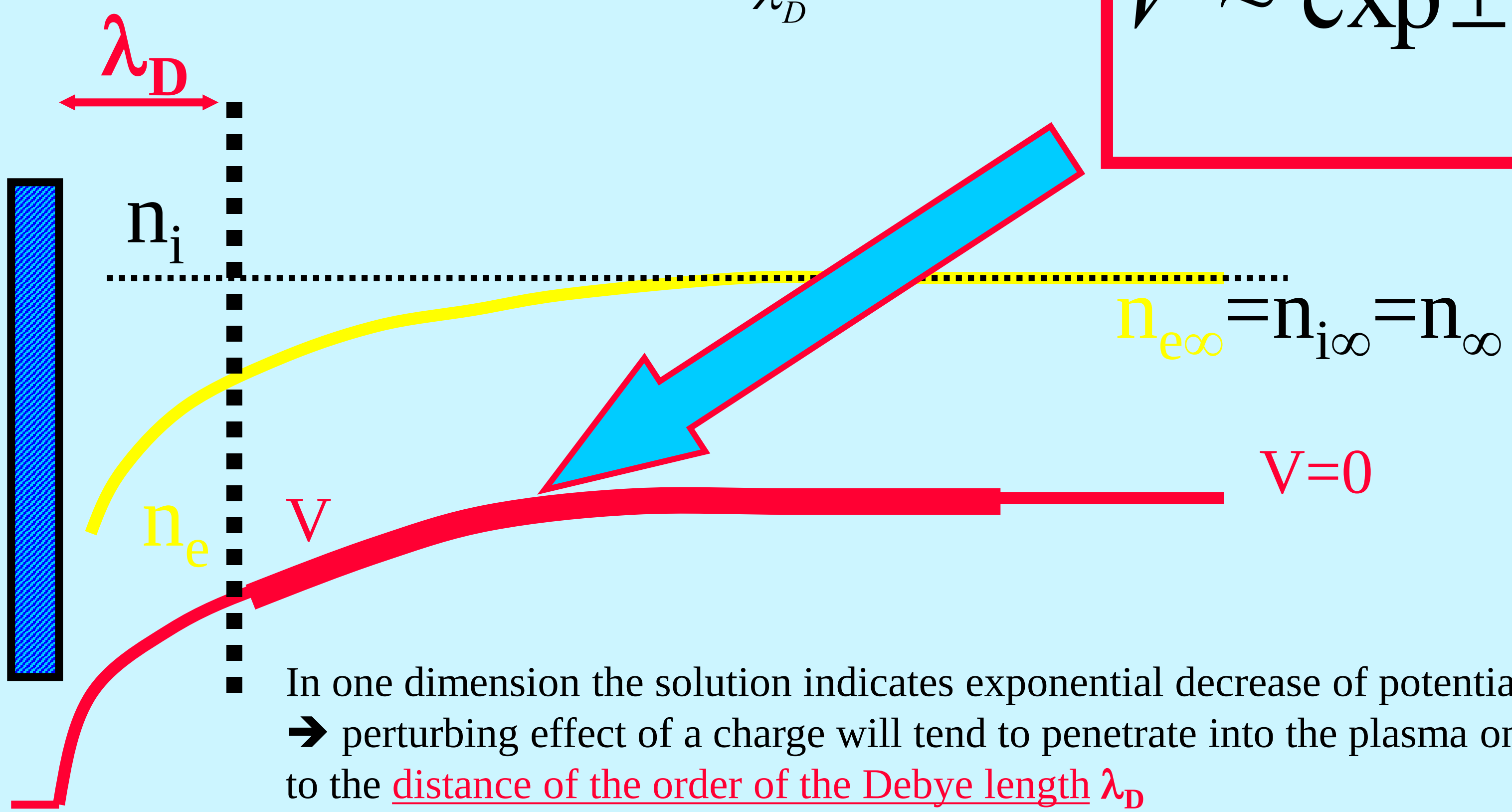
$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} = \frac{-e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e) = \frac{-e}{\varepsilon_0} n_\infty [1 - \exp(\frac{eV}{kT_e})]$$

$eV \ll kT_e$, exponential can be approximated by linear term ➔

$$\nabla^2 V = \frac{-e}{\varepsilon_0} n_\infty [\frac{-eV}{kT_e}] = \frac{e}{\varepsilon_0} n_\infty \frac{eV}{kT_e} = \frac{V}{\lambda_D^2}$$

$$\lambda_D = (\varepsilon_0 k T_e / e^2 n_\infty)^{1/2}$$

$$\nabla^2 V = \frac{V}{\lambda_D^2} \Rightarrow \boxed{V \sim \exp \pm \frac{x}{\lambda_D}}$$



In one dimension the solution indicates exponential decrease of potential ➔ perturbing effect of a charge will tend to penetrate into the plasma only to the distance of the order of the Debye length λ_D

Linear approximation just to understand problem

Debye shielding 3

$$n_e = n_\infty \exp(eV/kT_e) \qquad \nabla^2 V = \frac{V}{\lambda_D^2} \Rightarrow V \sim \exp \pm \frac{x}{\lambda_D}$$

$eV \ll kT_e$

$$\boxed{\lambda_D = (\varepsilon_0 k T_e / e^2 n_\infty)^{1/2}}$$

$$l_d = 69\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \; in \; K, n \; in \; m^{-3}$$

For laboratory plasma with T_e=1eV and $n_e=10^{11}cm^{-3}$ ➔ **λ_D=23μm**

$n_e=10^{11}cm^{-3}$ ➔ "distance" between particles ~ **2μm**;

For plasma with T_e=0.001eV (~10K) and $n_e=10^{11}cm^{-3}$ ➔ **λ_D=0.7μm**
$n_e=10^{11}cm^{-3}$ ➔ "distance" between particles ~ **2μm**;

For plasma with T_e=0.001eV (~10K) and $n_e=10^{7}cm^{-3}$ ➔ **λ_D=74μm**

Linear approximation just to understand problem

Potential of a Uniform Sphere of Charge

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\cancel{\frac{\partial V}{\partial \theta}} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

Debye shielding 4

(not in SI!):

In spherical symmetry Poisson's equation gives *(not in SI!)*:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\{Vr\} = \frac{4\pi e^2 n_{e\infty}}{kT_e} V(r) \Rightarrow V = \frac{A}{r}\exp(-r/\lambda_{DX}) + \frac{B}{r}\exp(r/\lambda_{DX})$$

$$\lambda_{DX} = (kT_e / 4\pi e^2 n_\infty)^{1/2}$$

Applying the boundary condition that as r tends to infinity V must tend to zero gives B=0,
V must tend to e/r as r tend to zero ➔

$$V = \frac{e}{r}\exp(-r/\lambda_{DX})$$

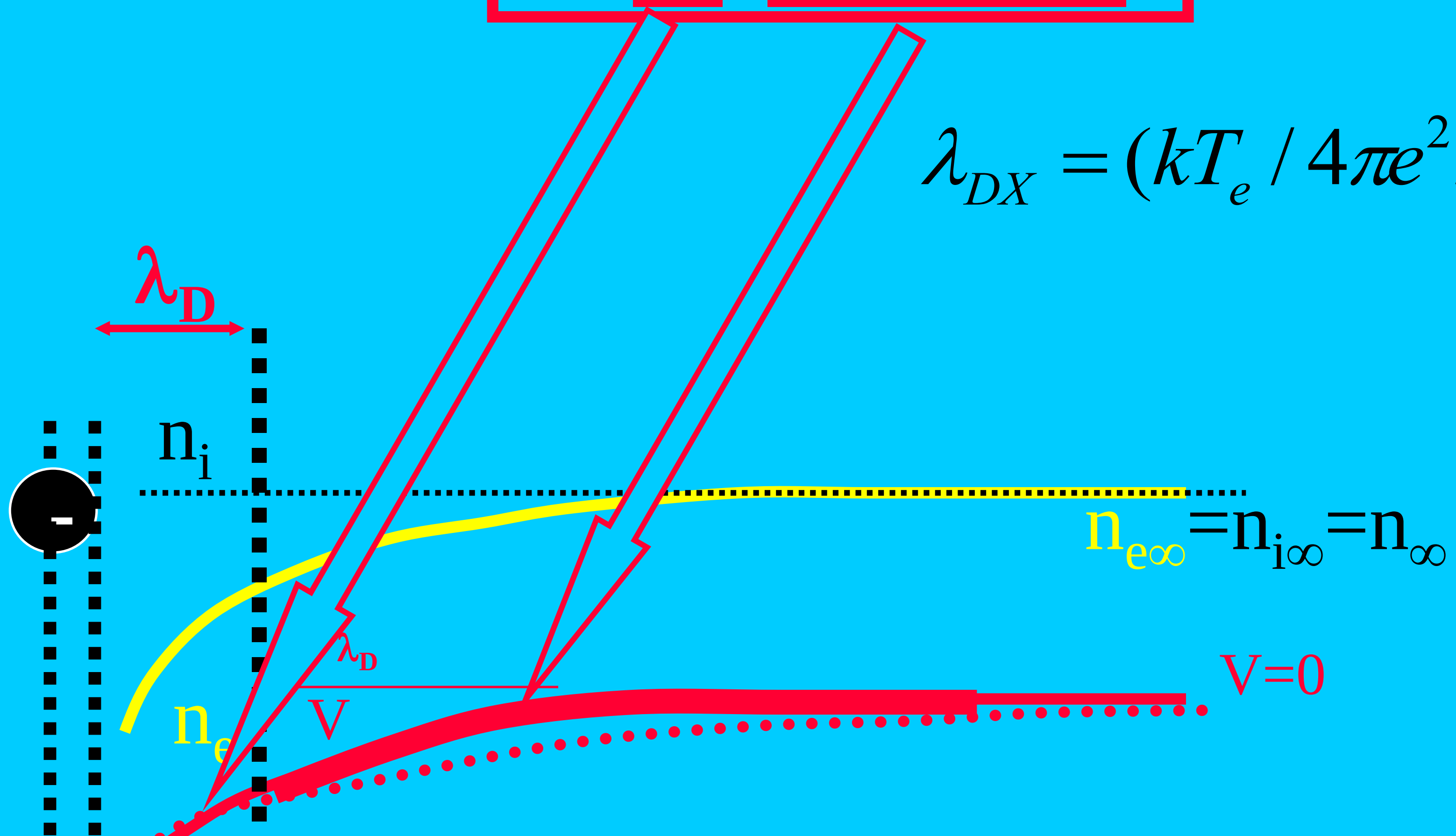
(not in SI!):

$$\lambda_D = (\varepsilon_0 kT_e / e^2 n_\infty)^{1/2}$$

Debye shielding 5

$$\boxed{V = \underline{\frac{e}{r}}\exp\underline{(-r/\lambda_{DX})}}$$

$$\lambda_{DX} = (kT_e/4\pi e^2 n_\infty)^{1/2}$$



The solution indicates exponential decrease of potential
➔ perturbing effect of a charge will tend to penetrate into the plasma only to the **distance of the order of the Debay length** λ_D

Debye shielding 6

$$\boxed{V = \frac{e}{r}\exp(-r/\lambda_{DX})}$$

$$\lambda_{DX} = (kT_e / 4\pi e^2 n_\infty)^{1/2}$$

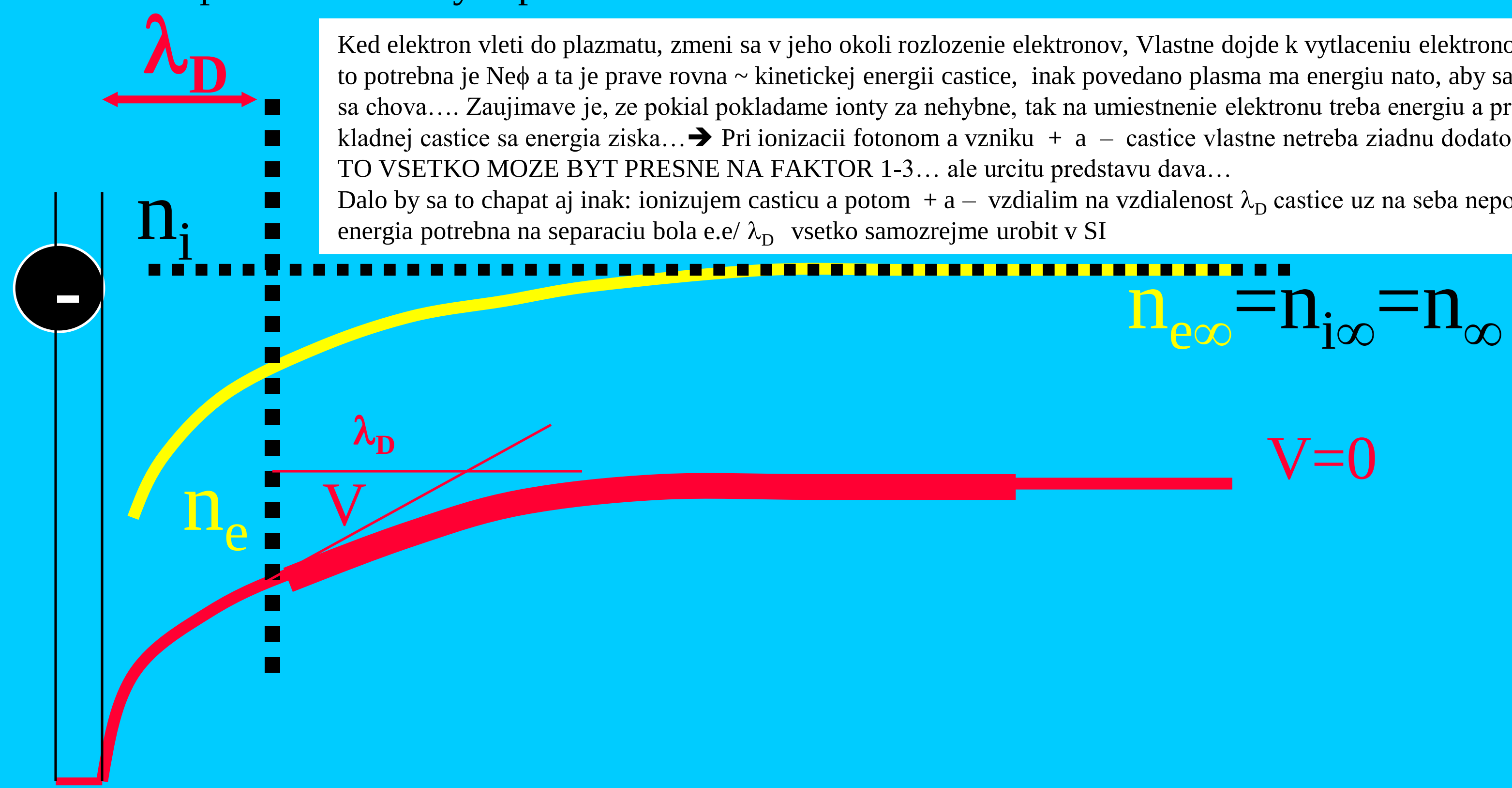
Just rewritten

$$(n_\infty \lambda_{DX}^3 \, 4/3\pi) 3e^2 / \lambda_{DX} = kT_e$$

$$N(e^2/\lambda_{DX}) \approx Ne(e/\lambda_{DX}) \approx Ne\varphi \approx \textit{potencial energy} \approx kT_e$$

N – number of particles in debye sphere

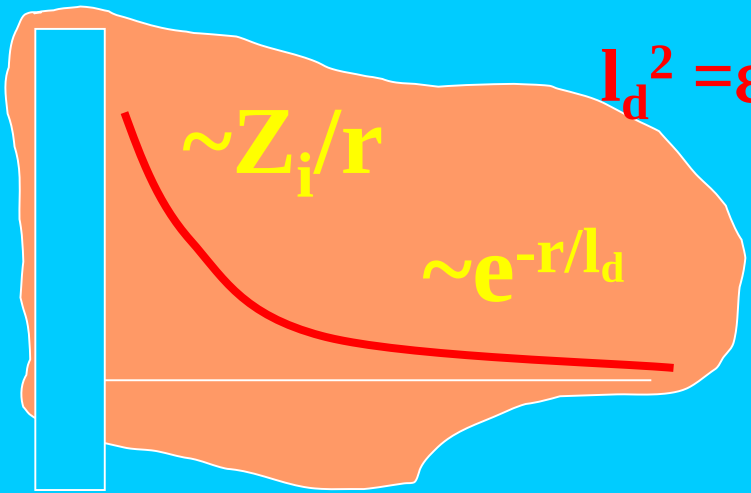
Ked elektron vleti do plazmatu, zmeni sa v jeho okoli rozlozenie elektronov, Vlastne dojde k vytlaceniu elektronov - energia na to potrebna je Neϕ a ta je prave rovna ~ kinetickej energii castice, inak povedano plasma ma energiu nato, aby sa chovalo jak sa chova…. Zaujimave je, ze pokial pokladame ionty za nehybne, tak na umiestnenie elektronu treba energiu a pri umiestneni kladnej castice sa energia ziska…➔ Pri ionizacii fotonom a vzniku + a – castice vlastne netreba ziadnu dodatocnu energiu…
TO VSETKO MOZE BYT PRESNE NA FAKTOR 1-3… ale urcitu predstavu dava…
Dalo by sa to chapat aj inak: ionizujem casticu a potom + a – vzdialim na vzdialenost λ_D castice uz na seba neposobia … energia potrebna na separaciu bola e.e/ λ_D vsetko samozrejme urobit v SI



Ještě raz

- Stínění v plazmě
- Ustanovení debyovského stínění

$$l_d^2 = \varepsilon_0 kT/ne^2$$



$\phi(r) = (Z_i e/4\pi\varepsilon_0)/r \, * e^{-r/l_d}$

$\sigma_c(v) = 2\pi \int b \, db$

Problém srážek na velkou vzdálenost

Výpočet:

$$l_d = 69\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \; in \; K, n \; in \; m^{-3}$$

at 1000K, $n = 4.8 \times 10^{12} m^{-3} = 4.8 \times 10^{6}\ cm^{-3}$

l_d=1 mm = 0.001m

at 10K, $n = 1 \times 10^{10} m^{-3} = 1 \times 10^{4}\ cm^{-3}$

l_d~2 mm ~ 0.002m

Další kroky

$$\lambda_{De} \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 T_e}{n_e e^2}} \simeq 7434 \sqrt{\frac{T_e(\mathrm{eV})}{n_e(\mathrm{m}^{-3})}}\ \mathrm{m}, \quad \text{electron Debye length.}$$

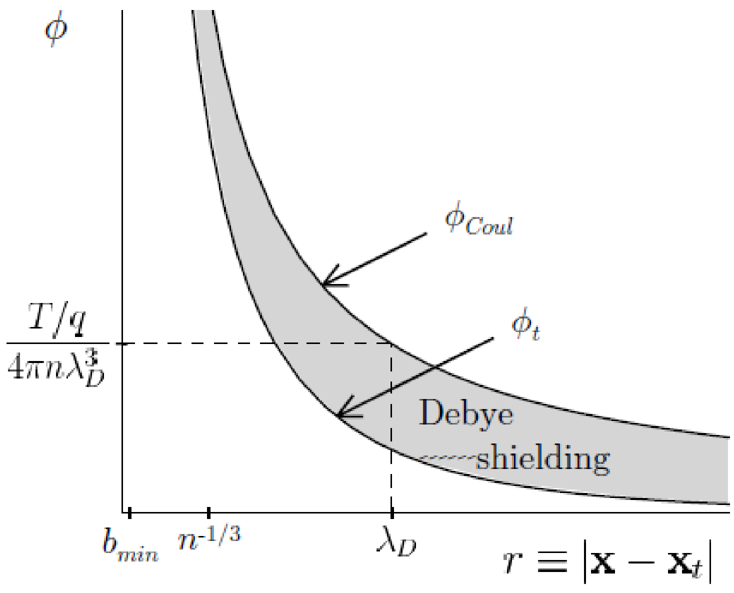


Figure 1.1: Potential ϕ_t around a test particle of charge q_t in a plasma and Coulomb potential ϕ_{Coul}, both as a function of radial distance from the test particle. The shaded region represents the Debye shielding effect. The characteristic distances are: λ_D, Debye shielding distance; $n_e^{-1/3}$, mean electron separation distance; $b_{\mathrm{min}}^{\mathrm{cl}} = q^2/(\{4\pi\epsilon_0\}T)$, classical distance of "closest approach" where the $e\phi/T << 1$ approximation breaks down.

Debye lengths

$$l_d = 69\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T\,in\,K, n\,in\,m^{-3}$$

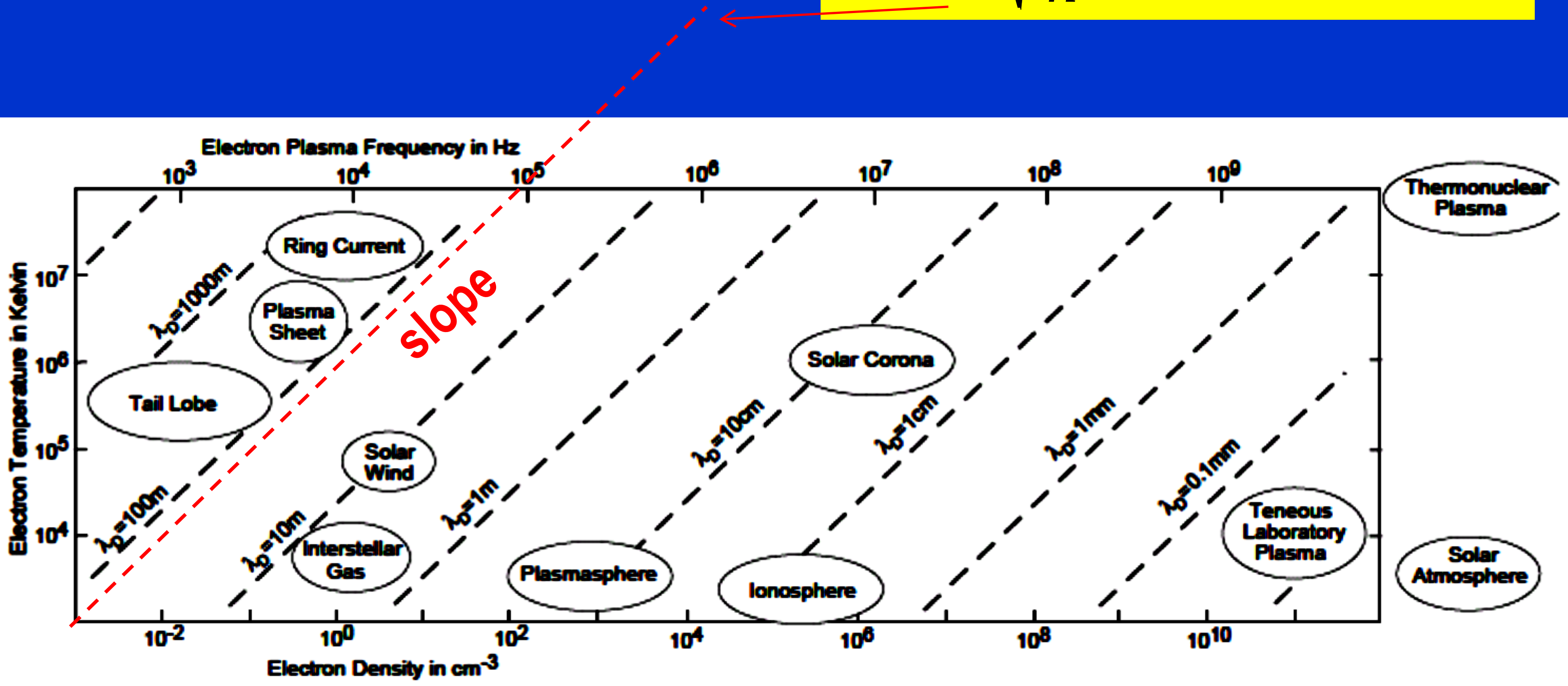
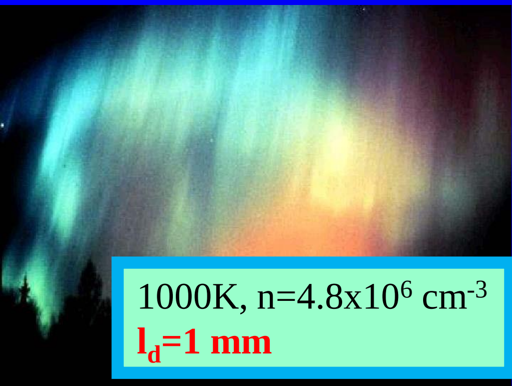


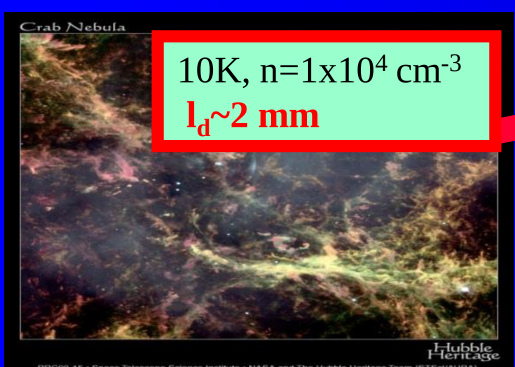
Figure 1.1: Plasma parameters.

Temperatures and energies



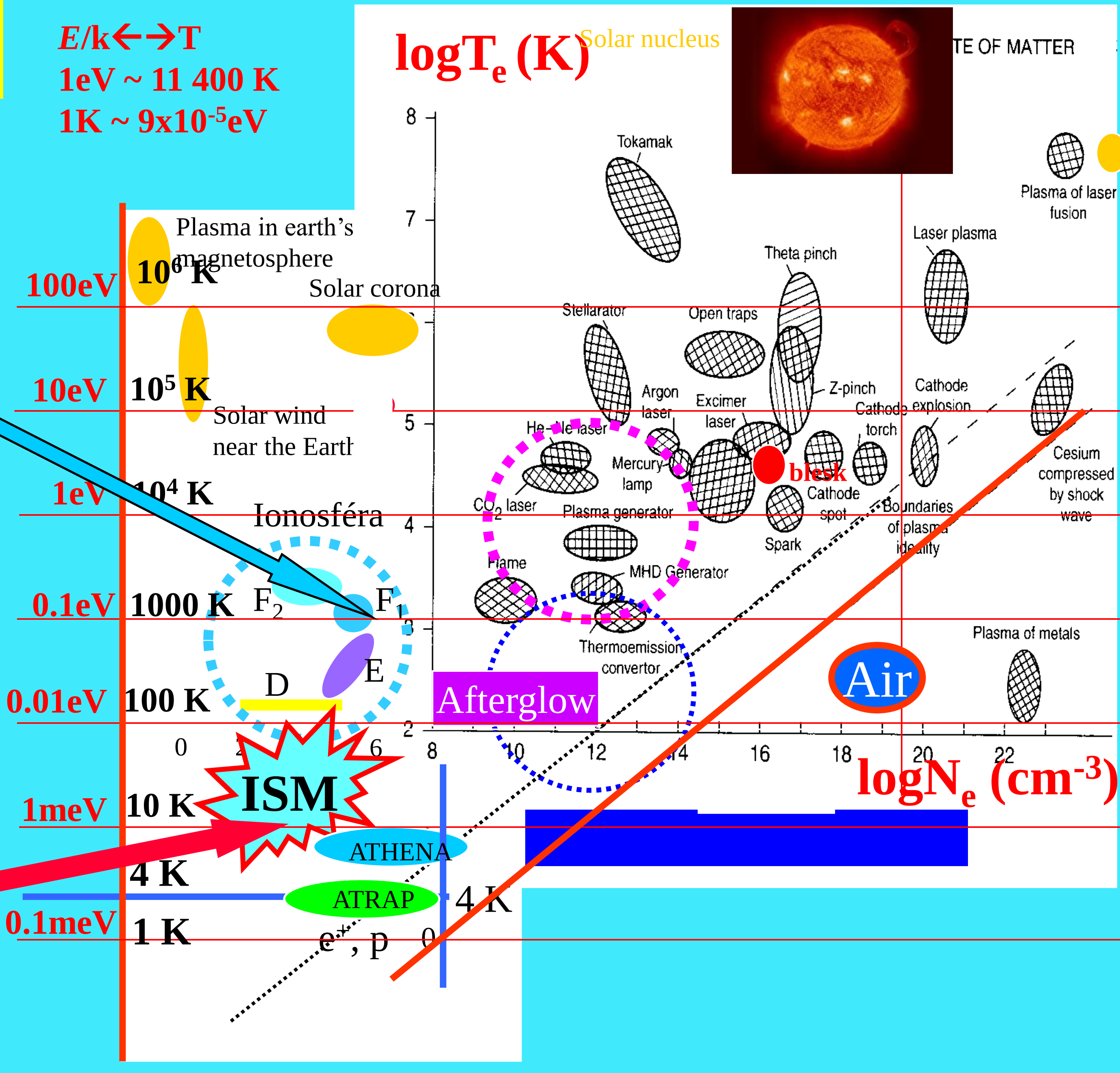
1000K, n=4.8x10^6 cm^{-3}
l_d=1 mm

$$l_d = 69\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T\,in\,K, n\,in\,m^{-3}$$



10K, n=1x10^4 cm^{-3}
l_d~2 mm

$E/k \leftarrow\rightarrow T$
1eV ~ 11 400 K
1K ~ 9x10^{-5}eV



Další kroky

Debyeho stínící vzdálenost

- Debyeho stínící vzdálenost
- Potenciál kolem náboje v plazmě.

$\Delta\phi = -1/\varepsilon_0 \, e\Sigma Z_i n_i$

$$n_e = n_\infty \exp(eV / kT_e)$$

Plazma

$\Delta\phi = -1/\varepsilon_0 \, (Z_1 n_1 + Z_2 n_2)$

Uvážíme-li, že koncentrace jednotlivých složek plazmatu jsou dány Maxwellovým-Boltzmannovým zákonem:

$n_i = n_{i0} e^{-Z_i e\phi/kT_i}$

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} = \frac{-e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e) = \frac{-e}{\varepsilon_0} n_\infty [1 - \exp(\frac{eV}{kT_e})]$$

Dostaneme:

$$\boxed{\Delta\phi = -e/\varepsilon_0 \, (Z_1 n_{10} e^{-Z_1 e\phi/kT_1} + Z_2 n_{20} e^{-Z_2 e\phi/kT_2})}$$

Pro $Z_i e\phi \ll kT_i$

$$\boxed{\Delta\phi = -e/\varepsilon_0 \, \{\underbrace{(Z_1 n_{10} + Z_2 n_{20})}_{=0} - \phi(Z_1^2 e\, n_{10}/kT_1 + Z_2^2 e\, n_{20}/kT_2)\}}$$

Debyeho stínící vzdálenost

Debye-Hückel radius

- Debyeho stínící vzdálenost.
- Debyeovský poloměr

$$\Delta\phi = -e/\varepsilon_0 \{\underbrace{(Z_1 n_{10} + Z_2 n_{20})}_{=0} - \phi\underbrace{\boxed{(Z_1^2\, e\, n_{10}/kT_1 + Z_2^2\, e\, n_{20}/kT_2\,)}}_{=1/l_d^2}\}$$

$$\Delta\phi = \phi/l_d^2$$

$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T_1 T_2}{e^2 (Z_1^2 n_{10} T_2 + Z_2^2 n_{20} T_1)}$$

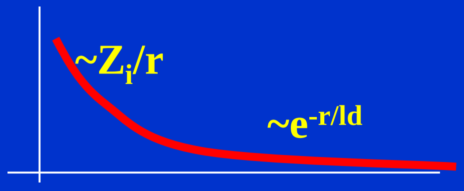
Vzhledem k symetrii problému… kolem bodového náboje.

$$1/r\, d^2(r\phi)/dr^2 = \phi/l_d^2$$

$$\phi(r) = 1/r(C_1 e^{-r/l_d} + C_2 e^{+r/l_d})$$

$\phi(\mathrm{inf})=0 \rightarrow C_2=0,$

$$\phi(r) = (Z_i e/4\pi\varepsilon_0)/r \,{}_*\, e^{-r/l_d}$$



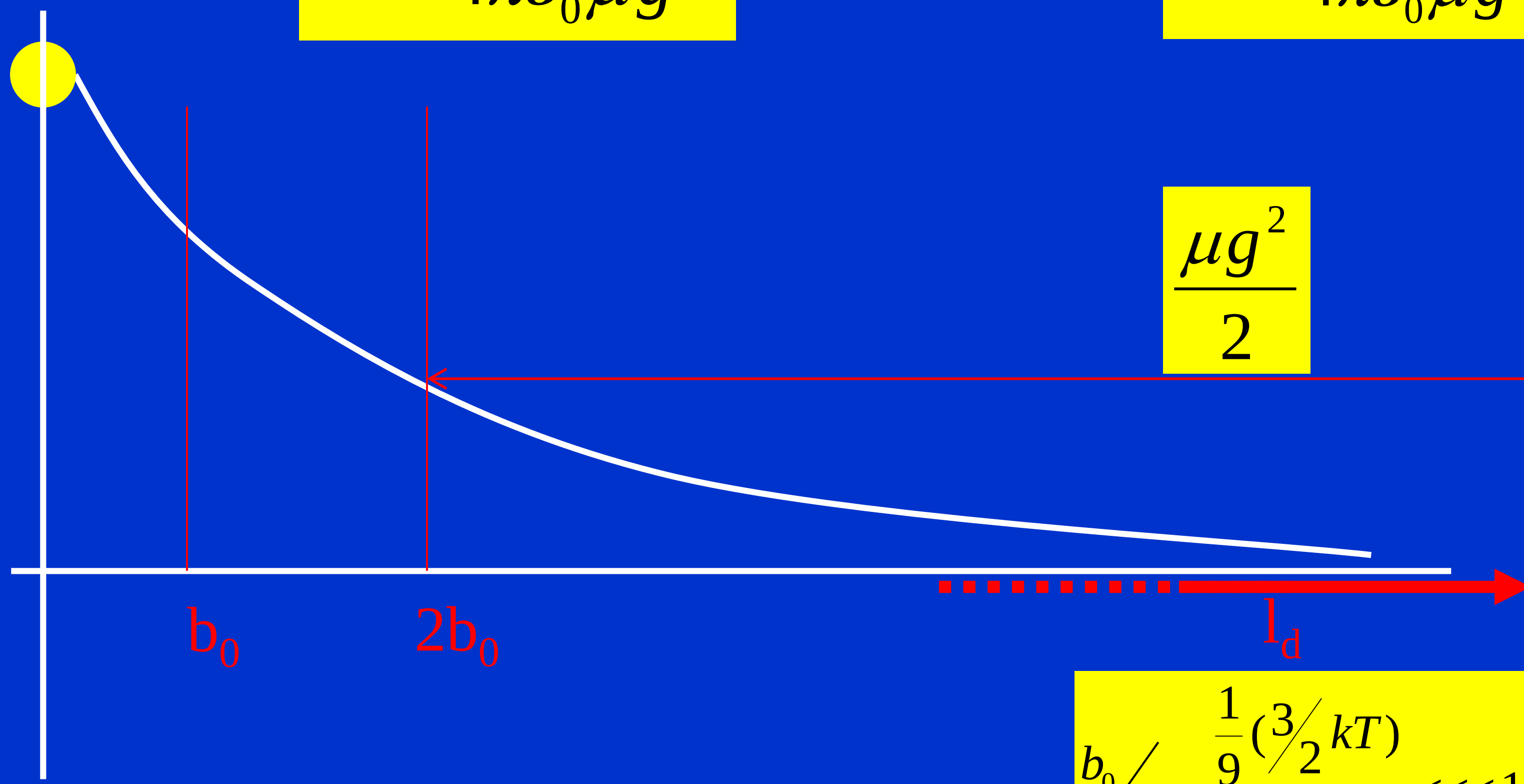
Debyeho stínící vzdálenost

- Shrňte, co se od účastníků očekává – pochopit, co je plazma.

$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T_1 T_2}{e^2 (Z_1^2 n_{10} T_2 + Z_2^2 n_{20} T_1)} \longrightarrow l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T}{n e^2}$$

For quasineutral plasma,
$n_{10} = n_{20} = n/2 =$ with $T_1 = T_2$ we obtain

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \longrightarrow b_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}$$



$$\frac{\mu g^2}{2}$$

$$b_0 / l_d = \frac{\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2} kT\right)}{\mathrm{N}\,\frac{1}{2}\mu g^2} <<< 1$$

Debyeho stínící vzdálenost

- Jiný pohled

$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 kT_1T_2}{e^2(Z_1^2 n_{10}T_2 + Z_2^2 n_{20}T_1)} \longrightarrow l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2}$$

For quasineutral plasma,
$n_{10} = n_{20} = n/2 =$ with $T_1 = T_2$ we obtain

$$b_0 = \frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \longrightarrow b_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}$$

$$4\pi b_0 \mu g^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_0}$$

$$kT/nl_d^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi b_0 \mu g^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_0} = kT/nl_d^2 \longrightarrow b_0 \mu g^2 = \frac{l_d kT/3}{\boxed{4/3\,\pi n l_d^3}} = \frac{l_d kT/3}{N_D}$$

N_D je počet částic v „debayove sféře“

The problem is that b_0 is for individual collision
l_d is for many particles...

$$b_0/l_d = \frac{\frac{1}{9}(3/2\,kT)}{N_D\,1/2\,\mu g^2} <<< 1$$

It is equivalent to condition $e\phi << kT$

Převod jednotek, plazmatický parametr

- kT~1eV ➔T=11600K
- 300K ➔kT~25.8meV, 3/2kT=38.8meV
- 1eV ~8065.5cm^{-1}

Plazmatický parametr;

Ideální plazma --- potenciální energie častíc je << kinetická energie

U(r)<<kT

r^3~1/n

γ=ne^6/(kT)^3<<<1

γ=plazmatický parametr

debyeovo stínění platí jenom tehdy, pokud N_d>>>1

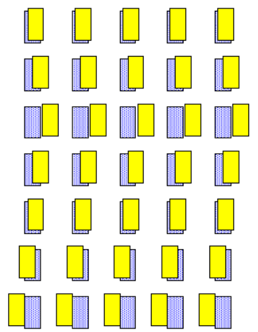
$$N_d = n.\frac{4}{3}\pi l_d^3 = \frac{1.38x10^6 T^{3/2}}{n^{1/2}}, \quad T\ v\ K$$

N_d>>>1,➔ l_d^3.n>>>1

l_d<<<L,

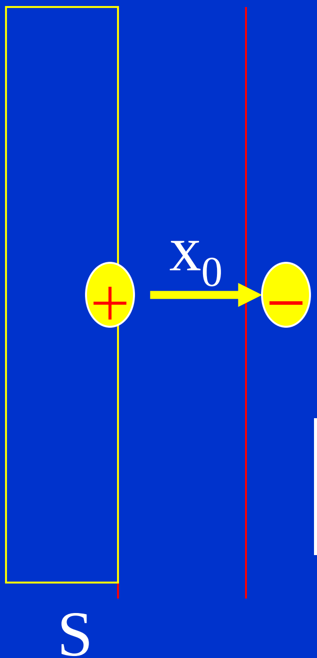
Debye-Hückel radius

Oscilace plazmatu



A plasma oscillation: displaced electrons oscillate around fixed ions. The wave does not necessarily propagate.

- Pozor jiné jednotky



Gausova veta

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = Q/\varepsilon_0 \quad \longrightarrow \quad E = enx \;/\; \varepsilon_0$$

$$m_e d^2(x)/dt^2 = -eE$$

$$\varpi_p = (4\pi n e^2/m_e)^{1/2}$$

$$d^2x \;/ dt^2 = -\varpi_p^2 x$$

$$f_p = 9\sqrt{n(10^{12}\,\mathrm{cm}^{-3})}\ \mathrm{GHz}$$

Langmuir, or plasma, frequency

$$l_d \varpi_p = (2T/m_e)^{1/2} \approx thermal \quad electron \quad velocity$$

Introduction to Plasma Physics

P. Gibbon

1.4 Plasma oscillations

So far we have considered characteristics, such as density and temperature, of a plasma in equilibrium. We can also ask how fast the plasma will respond to an external disturbance, which could be due to electromagnetic waves (e.g. a laser pulse) or particle beams. Consider a quasi-neutral plasma slab in which an electron layer is displaced from its initial position by a distance δ, as illustrated in Fig. 3. This creates two 'capacitor' plates with surface charge $\sigma = \pm e n_e \delta$, resulting in an electric field

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{e n_e \delta}{\varepsilon_0}.$$

The electron layer is accelerated back towards the slab by this restoring force according to

$$m_e \frac{dv}{dt} = -m_e \frac{d^2\delta}{dt^2} = -eE = \frac{e^2 n_e \delta}{\varepsilon_0},$$

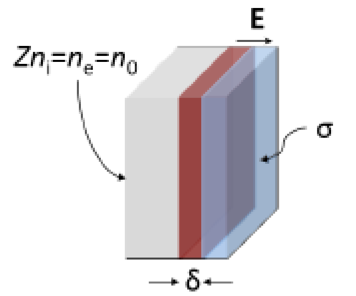


Fig. 3: Slab or capacitor model of an oscillating electron layer

or

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \omega_p^2 \delta = 0$$

where

$$\omega_p \equiv \left(\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}\right)^{1/2} \simeq 5.6 \times 10^4 \left(\frac{n_e}{\text{cm}^{-3}}\right)^{1/2} \text{s}^{-1} \qquad (11)$$

is the *electron plasma frequency*.

Electron plasma frequency

$$\varpi_p = (4\pi n e^2 / m_e)^{1/2}$$

This quantity can be obtained via another route by returning to the Debye sheath problem of Section 1.1 and asking how quickly it would take the plasma to adjust to the insertion of the foreign charge. For a plasma of temperature T_e, the response time to recover quasi-neutrality is just the ratio of the Debye length to the thermal velocity $v_{te} \equiv \sqrt{k_B T_e / m_e}$; that is,

$$t_D \simeq \frac{\lambda_D}{v_{te}} = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e} \cdot \frac{m}{k_B T_e} \right)^{1/2} = \omega_p^{-1}.$$

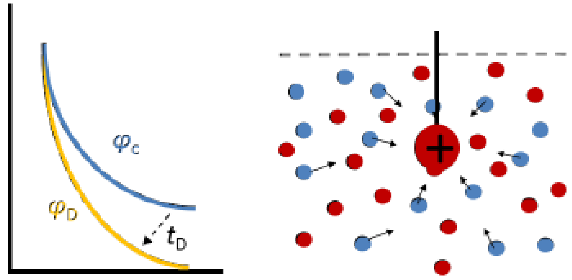


Fig. 4: Response time to form a Debye sheath

If the plasma response time is shorter than the period of a external electromagnetic field (such as a laser), then this radiation will be *shielded out*. To make this statement more quantitative, consider the ratio

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2}.$$

Plazmová frekvence elektronů – charakteristická frekvence oscilací a vln v plazmatu, která souvisí s pohyby elektronů na pozadí iontů. Vratnou silou je Coulombova elektrická síla vznikající vychýlením souboru elektronů oproti souboru iontů. Tato frekvence závisí především na koncentraci elektronů, $\omega_p=(n_e e^2/m_e\varepsilon_0)^{1/2}$. Pod touto frekvencí se nemohou šířit řádné elektromagnetické vlny. Při nižších frekvencích totiž energii vlny přebírají oscilace elektronů. Měřením plazmové frekvence lze určit koncentraci plazmatu.

Zpět Glosář

$$\varpi_p = (4\pi n e^2 / m_e)^{1/2}$$

This quantity can be obtained via another route by returning to the Debye sheath problem of Section 1.1 and asking how quickly it would take the plasma to adjust to the insertion of the foreign charge. For a plasma of temperature T_e, the response time to recover quasi-neutrality is just the ratio of the Debye length to the thermal velocity $v_{te} \equiv \sqrt{k_B T_e / m_e}$; that is,

$$t_D \simeq \frac{\lambda_D}{v_{te}} = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e} \cdot \frac{m}{k_B T_e} \right)^{1/2} = \omega_p^{-1}.$$

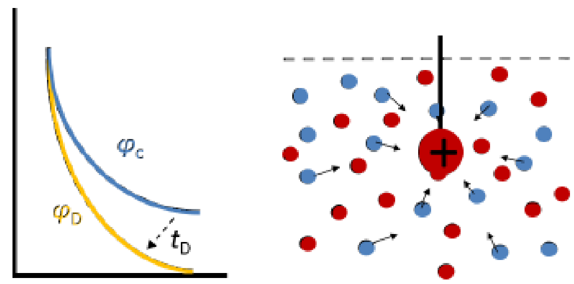


Fig. 4: Response time to form a Debye sheath

If the plasma response time is shorter than the period of a external electromagnetic field (such as a laser), then this radiation will be *shielded out*. To make this statement more quantitative, consider the ratio

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2}.$$

Critical density

Setting this to unity defines the wavelength λ_μ for which $n_e = n_c$, or

$$n_c \simeq 10^{21} \lambda_\mu^{-2} \text{ cm}^{-3}. \tag{12}$$

Radiation with wavelength $\lambda > \lambda_\mu$ will be reflected. In the pre-satellite/cable era, this property was exploited to good effect in the transmission of long-wave radio signals, which utilizes reflection from the ionosphere to extend the range of reception.

Typical gas jets have $P \sim 1$ bar and $n_e = 10^{18}$–10^{19} cm^{-3}, and the critical density for a glass laser is $n_c(1\mu) = 10^{21}$ cm^{-3}. Gas-jet plasmas are therefore *underdense*, since $\omega^2/\omega_p^2 = n_e/n_c \ll 1$. In this case, *collective effects* are important if $\omega_p \tau_{int} > 1$, where τ_{int} is some characteristic interaction time, such as the duration of a laser pulse or particle beam entering the plasma. For example, if $\tau_{int} = 100$ fs and $n_e = 10^{17}$ cm^{-3}, then $\omega_p \tau_{int} = 1.8$ and we will need to consider the plasma response on the interaction time-scale. Generally this is the situation we seek to exploit in all kinds of plasma applications, including short-wavelength radiation, nonlinear refractive properties, generation of high electric/magnetic fields and, of course, particle acceleration.

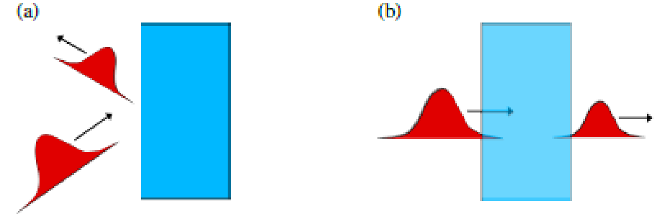
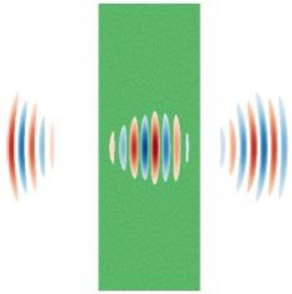


Fig. 5: (a) Overdense plasma, with $\omega < \omega_p$, showing mirror-like behaviour. (b) Underdense plasma, with $\omega > \omega_p$, which behaves like a nonlinear refractive medium.

Plasma response time ω_p^{-1} dictates type of interaction with time-varying external fields - eg: laser

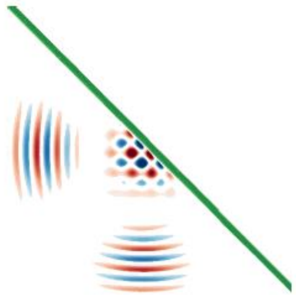
Underdense plasma, $\omega > \omega_p$:

- slow plasma response
- nonlinear refractive medium



Overdense plasma, $\omega < \omega_p$:

- radiation shielded out
- mirror-like optics



The critical density

To make this more quantitative, consider ratio:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2}.$$

Setting this to unity defines the wavelength for which $n_e = n_c$, or

Critical density

$$n_c \simeq 10^{21} \lambda_\mu^{-2}\ \mathrm{cm}^{-3} \tag{9}$$

above which radiation with wavelengths $\lambda > \lambda_\mu$ will be reflected.
cf: radio waves from ionosphere.

Summary

- Ideal, thermal plasmas possess intrinsic length scale: λ_D
- Characteristic timescale: ω_p^{-1}
- Frequency ratio ω_p/ω_0 determines nature of interaction:
  - $\omega_p/\omega_0 < 1 \rightarrow$ propagation
  - $\omega_p/\omega_0 > 1 \rightarrow$ reflection

In previous text

$$\lambda_D = (\varepsilon_0 k T_e / e^2 n_\infty)^{1/2}$$

$$N_d = n.\frac{4}{3}\pi l_d^3 = \frac{1.38x10^6 T^{3/2}}{n^{1/2}}, \quad T \ v \ K$$

$$\varpi_p = (4\pi n e^2 / m_e)^{1/2}$$

Standard formulae

SI

Name	Symbol	Formula (SI)	Formula (cgs)
Debye length	λ_D	$\left(\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e}\right)^{\frac{1}{2}}$ m	$\left(\frac{k_B T_e}{4\pi e^2 n_e}\right)^{\frac{1}{2}}$ cm
Particles in Debye sphere	N_D	n $\frac{4\pi}{3}\lambda_D^3$	n $\frac{4\pi}{3}\lambda_D^3$
Plasma frequency (electrons)	ω_{pe}	$\left(\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}\right)^{\frac{1}{2}}$ s^{-1}	$\left(\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}}$ s^{-1}
Plasma frequency (ions)	ω_{pi}	$\left(\frac{Z^2 e^2 n_i}{\varepsilon_0 m_i}\right)^{\frac{1}{2}}$ s^{-1}	$\left(\frac{4\pi Z^2 e^2 n_i}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}$ s^{-1}
Thermal velocity	$v_{te} = \omega_{pe}\lambda_D$	$\left(\frac{k_B T_e}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}}$ ms^{-1}	$\left(\frac{k_B T_e}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}}$ cms^{-1}
Electron gyrofrequency	ω_c	eB/m_e s^{-1}	eB/m_e s^{-1}
Electron-ion collision frequency	ν_{ei}	$\frac{\pi^{\frac{3}{2}} n_e Z e^4 \ln\Lambda}{2^{\frac{1}{2}}(4\pi\varepsilon_0)^2 m_e^2 v_{te}^3}$ s^{-1}	$\frac{4(2\pi)^{\frac{1}{2}} n_e Z e^4 \ln\Lambda}{3 m_e^2 v_{te}^3}$ s^{-1}
Coulomb-logarithm	$\ln\Lambda$	$\ln\frac{9N_D}{Z}$	$\ln\frac{9N_D}{Z}$

Useful formulae

Plasmafrequency	$\omega_{pe} = 5.64 \times 10^4 n_e^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{s}^{-1}$
Critical density	$n_c = 10^{21} \lambda_L^{-2}\ \mathrm{cm}^{-3}$
Debye length	$\lambda_D = 743\ T_e^{\frac{1}{2}} n_e^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{cm}$
Skin depth	$\delta = c/\omega_p = 5.31 \times 10^5 n_e^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{cm}$
Elektron-ion collision frequency	$\nu_{ei} = 2.9 \times 10^{-6} n_e T_e^{-\frac{3}{2}} \ln\Lambda\ \mathrm{s}^{-1}$
Ion-ion collision frequency	$\nu_{ii} = 4.8 \times 10^{-8} Z^4 \left(\frac{m_p}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}} n_i T_i^{-\frac{3}{2}} \ln\Lambda\ \mathrm{s}^{-1}$
Quiver amplitude	$a_0 \equiv \frac{p_{osc}}{m_e c} = \left(\frac{I\lambda_L^2}{1.37 \times 10^{18}\mathrm{Wcm}^{-2}\mu\mathrm{m}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
Relativistic focussing threshold	$P_c = 17.5 \left(\frac{n_c}{n_e}\right)\ \mathrm{GW}$

T_e in eV; n_e, n_i in cm^{-3}, wavelength λ_L in μm

$n_e(r,t)=n_0 + n'_e(r,t)$

In the momentum equation we have assumed that the rate of momentum loss from the electron gas due to collisions is negligible. Considering singly charged ions, the charge density is given by

$$\rho(\mathbf{r},t) = -e[n_0 + n'_e(\mathbf{r},t)] + en_0 = -en'_e(\mathbf{r},t) \tag{1.4}$$

where the ion density was considered to be constant and uniform, and equal to n_0 (neglecting ion motion). Therefore,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\epsilon_0} = -\frac{e}{\epsilon_0} n'_e(\mathbf{r},t) \tag{1.5}$$

Eqs. (1.2), (1.3), and (1.5) constitute a complete set of equations to be solved for the variables $n'_e(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{u}_e(\mathbf{r},t)$, and $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$. Taking the divergence of (1.3) and using (1.2) to substitute for $\nabla \cdot \mathbf{u}_e$, we obtain

$$\frac{\partial^2 n'_e(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \frac{en_0}{m_e}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{1.6}$$

Combining (1.5) and (1.6) to eliminate $\nabla \cdot \mathbf{E}$, yields

$$\frac{\partial^2 n'_e(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 n'_e(\mathbf{r},t) = 0 \tag{1.7}$$

where

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}\right)^{1/2} \tag{1.8}$$

is called the *electron plasma frequency*. Equation (1.7) shows that $n'_e(\mathbf{r},t)$ varies harmonically in time at the electron plasma frequency,

$$n'_e(\mathbf{r},t) = n'_e(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_{pe} t) \tag{1.9}$$

In fact, all first-order perturbations have a harmonic time variation at the plasma frequency ω_{pe}. To justify this statement it is convenient to start with the assumption that all first-order quantities vary harmonically in time, as $\exp(-i\omega t)$. Eqs. (1.2) and (1.3) become, in this case,

$$n'_e = -\frac{i}{\omega} n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_e \tag{1.10}$$

$$\mathbf{u}_e = -\frac{ie}{\omega m_e}\mathbf{E} \tag{1.11}$$

which can be combined into

$$n'_e = -\frac{n_0 e}{\omega^2 m_e}\nabla \cdot \mathbf{E} \tag{1.12}$$

Substituting this expression for n'_e into (1.5), yields

$$\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{1.13}$$

which shows that a nontrivial solution requires $\omega = \omega_{pe}$. Therefore, all the perturbations vary harmonically in time at the electron plasma frequency. Further, for all variables there is no change in phase from point to point, implying the absence of wave propagation. The oscillations are therefore *stationary*. Also, (1.11) shows that the electron velocity is in the same direction as the electric field, so that these oscillations are *longitudinal*.

The electron plasma oscillations are also *electrostatic* in character. In order to show this aspect of the oscillations, consider Maxwell curl equations with a harmonic time variation,

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \tag{1.14}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} - i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}) \tag{1.15}$$

The electric current density is given by

$$\mathbf{J} = -en_0\mathbf{u}_e = \frac{in_0 e^2}{\omega m_e}\mathbf{E} \tag{1.16}$$

where we have used (1.11) for $\mathbf{u}_e$. Therefore,

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega\mu_0\epsilon_0\epsilon_r \mathbf{E} \tag{1.17}$$

where we have defined a relative permittivity by

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \tag{1.18}$$

For the electron plasma oscillations we have $\omega = \omega_{pe}$, so that $\epsilon_r = 0$, and (1.17) reduces to

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \tag{1.19}$$

Since the curl of the gradient of any scalar function vanishes identically,

Vlastní oscilace a srážky

- Pozor jiné jednotky

$$\varpi_p = (4\pi n e^2 / m_e)^{1/2}$$

$$\tau_{collision} \sim 1/\varpi_{collision}$$

Podmínka ideálnosti plazmatu

$$\varpi_p / \varpi_{collision} > 1$$

Many types of collisions …..

$$\varpi_p = (4\pi n e^2 / m_e)^{1/2}$$

$$l_d = 69\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \, in \, K, n \, in \, m^{-3}$$

$$f_p = 9\sqrt{n(10^{12}\,\mathrm{cm}^{-3})}\ \mathrm{GHz}$$

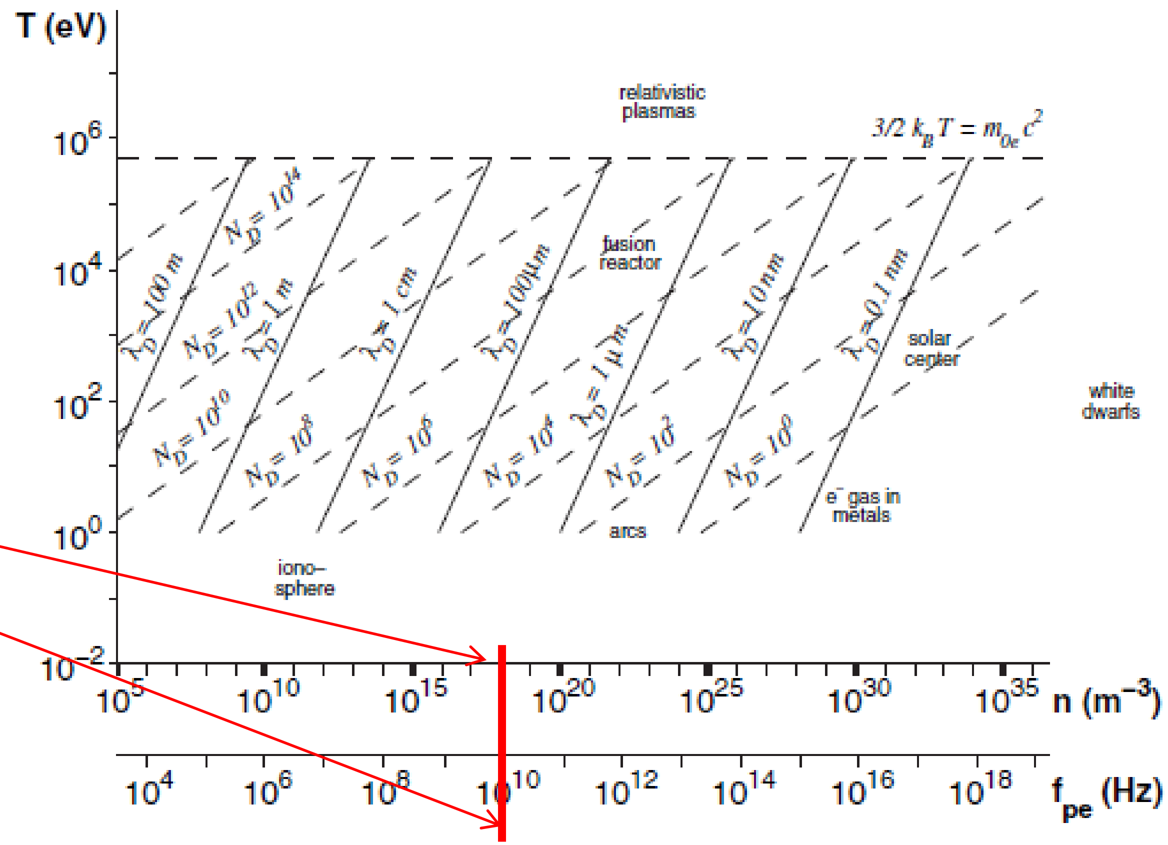
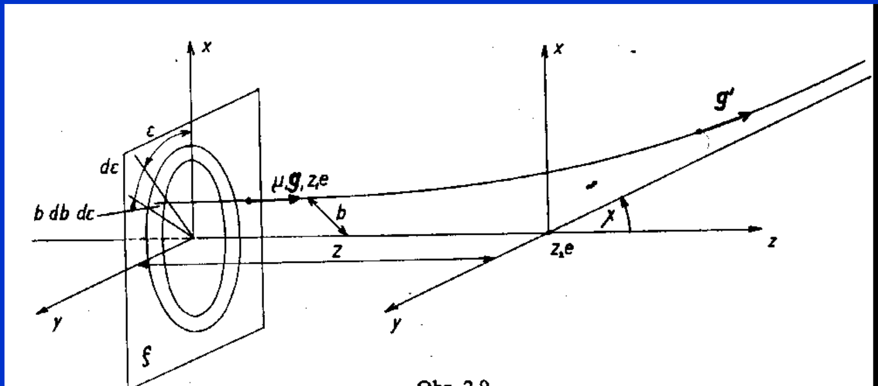


Fig. 1.4. Lines of constant Debye length λ_D and plasma parameter N_D, respectively, in the diagram of typical plasmas

$\gamma = ne^6/(kT)^3 <<< 1$

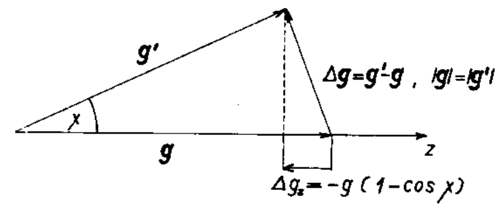
Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus



$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{(i)} \boldsymbol{p}_{1i} = -\frac{\boldsymbol{g}}{g}\,\mu\sum_{(i)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,g_z\,,$$

kde suma přes i značí sečítání přes všechny částice svazku. Výraz $\sum_{(i)}(\mathrm{d}g_z/\mathrm{d}t)$ je možno celkem snadno určit: fyzikálně totiž znamená změnu relativní rychlosti svazku částic za jednotku času, nebo — což je totéž — změnu relativní rychlosti jedné částice svazku vlivem srážky, vynásobenou počtem srážek za jednotku času (předpokládáme, že interakci svazku můžeme rozdělit na jednotlivé binární srážky).



Obr. 2.10.

Změnu relativní rychlosti jedné částice svazku Δg_z určíme snadno z obr. 2.10. Snadno zjistíme, že

(2.136) $$\Delta g_z = -g(1-\cos\chi) = -2g\sin^2\frac{\chi}{2}\,.$$

Počet srážek za jednotku času závisí zřejmě na průřezu svazku; za jednotku času „dosáhnou" silového centra pouze ty částice, jejichž vzdálenost $Z \leqq g$. 1 sec. Počet částic, které projdou elementární plochou $b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon$ za jednotku času a „dosáhnou" silového centra, pak zřejmě bude

(2.137) $$g n_1 b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,,$$

kde n_1 je koncentrace částic svazku. Vynásobíme-li nyní (2.136) výrazem (2.137) a zintegrujeme-li výsledek přes celou rovinu ξ, dostaneme, že

(2.138) $$\sum_{(i)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,g_z = \int_0^\infty \mathrm{d}b\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varepsilon\left(-2g\sin^2\frac{\chi}{2}\,g n_1 b\right)$$

a odtud

(2.139) $$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{g}}{g}\,2g^2 n_1\mu\,2\pi\int_0^\infty b\sin^2\frac{\chi}{2}\,\mathrm{d}b\,.$$

Uvážíme-li nyní, že podle (2.106) $\operatorname{tg}\chi/2 = b_0/b$, můžeme dále psát, že

(2.140) $$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{g}}{g}\,\mu\,4\pi n_1 g^2 b_0^2\int_0^\infty\frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2+b^2}\,.}$$

Integrál

(2.141) $$\boxed{L = \int_0^\infty\frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2+b^2}}$$

Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu
„Velký Kracík"
J.Kracík, B. Šesták a L. Aubrecht
Academia Praha 1974

Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus

$$\boxed{F = \frac{\mathbf{g}}{g}\,\mu\, 4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}\,.}$$

$$\boxed{L = \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}}$$

ln(E.kinetická/E.potenciální)
Ve vzdalenosti l_d

Už jsme ukázali, že platí….

$$b_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \qquad l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2}$$

$$b_0/l_d = \frac{\frac{1}{9}\left(3/2\, kT\right)}{\mathrm{N}\, 1/2\, \mu g^2} <<< 1$$

logaritmicky diverguje pro velké hodnoty parametru b. Abychom dostali pro $\mathbf{F}$ konečné hodnoty, musíme v L nějakým způsobem omezit horní integrační mez.

V předchozím odstavci jsme si ukázali, že efektivní interakční potenciál částic je řádově dosahu l_d; binární coulombovské srážky je pak možno uvažovat pouze pro srážkový parametr $b \lesssim l_d$. Za horní integrační mez L je tedy možno zvolit l_d. Dostaneme

(2.142) $$\boxed{L = \int_0^{l_d} \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2} = \ln \sqrt{\left(\frac{b_0^2 + l_d^2}{b_0^2}\right)}\,.}$$

Jestliže dále platí, že $l_d \gg |b_0|$, můžeme (2.142) přepsat do tvaru

(2.143) $$\boxed{L = \ln\left(\frac{l_d}{|b_0|}\right) = \ln \frac{l_d}{\dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}}\,,}$$

kde jsme za b_0 dosadili (2.97) a síla $\mathbf{F}$, určená rovnicí (2.140), má nyní tvar

(2.144) $$\boxed{\mathbf{F} = L \frac{\mathbf{g}}{g^3} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{4\pi\varepsilon_0} \frac{n_1}{\mu}\,.}$$

Veličina L určená rovnicí (2.143) se nazývá coulombovský logaritmus.

Předpokládali jsme, že platí

(2.145) $$l_d \gg b_0\,.$$

Tato podmínka však plyne přímo z předpokladů (2.120), které mají platit pro libovolné r. Položme tedy $r = l_d$ a předpokládejme pro jednoduchost, že $Z_1 = Z_2 = 1$. Sečtením nerovností (2.120) ($\varphi(r)$ bereme v prvním přiblížení jako coulombovský) dostaneme

(2.146) $$\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{l_d} \ll k(T_1 + T_2)\,,$$

což je možno přepsat jako

(2.147) $$l_d \gg \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 k(T_1 + T_2)}\,.$$

Protože ale $3k(T_1 + T_2) \sim \mu g^2$, je možno (2.147) dále přepsat na

(2.148) $$l_d \gg \frac{6e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \sim b_0\,.$$

Odtud již vidíme, že nerovnost (2.145) je již splněna, platí-li (2.120), nebo jinými slovy, předpokládáme (stejně jako v 1. kapitole), že interakční energie částic je mnohem menší ve srovnání s jejich tepelnou energií. K tomuto výsledku je možno dojít ještě trochu jiným způsobem. Aby „ořezání" integrálu L(2.141) mělo fyzikální smysl,

Další kroky

(2.140) $$F = \frac{\boldsymbol{g}}{g}\,\mu\, 4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}\,.$$

Integrál

(2.141) $$L = \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}$$

(2.151) $$|\boldsymbol{F}| = \mathrm{konst}\; L,$$

kde L je dáno rovnicí (2.142), resp. (2.143). Sledujme dále, jak závisí $|\boldsymbol{F}|$ na úhlu rozptylu částic. Na základě (2.106) můžeme tvrdit, že pro $b \gg b_0$ je

(2.152) $$\boxed{\chi = \frac{2b_0}{b} \ll 1}$$

a tedy rozptyl na malé úhly odpovídá dalekým průletům. Hranici mezi dalekými a blízkými průlety stanovme pro $b = 2b_0$. Rovnici (2.151) můžeme nyní psát ve tvaru

(2.153) $$\boxed{|\boldsymbol{F}| = \mathrm{konst} \int_0^{l_d} \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2} = \mathrm{konst}\,(L_{\mathrm{b.p.}} + L_{\mathrm{d.p.}})\,,}$$

kde

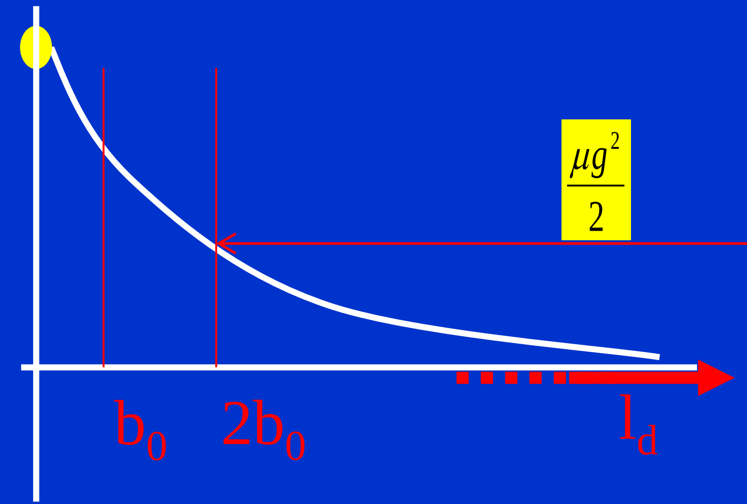
(2.154) $$\boxed{L_{\mathrm{b.p.}} = \int_0^{2b_0} \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2} = \ln 3 \sim 1}$$

je coulombovský logaritmus odpovídající blízkým průletům a

(2.155) $$L_{\mathrm{d.p.}} = \int_{2b_0}^{l_d} \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2} = \ln\frac{l_d}{b_0} - \ln 3 \sim \ln\frac{l_d}{b_0} = L \gg 1$$

je coulombovský logaritmus odpovídající dalekým průletům. Z (2.153) je zřejmé, že střední sílu, která působí na částici 2 ze strany svazku částic 1, můžeme rozdělit na dvě části a to na sílu $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b.p.}}$, odpovídající blízkým průletům, a $\boldsymbol{F}_{\mathrm{d.p.}}$, odpovídající dalekým průletům; pro $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b.p.}}$ a $\boldsymbol{F}_{\mathrm{d.p.}}$ platí

(2.156) $$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{b.p.}}| \sim L_{\mathrm{b.p.}}\,.$$



$$b_0/l_d = \frac{\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}kT\right)}{N\,\frac{1}{2}\mu g^2} \lll 1$$

$$F_{dp}/F_{bp} \sim L \gg 1$$

Závislost na teplotě

V závěru tohoto odstavce uvedeme ještě několik poznámek, týkajících se coulombovského logaritmu L. Z (2.143) vidíme, že L závisí logaritmicky na μg^2. V důsledku této logaritmické závislosti je možno v mnoha případech nahradit μg^2 střední hodnotou této veličiny nebo tepelnou rychlostí částic, tj. můžeme položit $\mu g^2 \sim \frac{3}{2}k(T_1 + T_2)$. Abychom si utvořili představu, jak závisí L na teplotě a koncentraci, předpokládejme pro jednoduchost, že $T_1 = T_2 = T$. Coulombovský logaritmus má pak jednoduchý tvar

$$L = \ln\left[\frac{12\pi}{n^{1/2}}\left(\frac{\varepsilon_0 kT}{e^2}\right)^{3/2}\right]. \tag{2.159}$$

kl - klasický
kv - kvantový

V jednoduchém případě, kdy $\mu g^2 \sim \frac{3}{2}k(T_1 + T_2)$, $T_1 = T_2 = T$ a $|Z_1| = |Z_2| = 1$, je možno (2.161) přepsat na tvar

$$L_{kv} = L_{kl} + \ln\left(\frac{4{,}2\,.\,10^5}{T}\right)^{1/2}, \tag{2.162}$$

kde L_{kl} je dáno vztahem (2.159). Hodnoty coulombovského logaritmu vypočtené z (2.159) a (2.161) jsou uvedeny v tab. 1; nejsou zde uvedeny hodnoty coulombovského logaritmu pro vysoké koncentrace a nízké teploty, protože v těchto případech je námi uvedená teorie neplatná.

Tabulka 1. Hodnoty coulombovského logaritmu L.

Koncentrace elektronů [m^{-3}]	Teplota K									
	50	100	5.10^2	10^3	5.10^3	10^4	5.10^4	10^5	5.10^5	10^6
10^{10}	10,69	11,73	14,14	15,18	17,60	18,63	21,05	22,09	24,42	25,11
10^{11}	9,54	10,58	12,99	14,03	16,44	17,48	19,88	20,94	23,26	23,96
10^{12}	8,39	9,42	11,84	12,88	15,29	16,33	18,75	19,79	22,11	22,81
10^{13}	7,23	8,27	10,69	11,73	14,14	15,18	17,60	18,63	20,96	21,65
10^{14}	6,08	7,12	9,54	10,58	12,99	14,03	16,44	17,48	19,81	20,50
10^{15}	4,93	5,97	8,39	9,42	11,84	12,88	15,29	16,33	18,66	19,36
10^{16}	—	4,82	7,23	8,27	10,69	11,73	14,14	15,18	17,51	18,20
10^{17}	—	—	6,08	7,12	9,54	10,58	19,99	14,03	16,36	17,05
10^{18}	—	—	4,93	5,97	8,39	9,42	11,84	12,88	15,21	15,90
10^{19}	—	—	—	4,82	7,23	8,27	10,69	11,73	14,06	14,75
10^{20}	—	—	—	—	6,08	7,12	9,54	10,58	12,90	13,60
10^{21}	—	—	—	—	4,93	9,57	8,39	9,42	11,75	12,45
10^{22}	—	—	—	—	—	4,92	7,23	8,27	10,60	11,30
10^{23}	—	—	—	—	—	—	6,08	7,12	9,45	10,14
10^{24}	—	—	—	—	—	—	4,93	5,97	8,30	8,99

Literatura ke kap. 2.

JANCEL R., KAHAN TH.: Electrodynamics of plasmas. J. Wiley & Sons, London (1966).
DELCROIX J. L.: Plasma physics. J. Wiley & Sons, London (1965).
LANDAU L. D., LIFŠIC E. M.: Kvantovaja mechanika. Moskva (1963).
SIVUCHIN D. V.: Voprosy těorii plazmy *4.*, red. M. A. Leontovič, Moskva (1964).
TRUBNIKOV B. A.: Voprosy těorii plazmy *1.*, red. M. A. Leontovič, Moskva (1963).
SPITZER L.: Physics of fully ionized gases. Interscience, New York (1956) (ruský překlad Spitzer L.: Fizika polnosťju ionizovannogo gaza. Moskva (1965)).

TU SOM SKONCIL xx. 10. 202X

Další kroky

Další kroky

Další kroky

Další kroky

Další kroky

Rozdělovací funkce

$$f(\vec{r},\vec{v},t)$$

Počet částic v **r**,**v**,t v objeme dr**dv**

$$f d\vec{r} d\vec{v}$$

kde integrací se míní integrace přes celý rychlostní prostor a přes objem, ve kterém je daný systém uzavřen. Potom střední hodnota funkce $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ je dána výrazem

$$\bar{g} = \frac{1}{N} \iint g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \, d\mathbf{r} \, d\mathbf{v} . \tag{3.2}$$

Podobně pro lokální střední hodnotu (střední hodnotu, která se může obecně měnit v prostoru od bodu k bodu) funkce $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ dostáváme

$$\overline{g(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{n} \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \, d\mathbf{v} , \tag{3.3}$$

kde

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \, d\mathbf{v} \tag{3.4}$$

je koncentrace částic v místě $\mathbf{r}$; $n(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{r}$ je potom počet částic v objemu $d\mathbf{r}$ kolem bodu $\mathbf{r}$.*)

Pomocí definice (3.3) můžeme nyní zavést některé důležité veličiny, které budou pro nás v dalším textu nepostradatelné.

Tak například střední rychlost částic v bodě $(\mathbf{r}, t)$ $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$ bude podle (3.3) dána vztahem

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \, d\mathbf{v} . \tag{3.5}$$

Velmi často bývá výhodné vztahovat rychlost částic ke střední rychlosti $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$; zavedeme tedy pojem relativní rychlosti $\mathbf{V}$ vzhledem ke střední rychlosti $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$ vztahem

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) . \tag{3.6}$$

Potom s ohledem na definici $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$ (3.5) je zřejmé, že

$$\overline{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = 0 . \tag{3.7}$$

V systému, který není v rovnovážném stavu, existuje jistý počet gradientů, jako například koncentrace, relativní rychlosti, teploty atd., které způsobují přenos hmotnosti, impulsu, teploty a dalších veličin, jež charakterizují vlastnosti částic daného systému. Označíme-li tyto veličiny jako $\psi(\mathbf{v})$, pak tok veličiny ψ jednotkovou plochou, která se pohybuje rychlostí $\mathbf{v}_0$ **) za jednotku času bude zřejmě roven

$$\Psi = \bar{\Psi} = \int \psi(\mathbf{V}) \, \mathbf{V} f \, d\mathbf{V} . \tag{3.8}$$

---

*) Pro jednoduchost zápisu budeme místo „v $d\mathbf{r}$ kolem bodu $\mathbf{r}$“ říkat „v bodě $\mathbf{r}$“.

**) V dalším textu budeme vždy uvažovat tok plochou, která je v klidu vzhledem ke střední rychlosti částic systému.

Odvození Boltzmannový rovnice

3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému N částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce f_i jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování f_i, za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvillův teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1)$ a částice 2 v bodě $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2)$ jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla $\boldsymbol{F}_i$, působící na i-tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element μ prostoru se středem v bodě $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}_i$ o velikosti $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$; v čase t obsahuje tento $f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$ částic i-tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase $t + dt$ vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemovém elementu $d\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\, dt$ a v rychlostním elementu $d\boldsymbol{v}_i$ kolem bodu $\boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\, dt$ (předpokládáme, že síla $\boldsymbol{F}_i$ se téměř nezmění uvnitř $d\boldsymbol{r}$ za dt). Podle Liouvillova teorému tedy platí

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\, dt, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m)\, dt, t + dt)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i = f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\,.$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

$$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt \tag{3.32}$$

jako změnu počtu částic i-tého druhu v $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$ způsobenou srážkami za čas dt, musí zřejmě platit

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\, dt, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\, dt, t + dt)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i - f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt\,. \tag{3.33}$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}}\,. \tag{3.34}$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen $(\delta_e f_i/\delta t)$, kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic i-tého druhu, které se dostanou do objemového elementu $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$ vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas dt (označí-

BBGKY rovnice aplikace na s=1, s=2

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N - s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}]\, d\boldsymbol{r}_{s+1}\, d\boldsymbol{p}_{s+1}\,, \tag{1.52}$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s = 1$ a $s = 2$. Pro $s = 1$ dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial t} &= \nabla_{r_1} H_1 \cdot \nabla_{p_1} F_1 - \nabla_{p_1} H_1 \cdot \nabla_{r_1} F_1 + \\ &+ \frac{N-1}{V} \int (\nabla_{r_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{p_1} F_2 - \nabla_{p_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{r_1} F_2)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2\end{aligned} \tag{1.54}$$

a pro $s = 2$ dostaneme

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V} \int \sum_{i=1}^{2} [\Phi_{i3}; F_3]\, d\boldsymbol{r}_3\, d\boldsymbol{p}_3\,. \tag{1.55}$$

Další kroky

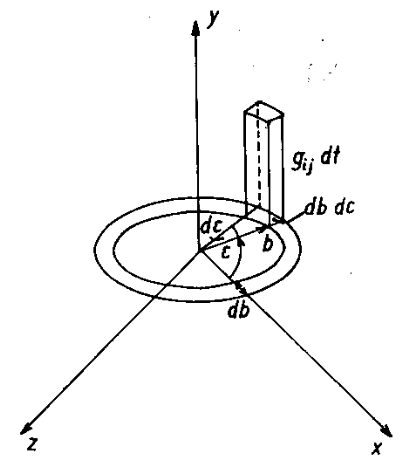
me $\sum_j A_{ij}^+ \,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$), minus počet částic i-tého druhu, které tento objemový element opustí vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval $\mathrm{d}t$ (označíme $\sum_j A_{ij}^- \,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$). Symbolicky tedy můžeme psát

$$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \sum_j (A_{ij}^+ - A_{ij}^-)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t\,, \tag{3.35}$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu $A_{ij}^-\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$. Nechť částice i-tého druhu je umístěna v bodě $\boldsymbol{r}$ a nechť se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu $\mathrm{d}t$ srazí s částicí j-tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic $\boldsymbol{g}_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$, srážkovým parametrem b a úhlem ε mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice i-tého druhu za čas $\mathrm{d}t$ s částicemi j-tého druhu, jejichž relativní rychlost je $\boldsymbol{g}_{ij}$, srážkový parametr je v mezích b, $b + \mathrm{d}b$ a úhel v mezích ε, $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$ potom bude roven počtu částic j-tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu

$$g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}t$$



Obr. 3.1.

(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici $f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)$ je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}t\,.$$

Celkový počet srážek částice i-tého druhu se všemi částicemi druhu j-tého za čas $\mathrm{d}t$ potom zřejmě bude

$$\mathrm{d}t \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,, \tag{3.36}$$

Plasma frequency

1.3.4 Plasma Frequency

Microscopic deviations from quasi-neutrality in a plasma result in plasma (or Langmuir) oscillations. They represent the most simple form of oscillations in a plasma, and they are an obvious example for the collective behavior of the plasmas (see Chap. 2 in Part I on waves in plasmas). The equation of motion

$$m_e \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -eE = -\frac{n_e e^2 x}{\varepsilon_0} \tag{1.15}$$

of a plane plasma sheath in linear approximation relates the space charge electric field E to the separation x of the electrons from the ions and hence describes non-damped Langmuir oscillations with their electron plasma frequency

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}\right)^{1/2} . \tag{1.16}$$

The total plasma frequency is given by

$$\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \tag{1.17}$$

with the ion plasma frequency

$$\omega_{pi} = \left(\frac{n_i Z^2 e^2}{\varepsilon_0 m_i}\right)^{1/2} , \tag{1.18}$$

which can be approximated by the electron plasma frequency because of the large mass ratio of ions to electrons. Due to the mere square root dependence on the electron density n_e the plasma frequency ω_p can replace the electron density as abscissa in all the plasma diagrams, i.e. $f_{pe}(\mathrm{s}^{-1}) = \omega_{pe}/2\pi = 8.98\ (n_e)^{1/2}$.

Plasma properties

With these expressions some important plasma properties can be given:

- A plasma is quasi-neutral: $n = n_e = n_i$ (for ion charge $Z = 1$); generally $n_e = \sum_j Z_j n_{i,j}$.
- The product of Debye length λ_{D_e} (λ_{D_i}) and ω_{pe} (ω_{pi}) approximately equals the electron (ion) thermal speed $v_{th,e} \approx \sqrt{3}\lambda_{D_e}\omega_{pe}$ or $v_{th,i} \approx \sqrt{3}\lambda_{D_i}\omega_{pi}$, respectively.
- Ideal plasmas are characterized by the following relations:

$$\lambda_D \ll L \tag{1.19}$$

$$N_D \gg 1 \quad \text{or} \quad \lambda_L \ll \lambda_D \quad \text{or} \quad \Gamma_c \ll 1 \tag{1.20}$$

$$\omega_p \tau > 1 \, , \tag{1.21}$$

  where L is the plasma dimension, and τ stands for the collision time of the charged plasma particles with neutrals.

The first condition reflects the plasma being a many-particle ensemble, the particle charges of which are shielded outside their Debye sphere. The last condition expresses the Coulomb interaction as the dominant interaction mechanism in a plasma, as compared to collisions with neutral particles.

In plasmas and electrolytes, the **Debye length** (also called **Debye radius**), named after Peter Debye, is a measure of a charge carrier's net electrostatic effect in a solution and how far its electrostatic effect persists.[1] A **Debye sphere** is a volume whose radius is the Debye length. With each Debye length, charges are increasingly electrically screened. Every Debye-length λ_D, the electric potential will decrease in magnitude by 1/e. Debye length is an important parameter in plasma physics, electrolytes, and colloids (DLVO theory). The corresponding Debye screening wave vector $k_D = 1/\lambda_D$ for particles of density n, charge q at a temperature T is given by $k_D^2 = 4\pi n q^2/(k_B T)$ in Gaussian units. Expressions in MKS units will be given below. The analogous quantities at very low temperatures ($T \to 0$) are known as the Thomas–Fermi length and the Thomas–Fermi wave vector. They are of interest in describing the behaviour of electrons in metals at room temperature.

The Debye length arises naturally in the thermodynamic description of large systems of mobile charges. In a system of N different species of charges, the j-th species carries charge q_j and has concentration $n_j(\mathbf{r})$ at position $\mathbf{r}$. According to the so-called "primitive model", these charges are distributed in a continuous medium that is characterized only by its relative static permittivity, ε_r. This distribution of charges within this medium gives rise to an electric potential $\Phi(\mathbf{r})$ that satisfies Poisson's equation:

$$\varepsilon \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\sum_{j=1}^{N} q_j\, n_j(\mathbf{r}) - \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}),$$

where $\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0$, ε_0 is the electric constant, and ρ_{ext} is a charge density external (logically, not spatially) to the medium.

The mobile charges not only contribute in establishing $\Phi(\mathbf{r})$ but also move in response to the associated Coulomb force, $-q_j\, \nabla \Phi(\mathbf{r})$. If we further assume the system to be in thermodynamic equilibrium with a heat bath at absolute temperature T, then the concentrations of discrete charges, $n_j(\mathbf{r})$, may be considered to be thermodynamic (ensemble) averages and the associated electric potential to be a thermodynamic mean field. With these assumptions, the concentration of the j-th charge species is described by the Boltzmann distribution,

$$n_j(\mathbf{r}) = n_j^0\, \exp\left(-\frac{q_j\, \Phi(\mathbf{r})}{k_B T}\right),$$

where k_B is Boltzmann's constant and where n_j^0 is the mean concentration of charges of species j.

Identifying the instantaneous concentrations and potential in the Poisson equation with their mean-field counterparts in Boltzmann's distribution yields the Poisson–Boltzmann equation:

$$\varepsilon \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\sum_{j=1}^{N} q_j n_j^0\, \exp\left(-\frac{q_j\, \Phi(\mathbf{r})}{k_B T}\right) - \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}).$$

Solutions to this nonlinear equation are known for some simple systems. Solutions for more general systems may be obtained in the high-temperature (weak coupling) limit, $q_j\, \Phi(\mathbf{r}) \ll k_B T$, by Taylor expanding the exponential:

$$\exp\left(-\frac{q_j\, \Phi(\mathbf{r})}{k_B T}\right) \approx 1 - \frac{q_j\, \Phi(\mathbf{r})}{k_B T}.$$

This approximation yields the linearized Poisson-Boltzmann equation

$$\varepsilon \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{n_j^0\, q_j^2}{k_B T}\right) \Phi(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{N} n_j^0 q_j - \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

which also is known as the Debye–Hückel equation:[2][3][4][5][6] The second term on the right-hand side vanishes for systems that are electrically neutral. The term in parentheses divided by ε, has the units of an inverse length square and by dimensional analysis leads to the definition of the characteristic length scale

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon\, k_B T}{\sum_{j=1}^{N} n_j^0\, q_j^2}\right)^{1/2}$$

that commonly is referred to as the Debye–Hückel length. As the only characteristic length scale in the Debye–Hückel equation, λ_D sets the scale for variations in the potential and in the concentrations of charged species. All charge species contribute to the Debye–Hückel length in the same way, regardless of the sign of their charges. For an electrically neutral system, the Poisson equation becomes

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \lambda_D^{-2} \Phi(\mathbf{r}) - \frac{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{\varepsilon}$$

To illustrate Debye screening, the potential produced by an external point charge $\rho_{\text{ext}} = Q\delta(\mathbf{r})$ is

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} e^{-r/\lambda_D}$$

The bare Coulomb potential is exponentially screened by the medium, over a distance of the Debye length.

https://en.wikipedia.org/wiki/Debye_length

In a plasma [edit]

In a non-isothermic plasma, the temperatures for electrons and heavy species may differ while the background medium may be treated as the vacuum ($\varepsilon_r = 1$), and the Debye length is

$$\lambda_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_{\mathrm{B}} / q_e^2}{n_e/T_e + \sum_j z_j^2 n_j / T_i}}$$

where

- λ_D is the Debye length,
- ε_0 is the permittivity of free space,
- k_B is the Boltzmann constant,
- q_e is the charge of an electron,
- T_e and T_i are the temperatures of the electrons and ions, respectively,
- n_e is the density of electrons,
- n_j is the density of atomic species j, with positive ionic charge $z_j q_e$

Even in quasineutral cold plasma, where ion contribution virtually seems to be larger due to lower ion temperature, the ion term is actually often dropped, giving

$$\lambda_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_{\mathrm{B}} T_e}{n_e q_e^2}}$$

although this is only valid when the mobility of ions is negligible compared to the process's timescale.[7]

In space plasmas where the electron density is relatively low, the Debye length may reach macroscopic values, such as in the magnetosphere, solar wind, interstellar medium and intergalactic medium. See table:

Plasma	Density $n_e(\mathrm{m}^{-3})$	Electron temperature $T(\mathrm{K})$	Magnetic field $B(\mathrm{T})$	Debye length $\lambda_D(\mathrm{m})$
Solar core	10^{32}	10^7	—	10^{-11}
Tokamak	10^{20}	10^8	10	10^{-4}
Gas discharge	10^{16}	10^4	—	10^{-4}
Ionosphere	10^{12}	10^3	10^{-5}	10^{-3}
Magnetosphere	10^7	10^7	10^{-8}	10^2
Solar wind	10^6	10^5	10^{-9}	10
Interstellar medium	10^5	10^4	10^{-10}	10
Intergalactic medium	1	10^6	—	10^5

Další kroky

APPROXIMATE MAGNITUDES IN SOME TYPICAL PLASMAS

Plasma Type	n cm^{-3}	T eV	ω_{pe} sec^{-1}	λ_D cm	$n\lambda_D{}^3$	ν_{ei} sec^{-1}
Interstellar gas	1	1	6×10^4	7×10^2	4×10^8	7×10^{-5}
Gaseous nebula	10^3	1	2×10^6	20	8×10^6	6×10^{-2}
Solar Corona	10^9	10^2	2×10^9	2×10^{-1}	8×10^6	60
Diffuse hot plasma	10^{12}	10^2	6×10^{10}	7×10^{-3}	4×10^5	40
Solar atmosphere, gas discharge	10^{14}	1	6×10^{11}	7×10^{-5}	40	2×10^9
Warm plasma	10^{14}	10	6×10^{11}	2×10^{-4}	8×10^2	10^7
Hot plasma	10^{14}	10^2	6×10^{11}	7×10^{-4}	4×10^4	4×10^6
Thermonuclear plasma	10^{15}	10^4	2×10^{12}	2×10^{-3}	8×10^6	5×10^4
Theta pinch	10^{16}	10^2	6×10^{12}	7×10^{-5}	4×10^3	3×10^8
Dense hot plasma	10^{18}	10^2	6×10^{13}	7×10^{-6}	4×10^2	2×10^{10}
Laser Plasma	10^{20}	10^2	6×10^{14}	7×10^{-7}	40	2×10^{12}

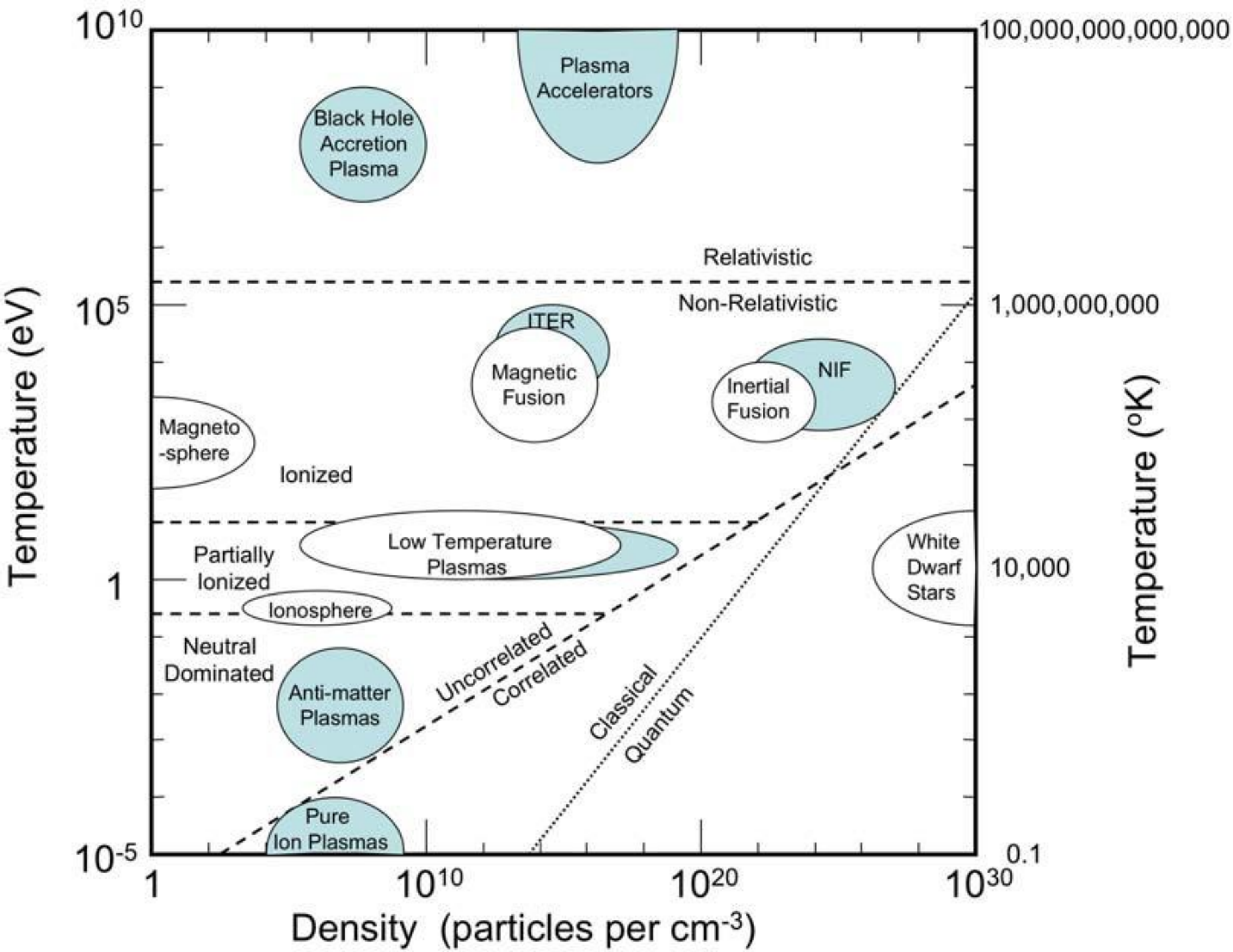
$$l_d = 69\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \text{ in } K, n \text{ in } m^{-3}$$

$$\boxed{f_p = 9\sqrt{n(10^{12}\,\mathrm{cm}^{-3})}\ \mathrm{GHz}}$$

From NRL Plasma Formulary (very useful)

Wide range of possible plasma parameters.

Plasmas above the line marked "Uncorrelated-Correlated" correspond to $\Lambda >> 1$

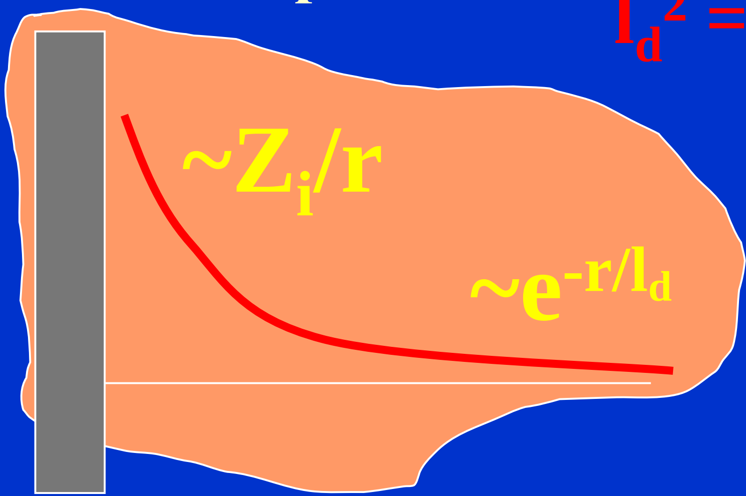


Plasma Science: Advancing Knowledge in the National Interest (2007), National Research Council, http://books.nap.edu/openbook.php?record_id=11960&page=9

Stíněni v plazmě

$$l_d^2 = \varepsilon_0 kT/ne^2$$

- Stínění v plazmě
- Ustanovení debyovského stínění



$v^2 \sim kT/m_e$

$$l_d^2 = kT/m_e * 1/\omega_{0e}^2 = v^2/\omega_{0e}^2$$

$$\boxed{\phi(r) = (Z_i e/4\pi\varepsilon_0)/r\ {}_*e^{-r/ld}}$$

$\sigma_c(v) = 2\pi\int b\, db$

Problém srážek na velkou vzdálenost

Tvar l_d (2.124) se značně zjednoduší, budeme-li předpokládat, že $Z_1^2 = Z_2^2 = 1$, $T_1 = T_2 = T$ a

(2.130) $$n_{10} + n_{20} = n\,, \qquad n_{10} \sim n_{20} \sim \tfrac{1}{2}n\,,$$

kde n je celkový počet částic v jednotce objemu. Potom, jak plyne z (2.124), je

(2.131) $$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2}\,.$$

Uvážíme-li nyní, že Langmuirova frekvence (plazmová frekvence) ω_0 je dána výrazem

(2.132) $$\omega_0^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \sim \boxed{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e} = \omega_{0e}^2}\,,$$

kde m_e je hmotnost elektronů a ω_{0e} je plazmová frekvence elektronů, můžeme také psát, že

(2.133) $$\boxed{l_d^2 = \frac{kT}{m_e}\,\frac{1}{\omega_{0e}^2}}\,.$$

Fyzikální význam této rovnice je celkem jasný. Rovnice (2.133) totiž říká, že l_d je taková délka, o kterou se přemístí částice (elektron) za periodu plazmových kmitů. Potom doba τ_{st}, za kterou se ustanoví debyeovské stínění, je řádově

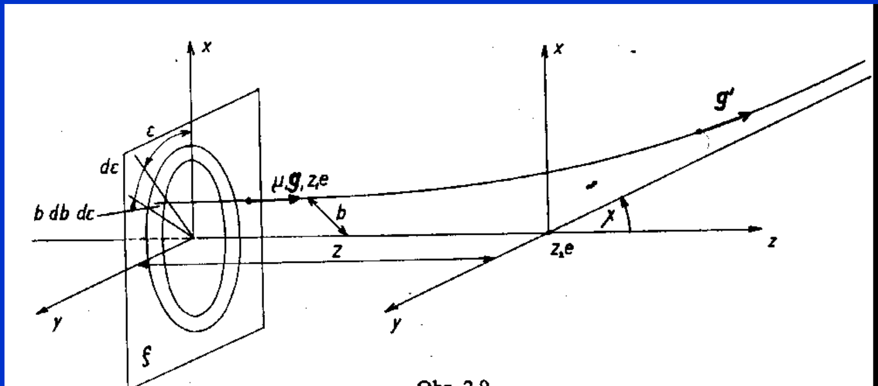
(2.134) $$\tau_{st} \sim \frac{1}{\omega_0} \sim \frac{l_d}{\sqrt{kT/m_e}}\,.$$

Na závěr tohoto odstavce je nutno poznamenat, že některé naše úvahy nejsou přesně vzato korektní. Týká se to především předpokladu, že rozložení částic kolem každého silového centra plazmatu je dáno sféricky symetrickým rozdělením Maxwella-Boltzmanna. Podrobnější analýza daného problému ukazuje*), že chyby, kterých se tímto jednoduchým popisem dopouštíme, jsou poměrně malé a navíc i tento jednoduchý popis vede k relativně dobrým výsledkům v další teorii plazmatu.

*) Viz např. D. V. Sivuchin: Voprosy těorii plazmy 4, red. M. A. Leontovič, Moskva (1964).

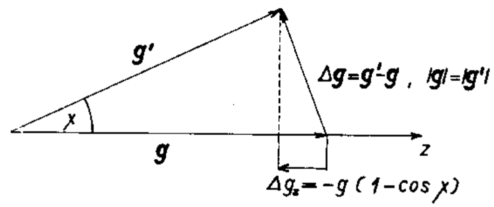
Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus



$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{(i)} \boldsymbol{p}_{1i} = -\frac{\boldsymbol{g}}{g}\,\mu \sum_{(i)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, g_z\,,$$

kde suma přes i značí sečítání přes všechny částice svazku. Výraz $\sum_{(i)}(\mathrm{d}g_z/\mathrm{d}t)$ je možno celkem snadno určit: fyzikálně totiž znamená změnu relativní rychlosti svazku částic za jednotku času, nebo — což je totéž — změnu relativní rychlosti jedné částice svazku vlivem srážky, vynásobenou počtem srážek za jednotku času (předpokládáme, že interakci svazku můžeme rozdělit na jednotlivé binární srážky).



Obr. 2.10.

Změnu relativní rychlosti jedné částice svazku Δg_z určíme snadno z obr. 2.10. Snadno zjistíme, že

(2.136) $$\Delta g_z = -g(1 - \cos\chi) = -2g\sin^2\frac{\chi}{2}\,.$$

Počet srážek za jednotku času závisí zřejmě na průřezu svazku; za jednotku času „dosáhnou" silového centra pouze ty částice, jejichž vzdálenost $Z \leqq g\,.\,1$ sec. Počet částic, které projdou elementární plochou $b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon$ za jednotku času a „dosáhnou" silového centra, pak zřejmě bude

(2.137) $$g n_1 b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,,$$

kde n_1 je koncentrace částic svazku. Vynásobíme-li nyní (2.136) výrazem (2.137) a zintegrujeme-li výsledek přes celou rovinu ξ, dostaneme, že

(2.138) $$\sum_{(i)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,g_z = \int_0^\infty \mathrm{d}b\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varepsilon\left(-2g\sin^2\frac{\chi}{2}\,g n_1 b\right)$$

a odtud

(2.139) $$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{g}}{g}\,2g^2 n_1\mu\,2\pi\int_0^\infty b\sin^2\frac{\chi}{2}\,\mathrm{d}b\,.$$

Uvážíme-li nyní, že podle (2.106) $\mathrm{tg}\,\chi/2 = b_0/b$, můžeme dále psát, že

(2.140) $$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{g}}{g}\,\mu\,4\pi n_1 g^2 b_0^2\int_0^\infty\frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}\,.}$$

Integrál

(2.141) $$\boxed{L = \int_0^\infty\frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}}$$

Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus

$$\boxed{F = \frac{\mathbf{g}}{g}\,\mu\, 4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}\,.}$$

$$\boxed{L = \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}}$$

ln(E.kinetická/E.potenciální)
Ve vzdalenosti l_d

Už jsme ukázali, že platí….

$$b_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \qquad l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2}$$

$$b_0 \big/ l_d = \frac{\frac{1}{9}\left(3\!\big/\!_2\, kT\right)}{\mathrm{N}\,1\!\big/\!_2\,\mu g^2} <<< 1$$

logaritmicky diverguje pro velké hodnoty parametru b. Abychom dostali pro $\boldsymbol{F}$ konečné hodnoty, musíme v L nějakým způsobem omezit horní integrační mez.

V předchozím odstavci jsme si ukázali, že efektivní interakční potenciál částic je řádově dosahu l_d; binární coulombovské srážky je pak možno uvažovat pouze pro srážkový parametr $b \lesssim l_d$. Za horní integrační mez L je tedy možno zvolit l_d. Dostaneme

(2.142) $$\boxed{L = \int_0^{l_d} \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2} = \ln \sqrt{\left(\frac{b_0^2 + l_d^2}{b_0^2}\right)}\,.}$$

Jestliže dále platí, že $l_d \gg |b_0|$, můžeme (2.142) přepsat do tvaru

(2.143) $$\boxed{L = \ln\left(\frac{l_d}{|b_0|}\right) = \ln \frac{l_d}{\dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}}\,,}$$

kde jsme za b_0 dosadili (2.97) a síla $\boldsymbol{F}$, určená rovnicí (2.140), má nyní tvar

(2.144) $$\boxed{\boldsymbol{F} = L \frac{\mathbf{g}}{g^3} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{4\pi\varepsilon_0} \frac{n_1}{\mu}\,.}$$

Veličina L určená rovnicí (2.143) se nazývá coulombovský logaritmus.

Předpokládali jsme, že platí

(2.145) $$l_d \gg b_0\,.$$

Tato podmínka však plyne přímo z předpokladů (2.120), které mají platit pro libovolné r. Položme tedy $r = l_d$ a předpokládejme pro jednoduchost, že $Z_1 = Z_2 = 1$. Sečtením nerovností (2.120) ($\varphi(r)$ bereme v prvním přiblížení jako coulombovský) dostaneme

(2.146) $$\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{l_d} \ll k(T_1 + T_2)\,,$$

což je možno přepsat jako

(2.147) $$l_d \gg \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 k(T_1 + T_2)}\,.$$

Protože ale $3k(T_1 + T_2) \sim \mu g^2$, je možno (2.147) dále přepsat na

(2.148) $$l_d \gg \frac{6e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \sim b_0\,.$$

Odtud již vidíme, že nerovnost (2.145) je již splněna, platí-li (2.120), nebo jinými slovy, předpokládáme (stejně jako v 1. kapitole), že interakční energie částic je mnohem menší ve srovnání s jejich tepelnou energií. K tomuto výsledku je možno dojít ještě trochu jiným způsobem. Aby „ořezání“ integrálu L(2.141) mělo fyzikální smysl,

Další kroky

(2.140) $$F = \frac{\mathbf{g}}{g}\,\mu\,4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}\,.$$

Integrál

(2.141) $$L = \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}$$

(2.151) $$|F| = \text{konst}\, L\,,$$

kde L je dáno rovnicí (2.142), resp. (2.143). Sledujme dále, jak závisí $|F|$ na úhlu rozptylu částic. Na základě (2.106) můžeme tvrdit, že pro $b \gg b_0$ je

(2.152) $$\boxed{\chi = \frac{2b_0}{b} \ll 1}$$

a tedy rozptyl na malé úhly odpovídá dalekým průletům. Hranici mezi dalekými a blízkými průlety stanovme pro $b = 2b_0$. Rovnici (2.151) můžeme nyní psát ve tvaru

(2.153) $$\boxed{|F| = \text{konst} \int_0^{l_d} \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2} = \text{konst}\,(L_{\text{b.p.}} + L_{\text{d.p.}})\,,}$$

kde

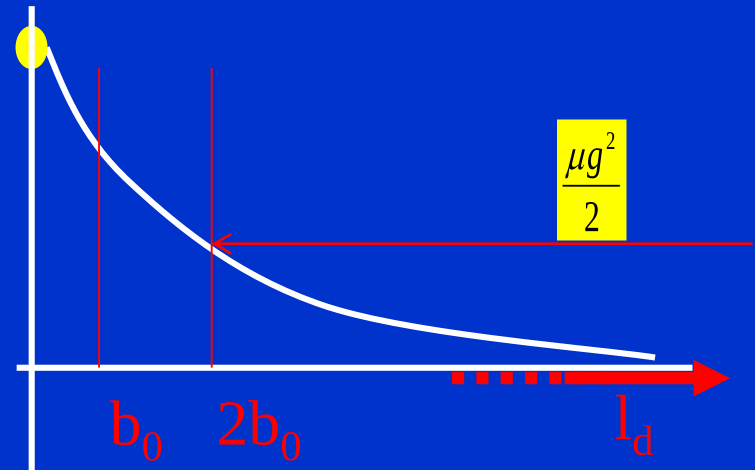
(2.154) $$\boxed{L_{\text{b.p.}} = \int_0^{2b_0} \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2} = \ln 3 \sim 1}$$

je coulombovský logaritmus odpovídající blízkým průletům a

(2.155) $$L_{\text{d.p.}} = \int_{2b_0}^{l_d} \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2} = \ln\frac{l_d}{b_0} - \ln 3 \sim \ln\frac{l_d}{b_0} = L \gg 1$$

je coulombovský logaritmus odpovídající dalekým průletům. Z (2.153) je zřejmé, že střední sílu, která působí na částici 2 ze strany svazku částic 1, můžeme rozdělit na dvě části a to na sílu $F_{\text{b.p.}}$, odpovídající blízkým průletům, a $F_{\text{d.p.}}$, odpovídající dalekým průletům; pro $F_{\text{b.p.}}$ a $F_{\text{d.p.}}$ platí

(2.156) $$|F_{\text{b.p.}}| \sim L_{\text{b.p.}}\,.$$



$$b_0 / l_d = \frac{\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}kT\right)}{N\,\frac{1}{2}\mu g^2} \lll 1$$

$$F_{dp} / F_{bp} \sim L \gg 1$$

Závislost na teplotě

V závěru tohoto odstavce uvedeme ještě několik poznámek, týkajících se coulombovského logaritmu L. Z (2.143) vidíme, že L závisí logaritmicky na μg^2. V důsledku této logaritmické závislosti je možno v mnoha případech nahradit μg^2 střední hodnotou této veličiny nebo tepelnou rychlostí částic, tj. můžeme položit $\mu g^2 \sim \frac{3}{2}k(T_1 + T_2)$. Abychom si utvořili představu, jak závisí L na teplotě a koncentraci, předpokládejme pro jednoduchost, že $T_1 = T_2 = T$. Coulombovský logaritmus má pak jednoduchý tvar

$$L = \ln\left[\frac{12\pi}{n^{1/2}}\left(\frac{\varepsilon_0 kT}{e^2}\right)^{3/2}\right]. \tag{2.159}$$

V jednoduchém případě, kdy $\mu g^2 \sim \frac{3}{2}k(T_1 + T_2)$, $T_1 = T_2 = T$ a $|Z_1| = |Z_2| = 1$, je možno (2.161) přepsat na tvar

$$L_{kv} = L_{kl} + \ln\left(\frac{4{,}2\,.\,10^5}{T}\right)^{1/2}, \tag{2.162}$$

kde L_{kl} je dáno vztahem (2.159). Hodnoty coulombovského logaritmu vypočtené z (2.159) a (2.161) jsou uvedeny v tab. 1; nejsou zde uvedeny hodnoty coulombovského logaritmu pro vysoké koncentrace a nízké teploty, protože v těchto případech je námi uvedená teorie neplatná.

Tabulka 1. Hodnoty coulombovského logaritmu L.

Koncentrace elektronů [m^{-3}]	Teplota K									
	50	100	5.10^2	10^3	5.10^3	10^4	5.10^4	10^5	5.10^5	10^6
10^{10}	10,69	11,73	14,14	15,18	17,60	18,63	21,05	22,09	24,42	25,11
10^{11}	9,54	10,58	12,99	14,03	16,44	17,48	19,88	20,94	23,26	23,96
10^{12}	8,39	9,42	11,84	12,88	15,29	16,33	18,75	19,79	22,11	22,81
10^{13}	7,23	8,27	10,69	11,73	14,14	15,18	17,60	18,63	20,96	21,65
10^{14}	6,08	7,12	9,54	10,58	12,99	14,03	16,44	17,48	19,81	20,50
10^{15}	4,93	5,97	8,39	9,42	11,84	12,88	15,29	16,33	18,66	19,36
10^{16}	—	4,82	7,23	8,27	10,69	11,73	14,14	15,18	17,51	18,20
10^{17}	—	—	6,08	7,12	9,54	10,58	19,99	14,03	16,36	17,05
10^{18}	—	—	4,93	5,97	8,39	9,42	11,84	12,88	15,21	15,90
10^{19}	—	—	—	4,82	7,23	8,27	10,69	11,73	14,06	14,75
10^{20}	—	—	—	—	6,08	7,12	9,54	10,58	12,90	13,60
10^{21}	—	—	—	—	4,93	9,57	8,39	9,42	11,75	12,45
10^{22}	—	—	—	—	—	4,92	7,23	8,27	10,60	11,30
10^{23}	—	—	—	—	—	—	6,08	7,12	9,45	10,14
10^{24}	—	—	—	—	—	—	4,93	5,97	8,30	8,99

Literatura ke kap. 2.

JANCEL R., KAHAN TH.: Electrodynamics of plasmas. J. Wiley & Sons, London (1966).
DELCROIX J. L.: Plasma physics. J. Wiley & Sons, London (1965).
LANDAU L. D., LIFŠIC E. M.: Kvantovaja mechanika. Moskva (1963).
SIVUCHIN D. V.: Voprosy těorii plazmy *4.*, red. M. A. Leontovič, Moskva (1964).
TRUBNIKOV B. A.: Voprosy těorii plazmy *1.*, red. M. A. Leontovič, Moskva (1963).
SPITZER L.: Physics of fully ionized gases. Interscience, New York (1956) (ruský překlad Spitzer L.: Fizika polnosťju ionizovannogo gaza. Moskva (1965)).

Rozdělovací funkce

$$f(\vec{r},\vec{v},t)$$

Počet částic v **r**,**v**,t v objeme dr**dv**

$$f d\vec{r} d\vec{v}$$

kde integrací se míní integrace přes celý rychlostní prostor a přes objem, ve kterém je daný systém uzavřen. Potom střední hodnota funkce $g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ je dána výrazem

$$\bar{g} = \frac{1}{N} \iint g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} \,. \tag{3.2}$$

Podobně pro lokální střední hodnotu (střední hodnotu, která se může obecně měnit v prostoru od bodu k bodu) funkce $g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ dostáváme

$$\overline{g(\boldsymbol{r}, t)} = \frac{1}{n} \int g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} \,, \tag{3.3}$$

kde

$$n(\boldsymbol{r}, t) = \int f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} \tag{3.4}$$

je koncentrace částic v místě $\boldsymbol{r}$; $n(\boldsymbol{r}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ je potom počet částic v objemu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r}$.*)

Pomocí definice (3.3) můžeme nyní zavést některé důležité veličiny, které budou pro nás v dalším textu nepostradatelné.

Tak například střední rychlost částic v bodě $(\boldsymbol{r}, t)$ $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$ bude podle (3.3) dána vztahem

$$\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{n} \int \boldsymbol{v} f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} \,. \tag{3.5}$$

Velmi často bývá výhodné vztahovat rychlost částic ke střední rychlosti $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$; zavedeme tedy pojem relativní rychlosti $\boldsymbol{V}$ vzhledem ke střední rychlosti $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$ vztahem

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) \,. \tag{3.6}$$

Potom s ohledem na definici $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$ (3.5) je zřejmé, že

$$\overline{\boldsymbol{V}} = \bar{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) = 0 \,. \tag{3.7}$$

V systému, který není v rovnovážném stavu, existuje jistý počet gradientů, jako například koncentrace, relativní rychlosti, teploty atd., které způsobují přenos hmotnosti, impulsu, teploty a dalších veličin, jež charakterizují vlastnosti částic daného systému. Označíme-li tyto veličiny jako $\psi(\boldsymbol{v})$, pak tok veličiny ψ jednotkovou plochou, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ **) za jednotku času bude zřejmě roven

$$\boldsymbol{\Psi} = \overline{\boldsymbol{\psi}} = \int \psi(\boldsymbol{V})\, \boldsymbol{V} f\, \mathrm{d}\boldsymbol{V} \,. \tag{3.8}$$

---

*) Pro jednoduchost zápisu budeme místo „v $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r}$" říkat „v bodě $\boldsymbol{r}$".

**) V dalším textu budeme vždy uvažovat tok plochou, která je v klidu vzhledem ke střední rychlosti částic systému.

Odvození Boltzmannový rovnice

3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému N částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce f_i jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování f_i, za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvillův teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1)$ a částice 2 v bodě $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2)$ jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla $\boldsymbol{F}_i$, působící na i-tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element μ prostoru se středem v bodě $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i$ o velikosti $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$; v čase t obsahuje tento $f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ částic i-tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase $t + \mathrm{d}t$ vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemovém elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$ a v rychlostním elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ kolem bodu $\boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\,\mathrm{d}t$ (předpokládáme, že síla $\boldsymbol{F}_i$ se téměř nezmění uvnitř $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ za $\mathrm{d}t$). Podle Liouvillova teorému tedy platí

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,.$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

$$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \tag{3.32}$$

jako změnu počtu částic i-tého druhu v $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ způsobenou srážkami za čas $\mathrm{d}t$, musí zřejmě platit

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.33}$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i\,.\,\nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\,.\,\nabla_{v_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}}\,. \tag{3.34}$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen $(\delta_e f_i/\delta t)$, kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic i-tého druhu, které se dostanou do objemového elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas $\mathrm{d}t$ (označí-

BBGKY rovnice aplikace na s=1, s=2

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N - s}{V}\sum_{i=1}^{s}\int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1}\,, \tag{1.52}$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s = 1$ a $s = 2$. Pro $s = 1$ dostaneme

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{r_1} H_1\,.\,\nabla_{p_1} F_1 - \nabla_{p_1} H_1\,.\,\nabla_{r_1} F_1 + \frac{N-1}{V}\int (\nabla_{r_1}\Phi_{12}\,.\,\nabla_{p_1} F_2 - \nabla_{p_1}\Phi_{12}\,.\,\nabla_{r_1} F_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2} \tag{1.54}$$

a pro $s = 2$ dostaneme

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V}\int \sum_{i=1}^{2} [\Phi_{i3}; F_3]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\,. \tag{1.55}$$

Další kroky

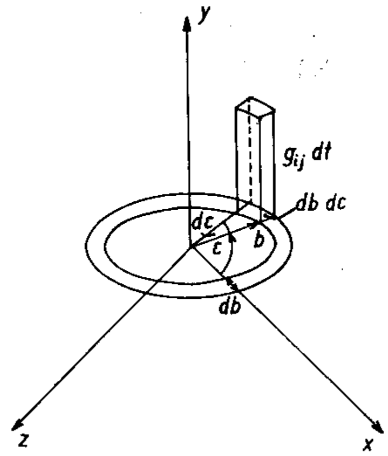
me $\sum_j A_{ij}^+ \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$), minus počet částic i-tého druhu, které tento objemový element opustí vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval dt (označíme $\sum_j A_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$). Symbolicky tedy můžeme psát

$$\frac{\delta_e f_i}{\delta t} \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt = \sum_j (A_{ij}^+ - A_{ij}^-) \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt \,, \tag{3.35}$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu $A_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$. Nechť částice i-tého druhu je umístěna v bodě $\boldsymbol{r}$ a nechť se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu dt srazí s částicí j-tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic $\boldsymbol{g}_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$, srážkovým parametrem b a úhlem ε mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice i-tého druhu za čas dt s částicemi j-tého druhu, jejichž relativní rychlost je $\boldsymbol{g}_{ij}$, srážkový parametr je v mezích b, $b + db$ a úhel v mezích ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ potom bude roven počtu částic j-tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu

$$g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$



Obr. 3.1.

(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici $f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)$ je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt \,.$$

Celkový počet srážek částice i-tého druhu se všemi částicemi druhu j-tého za čas dt potom zřejmě bude

$$dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \,, \tag{3.36}$$

Interstellar and Circumstellar Molecules

2-atom	3-atom	4-atom	5-atom	6-atom	7-atom	8-atom	9-atom	10-atom
H2	H3+	CH3	CH4	CH3OH	CH3NH2	HCOOCH3	(CH3)2O	(CH3)2CO
CO	CH2	NH3	CH2NH	CH3SH	CH3CCH	CH3C3N	C2H5OH	CH3C5N
CS	NH2	H3O+	H2CCC	C2H4	CH3CHO	HC6H	C2H5CN	CH3CH2CHO
CN	H2O	H2CO	c-C3H2	CH3CN	c-CH2OCH2	C7H	CH3C4H	(CH2OH)2
C2	H2S	H2CS	CH2CN	CH3NC	CH2CHCN	HOCH2CHO	C8H	11-atom
CH	CCH	c-C3H	NH2CN	HC2CHO	HC5N	CH3COOH	HC7N	HC9N
CH+	HCN	l-C3H	CH2CO	NH2CHO	C6H	H2CCCHCN	CH3CONH2	CH3C6H
HF	HNC	C2H2	HCOOH	HC3NH+	CH2CHOH	H2C6	CH3CHCH2	C2H5OCHO
CF+	HCO	HCNH+	C4H	H2CCCC	C6H-	CH2CHCHO	C8H-	CH3COOCH3
SiO	HCO+	H2CN	HC3N	C5H		NH2CH2CN	C2H5SH	12-atom
SiS	HOC+	HCCN	HCCNC	HC4H		CH3CHNH		C6H6
SiC	N2H+	HNCO	HNCCC	HC4N				C3H7CN
SiN	HNO	HOCN	H2COH+	c-C3H2O				C2H5OCH3
NH	HCS+	HCNO	C4H-	CH2CNH				13-atom
NO	C3	HNCS	SiH4	C5N-				HC11N
SO	C2O	HSCN	C5	C5N				
SO+	C2S	C3N	SiC4	C5S				
CP	SO2	C3O	CNCHO					
PO	N2O	C3S	CH3O					
PN	CO2	C3N-	NH3D+					
HCl	H2O+	HCO2+	NCCNH+					
KCl	H2Cl+	PH3			ArH+	NO(?)	CCN	FeCN
AlCl	OCS	c-SiC3			SiH(?)	NS	NaCl	KCN
OH	MgNC	HOOH			AlF	AlNC	AlOH	AlO
OH+	MgCN	l-C3H+			SiNC	CCP	HCP	FeO(?)
SH+	NaCN	HCCO			CO+	O2	N2 (?)	SH
CN-	SiCN				HO2	HCl+	c-SiC2	SiCSi

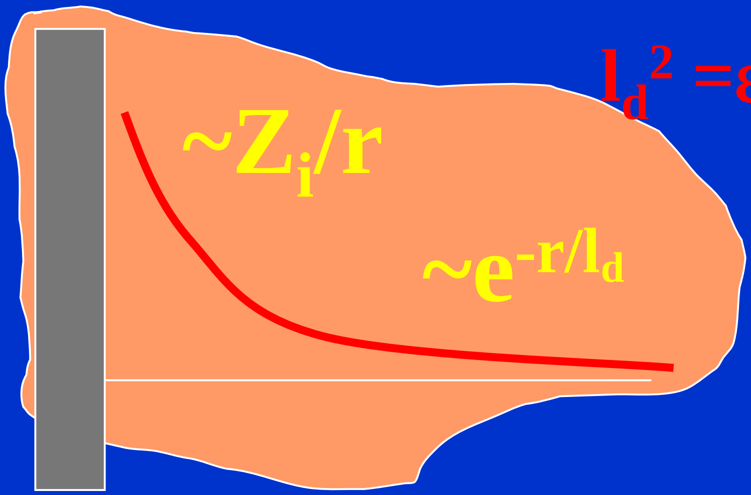
184 Molecules – June 2015

184 molecules - June 2015

Ještě raz

- Stínění v plazmě
- Ustanovení debyovského stínění

$l_d^2 = \varepsilon_0 kT/ne^2$



$\phi(r) = (Z_i e/4\pi\varepsilon_0)/r * e^{-r/l_d}$

$\sigma_c(v) = 2\pi\int b\, db$

Problém srážek na velkou vzdálenost

Výpočet:

$$l_d = 69\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \; in \; K, n \; in \; m^{-3}$$

l_d=1 mm = 0.001m at 1000K
n=4.8x10^{12}m^{-3}= 4.8x10^6 cm^{-3}

at 10K, n=1x10^{10}m^{-3}= 1x10^4 cm^{-3}
l_d~2 mm ~ 0.002m

Další kroky

Debyeho stínící vzdálenost

- Jiný pohled

$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T_1 T_2}{e^2 (Z_1^2 n_{10} T_2 + Z_2^2 n_{20} T_1)} \longrightarrow l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T}{n e^2}$$

For quasineutral plasma,
$n_{10}= n_{20}= n/2=$ with $T_1=T_2$ we obtain

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \longrightarrow b_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}$$

$$4\pi b_0 \mu g^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_0}$$

$$kT/nl_d^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi b_0 \mu g^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_0} = kT/nl_d^2 \longrightarrow b_0 \mu g^2 = \frac{l_d kT/3}{\boxed{4/3\, \pi n l_d^3}} = \frac{l_d kT/3}{\mathrm{N}}$$

N_D je počet částic v „debayove sféře“

$$b_0/l_d = \frac{\frac{1}{9}(3/2\, kT)}{\mathrm{N}\, 1/2\, \mu g^2} <<< 1$$

The problem is that b_0 is for individual collision
l_d is for many particles...

It is equivalent to condition $e\phi << kT$

Debyeho stínící vzdálenost

- Jiný pohled

$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T_1 T_2}{e^2 (Z_1^2 n_{10} T_2 + Z_2^2 n_{20} T_1)} \longrightarrow l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2}$$

For quasineutral plasma,
$n_{10}= n_{20}= n/2=$ with $T_1=T_2$ we obtain

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \longrightarrow b_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}$$

$$4\pi b_0 \mu g^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_0}$$

$$kT/nl_d^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi b_0 \mu g^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_0} = kT/nl_d^2$$

$$\longrightarrow b_0 \mu g^2 = \frac{l_d kT/3}{\boxed{4/3\, \pi n l_d^3}} = \frac{l_d kT/3}{\mathrm{N}}$$

N_D je počet částic v „debayove sféře“

$$b_0/l_d = \frac{\frac{1}{9}(3/2\, kT)}{\mathrm{N}\, 1/2\, \mu g^2} <<< 1$$

The problem is that b_0 is for individual collision
l_d is for many particles...

It is equivalent to condition $e\phi << kT$

Plasma Shielding

(cgs)

$$\nabla \bullet \vec{E} = 4\pi(\rho_T + \rho), \qquad \rho_T = Q\delta(\vec{r})$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi.$$

$$\rho = n_i e - n_e e,$$

In equilibrium: $n_s = n_0 e^{-H/kT} = n_0 e^{-q_s\Phi/kT}$ Boltzmann/Gibbs

Linearize $n_e = n_0 + \tilde{n}, \qquad \Phi = \Phi_0 + \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}$

$$-\nabla^2\Phi = 4\pi Q\delta(\vec{r}) + 4\pi e n_0\left(e^{-e\Phi/kT} - e^{e\Phi/kT}\right)$$

$$e^{\mp e\Phi/kT} = 1 \mp e\Phi/kT + \ldots$$

p.28 of NRL Plasma Formulary

$$-\nabla^2\Phi + \frac{1}{\lambda_D^2}\Phi = 4\pi Q\delta(\vec{r}), \qquad \lambda_D^{-2} \equiv \frac{4\pi(n_{0e} + n_{0i})\mathrm{e}^2}{\mathrm{kT}}$$

$$\Phi = \frac{Q}{r} e^{-r/\lambda_D}$$

For typical ITER parameters, T=10 keV $n_e = 10^{14}$ cm^{-3}:

$$\lambda_D \approx 0.5 \times 10^{-2}\,\mathrm{cm}$$

Weak-coupling between nearest neighbor particles in a plasma

Typical distance between nearest neighbor particles $\sim n^{-1/3}$

I.e., a cube that contains on average 1 particle has a width L such that $L^3 n \approx 1$

$$\frac{\text{Typical Potential Energy between nearest neighbors}}{\text{Typical Kinetic energy of a particle}} \approx \frac{e\Phi}{\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2}$$

$$\sim \frac{e^2 n^{1/3}}{T} \sim 10^{-6}$$

for typical ITER parameters, $\mathrm{T} \approx 10\ \mathrm{keV}$, $\mathrm{n} \approx 10^{14}\,/\,cm^3$

(T usually measured in energy units in plasma physics, so Boltzmann's constant $k_B=1$)

Další kroky

$$\boxed{\lambda_{De} \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 T_e}{n_e e^2}} \simeq 7434\sqrt{\frac{T_e(\text{eV})}{n_e(\text{m}^{-3})}}\ \text{m}, \quad \text{electron Debye length.}}$$

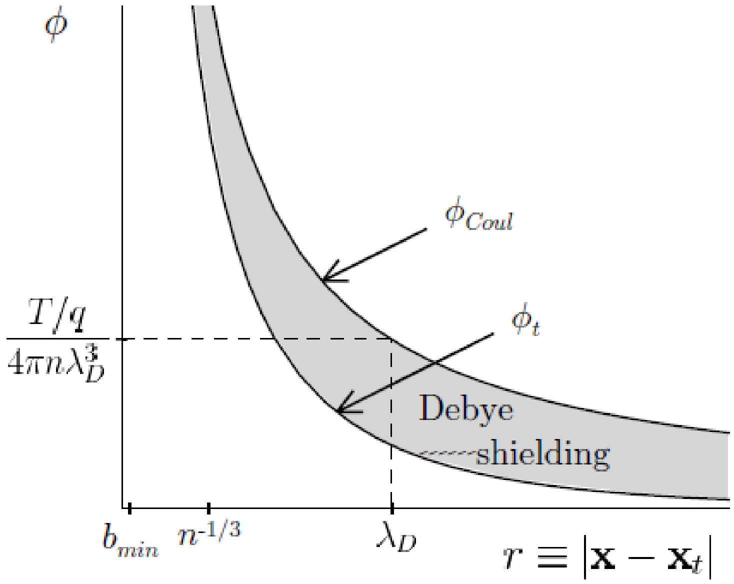
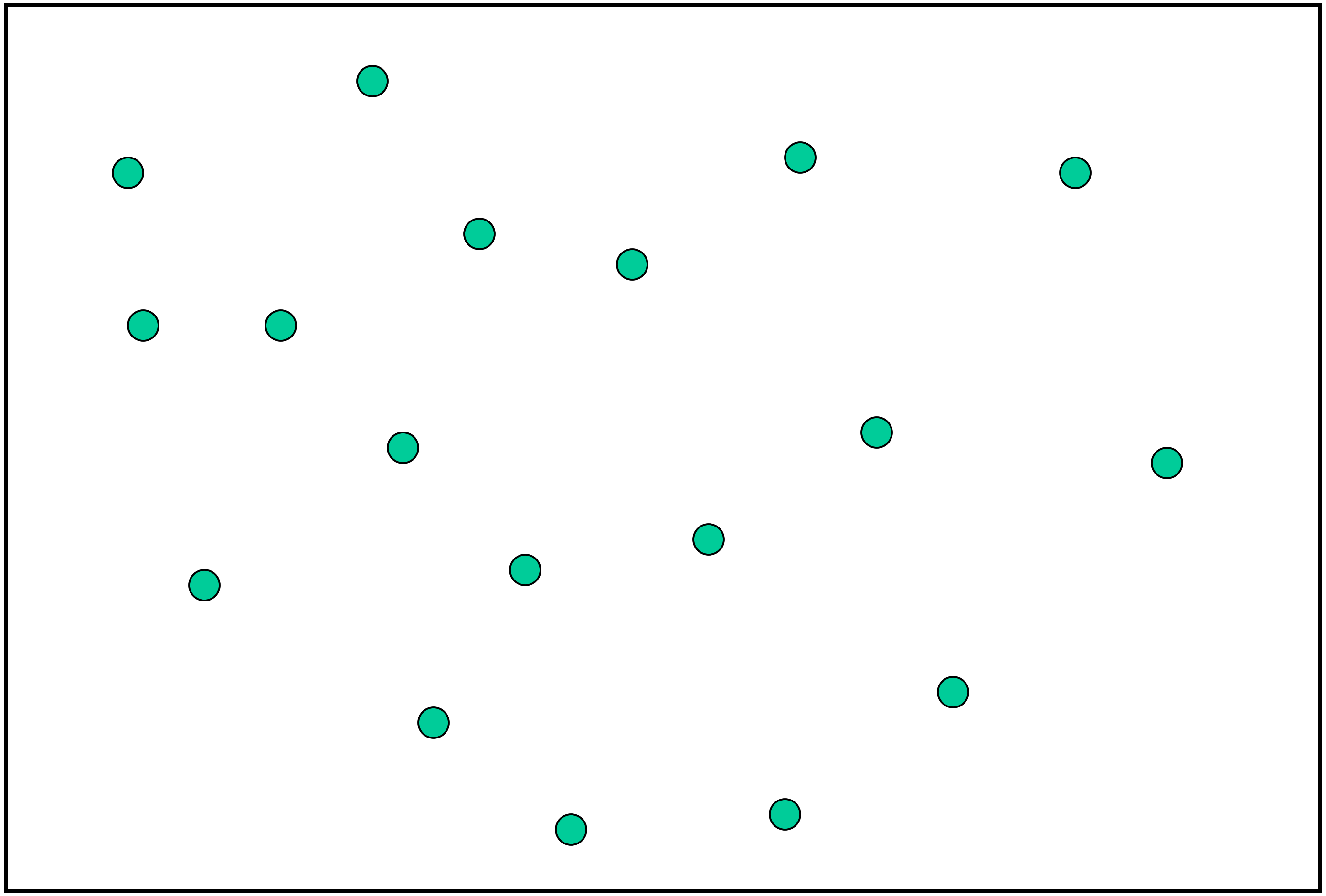


Figure 1.1: Potential ϕ_t around a test particle of charge q_t in a plasma and Coulomb potential ϕ_{Coul}, both as a function of radial distance from the test particle. The shaded region represents the Debye shielding effect. The characteristic distances are: λ_D, Debye shielding distance; $n_e^{-1/3}$, mean electron separation distance; $b_{\text{min}}^{\text{cl}} = q^2/(\{4\pi\epsilon_0\}T)$, classical distance of "closest approach" where the $e\phi/T << 1$ approximation breaks down.

Debye Length

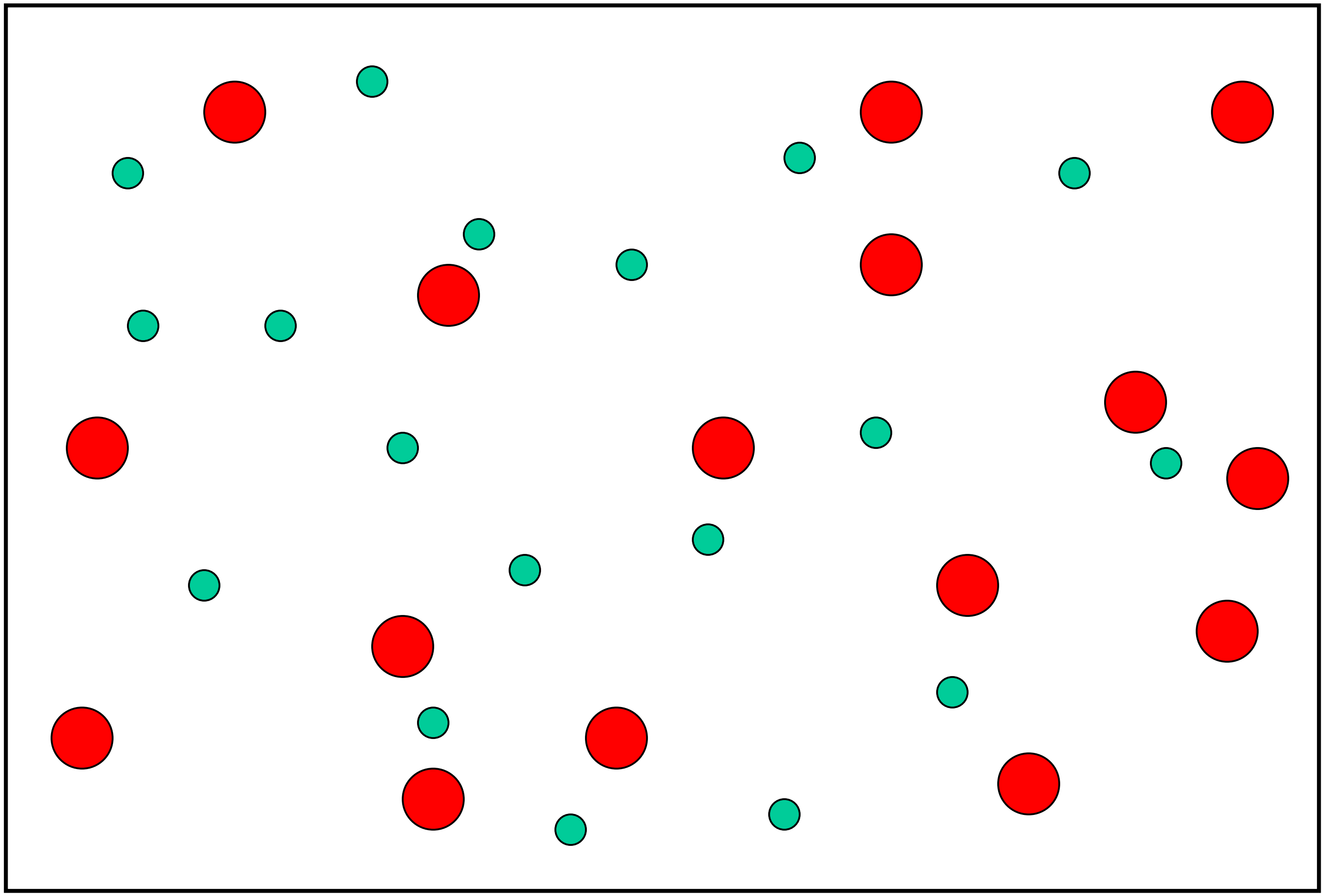
- Charged particles rather than neutrals



Electrons: e^-

Debye Length

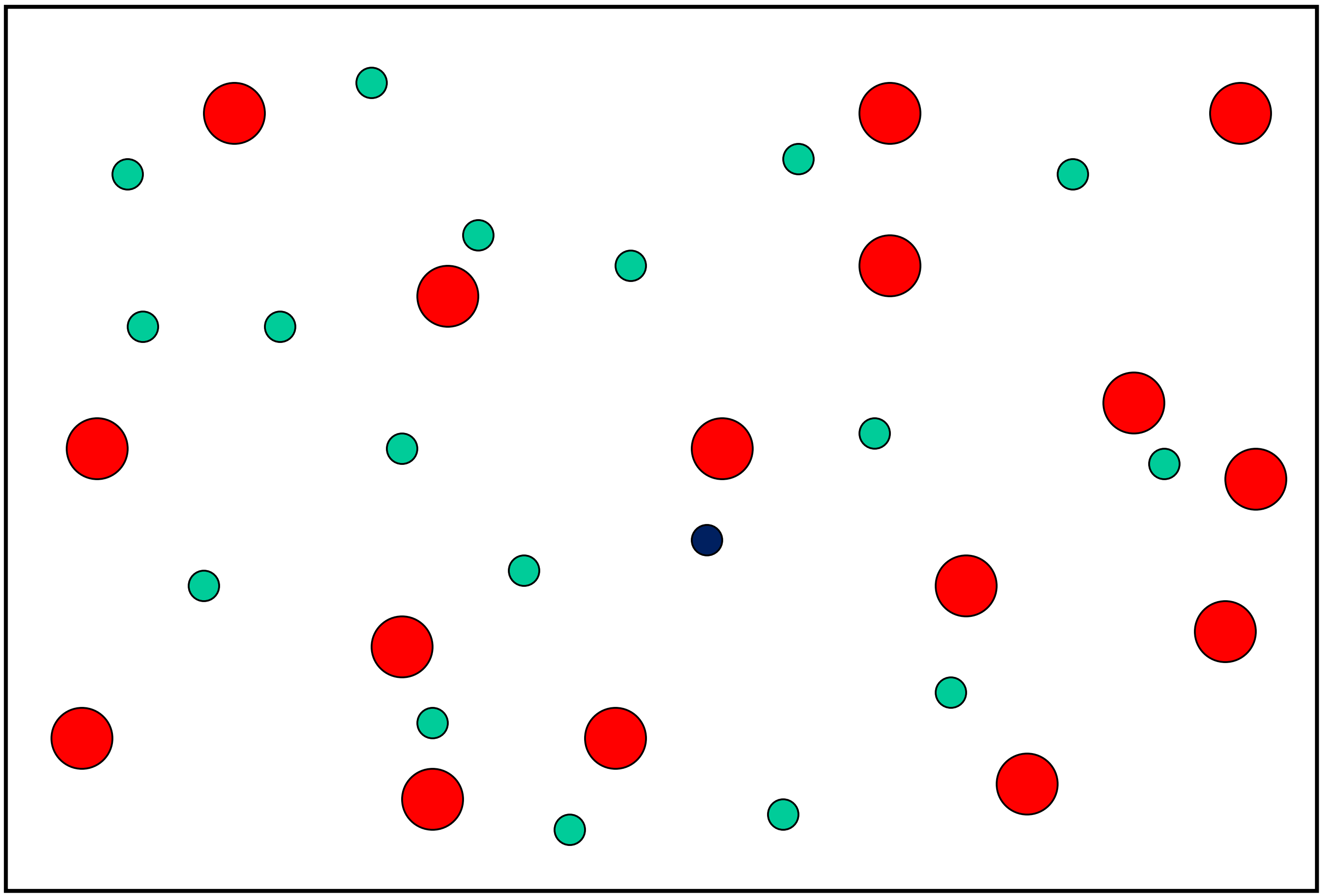
- Quasi-neutrality: nearly equal number of oppositely charged particles



Electrons: e^- Ions: H^+

Debye Length

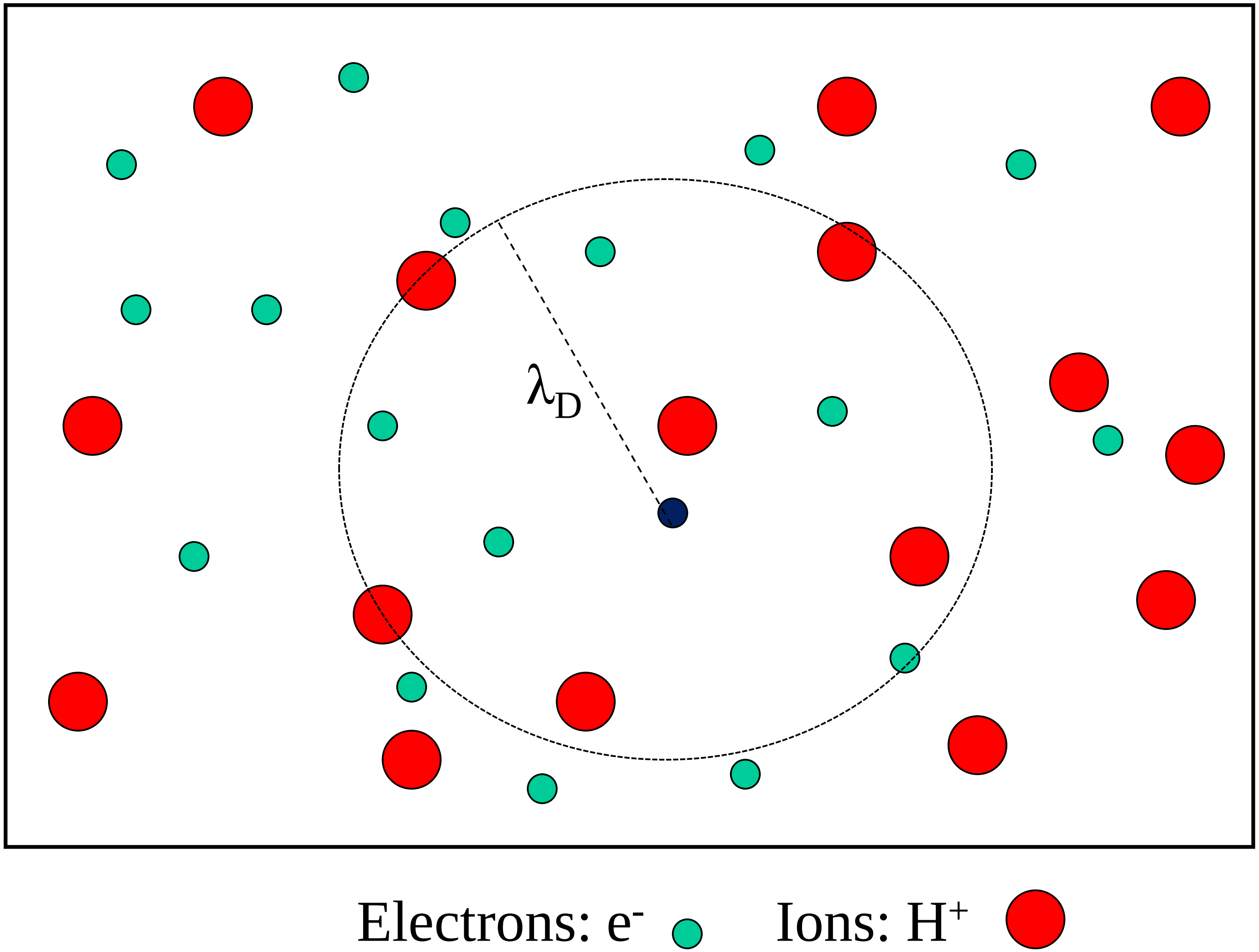
- Pick out a distinguished particle



Electrons: e^- Ions: H^+

Debye Length

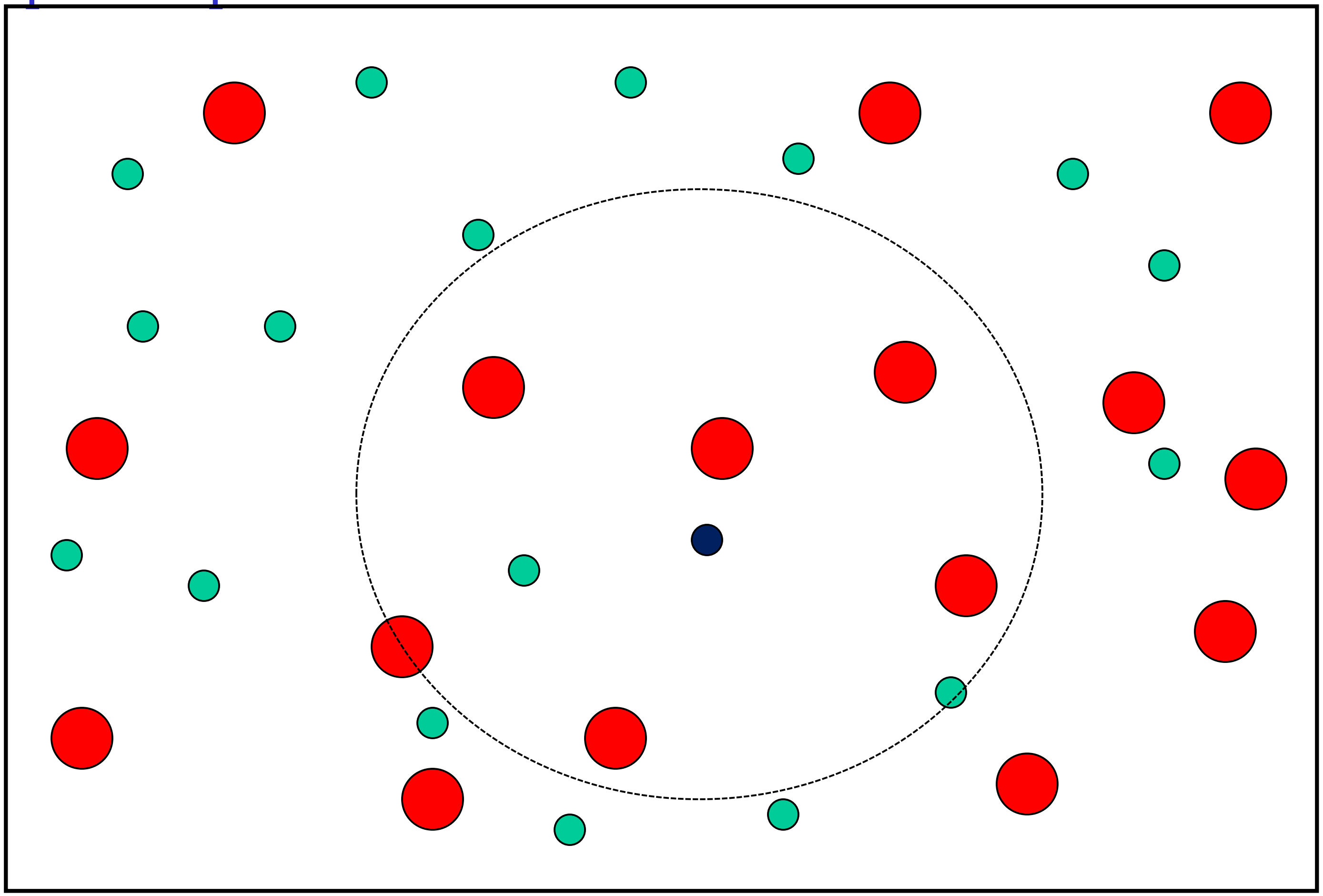
- Debye length = range of influence, e.g., for single electron



UCLA

Debye Length

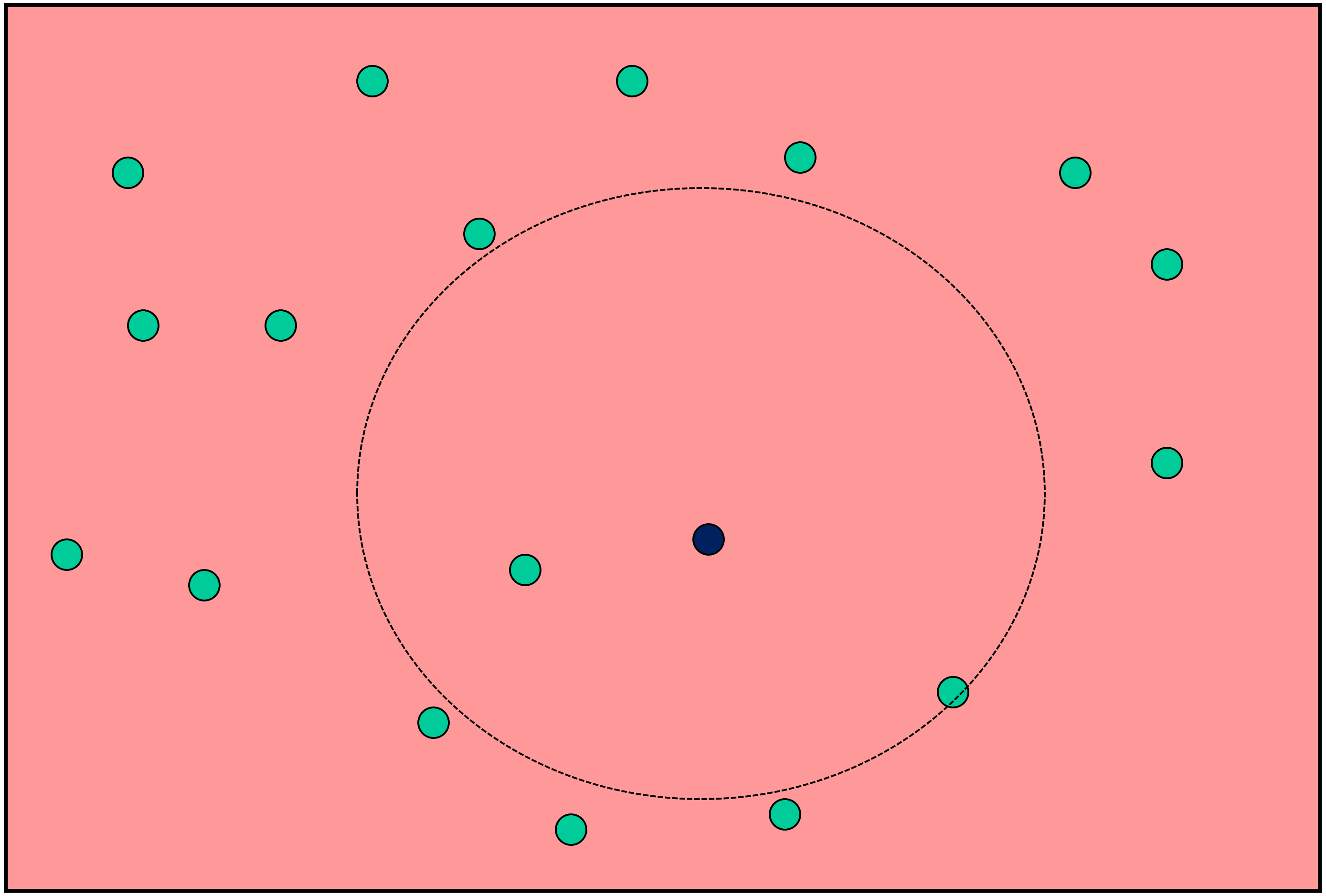
- In neighborhood of an electron there is deficit of other electrons, suplus of positive ions



Electrons: e^- Ions: H^+

Debye Length

- Replace positive charged particles by continuum, for simplicity



Electrons: e^- ; test particle ; Ions: smoothed

UCLA

Debye Length: Derivation

- Distribution of electrons and ions
  - charge q; temperature T; dielectric coeff ε_0;
  - potential φ, energy is $-q\varphi$
  - electrons in Gibbs distribution (in space) $n_e e^{q\varphi/k_B T}$
  - Uniform ions distribution $n_i = n_e$
- Poisson equation (linearized)
  - Single electron at 0

$$\nabla^2\varphi = (q/\varepsilon_0)(\delta(x) + n_e e^{q\varphi/k_B T} - n_e)$$

$$\approx (q/\varepsilon_0)\delta(x) + (n_e q^2/\varepsilon_0 k_B T)\varphi$$

- Solution

$$\varphi = -(4\pi)^{-1}(q/\varepsilon_0) r^{-1} e^{-r/\lambda_D}$$

With length scale λ_D = Debye length:

$$\lambda_D^{-2} = n_e q^2 (\varepsilon_0 k_B T)^{-1}$$

Interactions of Charged Particles in a Plasma

- Plasma parameter $g = (n\,\lambda_D^3)^{-1}$
  - Plasma approximation $g \ll 1$
  - Many particles in a Debye sphere
  - Otherwise, the system is an N-body problem

- Long range interactions
  - $r > \lambda_D$ (λ_D = Debye length)
  - Individual particle interactions are not significant
  - Interaction mediated by electric and magnetic fields

- Short range interactions
  - $r < \lambda_D$
  - Coulomb interactions

Další kroky

The Plasma Parameter

A fundamental parameter used to characterize plasmas is the number of particles in a Debye sphere, Λ, a.k.a. “the plasma parameter:

$$\Lambda = n\frac{4\pi}{3}\lambda_D^3 \sim 10^8 \quad \text{for typical ITER parameters}$$

(A handy formula for Λ is on p. 29 of the NRL Plasma Formulary)

It turns out that the ratio of the potential energy between typical nearest neighbor particles to their typical kinetic energy (calculated a few slides back) can be expressed as

$$\frac{\text{Potential Energy}}{\text{Kinetic Energy}} \approx \frac{e^2 n^{1/3}}{T} = \frac{1}{(36\,\pi)^{1/3}\Lambda^{2/3}}$$

Thus Λ>>1 implies the plasma is in the weakly-coupled limit. We will find that it also implies that the mean free path is long compared to the Debye length.