Nezávislost axiomů ve dvou axiomatikách teorie konečných množin

Libor Běhounek
FF UK, obor Logika, II. ročník

Ročníková práce

Zadavatel: RNDr. Antonín Sochor, DrSc.

4. 9. 1998

1 Úvod

1.1 Zadání

1. V práci [V] je popsána jednoduchá axiomatika konečné teorie množin a je ukázáno, že všechny axiomy $\mathbf{ZF_{Fin}}$ jsou v ní dokazatelné. Naproti tomu v [S] je ukázáno, že bez využití schematu nahrazení s pouhým schematem vydělení jsou v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ dokazatelné axiomy zmíněné axiomatiky. Musí tedy existovat důkaz schematu nahrazení ze schematu vydělení v axiomatice typu $\mathbf{ZF_{Fin}}$. Nalezněte jednoduchou versi takovéhoto důkazu.

2. Pomocí teorie modelů ukažte nezávislost axiomů v axiomatice z [V].

3. Zkuste pomocí modelů prokázat nezávislost axiomů $\mathbf{ZF_{Fin}}$.

4. Najděte co nejjednodušší popis dobrého uspořádání univerzální třídy v $\mathbf{ZF_{Fin}}$.

1.2 Přehled značení

Značení	**Význam**
$\mathrm{P}(x)$	potence x
$\mathrm{Fin}(x)$	x je konečná podle Tarského
$\mathrm{Ind}(x)$	x je induktivní
$\mathrm{Nat}(x)$	x je přirozené číslo
$\mathrm{Trans}(X)$	X je tranzitivní
$x \triangle y$	symetrický rozdíl x, y
$x''y$	obraz x v relaci y
$\mathfrak{M} \models \varphi$	model $\mathfrak{M}$ splňuje uzavřenou formuli φ
$\mathfrak{M} \models \varphi\ [e]$	$\mathfrak{M}$ splňuje φ při ohodnocení proměnných e
${}^{x}_{a}e$	změna ohodnocení e na proměnné x: ${}^{x}_{a}e(y) = a$ pro $y = x$, ${}^{x}_{a}e(y) = e(y)$ pro $y \neq x$
(ext), (nul), ...	značky jednotlivých axiomů viz 1.3
(sch_φ)	instance schematu axiomů (sch) pro formuli φ
$\mathbf{X}$ + (ax)	axiomatika $\mathbf{X}$ obohacená o axiom (ax)
$\mathbf{X}$ − (ax)	axiomatika $\mathbf{X}$ s vynecháním axiomu (ax)
$\mathbf{X}$ ÷ (ax)	axiomatika $\mathbf{X}$, v níž je axiom (ax) nahrazen svojí negací

$\mathbf{AST_{Set}}$	axiomatika teorie konečných množin popsaná ve [V], viz oddíl 1.3
$\mathbf{ZF}, \mathbf{ZF_{Fin}}$	Zermelo-Fraenkelova axiomatika teorie množin resp. konečných množin
$\mathbf{V}, \mathbf{Id}, \mathbf{E}, \mathbf{On}, \mathbf{N}, \mathbf{Z}$	třída všech množin, relace identity a náležení, třída všech ordinálů, všech přirozených a všech celých čísel
$\hat{\varphi}$	přepis formule $\mathfrak{M} \models \varphi$ do základního jazyka teorie množin, viz oddíl 1.4

Obvyklou konstrukci hladin p_n iterovanou potencí prázdné množiny provedeme poněkud obecněji.[1] Buď u nějaká množina. Rekurzí potom sestrojíme množiny p^u_α takto:

$$\begin{array}{rcll} p^u_0 & = & u & \\ p^u_\alpha & = & \mathrm{P}(p^u_{\alpha-1}) \cup u & \text{pro } \alpha \in \mathbf{On} \text{ izolované} \\ p^u_\lambda & = & \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} p^u_\alpha & \text{pro } \lambda \in \mathbf{On} \text{ limitní} \end{array}$$

Třídu $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} p_\alpha$ budeme značit $\mathbf{\Pi}^u$. Nejmenší $\alpha \in \mathbf{On}$, pro které je $x \in p^u_\alpha$, značíme $\tau^u(x)$ a nazýváme *typem* množiny x nad množinou u. Pro $u = 0$ budeme horní index vynechávat a hovořit prostě o typu množiny x.

1.3 Přehled axiomů

V běžných přehledech axiomů teorie konečných množin se obvykle setkáváme s využíváním jednodušších axiomů při formulaci axiomů složitějších. Například při obvyklé formulaci schematu indukce v axiomatice $\mathbf{AST_{Set}}$ ve tvaru

$$[\varphi(0) \ \& \ (\forall x, y) \ (\varphi(x) \ \rightarrow \ \varphi(x \cup \{y\})] \ \rightarrow \ (\forall x) \ (\varphi(x))$$

používáme konstantu 0 a funkci $\cdot \cup \{\cdot\}$, které jsme definovali na základě předem vyslovených axiomů nuly, množinového následníka a extenzionality.

V okamžiku, kdy chceme zkoumat nezávislost jednotlivých axiomů — tedy uvažovat o situaci, kdy některé axiomy nejsou splněny — však nemůžeme tento přístup použít. Musíme proto nejprve všechny axiomy vyslovit v nezkrácené podobě, v základním jazyce teorie množin[2] (můžeme přitom používat definované *predikáty*, např. $\subseteq$, $\notin$ apod., nikoli však *konstanty* a *funkce*, k jejichž korektní definici potřebujeme mít zaručenu existenci popř. jednoznačnost příslušného objektu). Protože v běžné literatuře o teorii množin se platnost ostatních axiomů předpokládá, uvádějí se axiomy zpravidla pouze ve zkrácené formě a není tudíž jasné, jaké by mělo být jejich „správné" rozepsání. Budeme proto muset uvážit, která z možných variant nejlépe vystihuje intuitivní představu, jež má být axiomem zachycena, i za situace, kdy ostatní axiomy nejsou splněny.

[1] Konstrukci provedeme stejně v $\mathbf{ZF}$ i v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ (v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ jsou ordinálními čísly čísla přirozená, limitní ordinální čísla neexistují).

[2] Druhou možností by bylo uvažovat o nich jako o skolemovských funkcích a formulovat např. axiom prázdné množiny jako $(\forall q) \ (q \notin 0)$.

Mimoto se u některých axiomů teorie množin vyskytuje několik obvyklých formulací, které jsou za předpokladu platnosti ostatních axiomů vzájemně ekvivalentní. U takových axiomů vybereme pro účely této práce pouze jednu, přestože se výsledek může u různých formulací lišit. V případě potřeby zmíníme odlišný výsledek při jiné formulaci některého axiomu formou poznámky. Úplná diskuse problému se všemi častěji používanými variantami axiomů by přesahovala shora omezený rozsah této práce.

Axiomatika $\mathbf{ZF_{Fin}}$

Axiomatika $\mathbf{ZF_{Fin}}$ sestává z axiomů extenzionality, nuly, potence, sjednocení, konečna, regularity a schematu nahrazení.

Axiom extenzionality

(ext) $\quad (\forall x)\ (\forall y)\ (x = y\ \equiv\ (\forall q)\ (q \in x\ \equiv\ q \in y))$

Axiom nuly (prázdné množiny)

(nul) $\quad (\exists z)\ (\forall q)\ (q \notin z)$

Axiom potence

(pot) $\quad (\forall x)\ (\exists z)\ ((\forall q)\ (q \in z\ \equiv\ (\forall u)\ (u \in q\ \rightarrow\ u \in x)))$

Axiom sjednocení

(sjedn) $\quad (\forall x)\ (\exists z)\ ((\forall q)\ (q \in z\ \equiv\ (\exists u)\ (q \in u\ \&\ u \in x)))$

Axiom konečna

Axiom konečna může být vysloven ve mnoha variantách, které jsou při platnosti ostatních axiomů vzájemně ekvivalentní. Zde budeme uvažovat Tarského definici konečnosti a axiom budeme formulovat v podobě „každá množina je konečná ve smyslu Tarského, tj. každá neprázdná podmnožina její potence má maximální prvek vůči inkluzi“.

Pro případ, že nebudeme mít k dispozici axiom nuly, potence nebo extenzionality, je třeba ve znění tohoto axiomu rozepsat pojmy „neprázdná“, „část potence“ a „maximální prvek vůči inkluzi“. První dva rozepíšeme snadno takto: $q \neq 0$ jako $(\exists z)\ (z \in q)$ a $q \subseteq \mathrm{P}(x)$ jako $(\forall w \in q)\ (w \subseteq x)$. Rozhodnout, jaké je rozumné rozepsání predikátu „u je maximálním prvkem množiny q vůči inkluzi", je obtížnější, neboť bez axiomu extenzionality nemusí být inkluze uspořádáním.[3]

Podmínka existence maximálního prvku vůči inkluzi má vystihnout intuitivní představu, že uvnitř (konečné) množiny nemůžeme neomezeně přidávat do podmnožiny další a další prvky. Tou podstatnou vlastností vůči inkluzi maximální množiny u tedy je, že neexistuje žádná množina $w \in q$, která by byla *větší,* tj. obsahovala jako svoji část u a navíc ještě nějaké prvky. Z mnoha možných (za extenzionality ekvivalentních) formulací podmínky maximality $u \in q$ vůči inkluzi tedy jako nejvhodnější vybereme tu, že $\neg\ (\exists w \in q)\ (u \subseteq w\ \&\ (\exists s \in w)\ (s \notin u))$, kterou si přepíšeme na ekvivalentní tvar

$$(\forall w \in q)\ (u \subseteq w\ \rightarrow\ w \subseteq u)$$

Axiom konečna tedy budeme uvažovat ve tvaru

(fin) $$(\forall x)\ (\forall q)\ [((\forall w \in q)\ (w \subseteq x)\ \&\ (\exists w)\ (w \in q))\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ \ (\exists u \in q)\ (\forall w \in q)\ (u \subseteq w\ \rightarrow\ w \subseteq u)]$$

Axiom regularity

Axiom regularity v teorii konečných množin je konjunkcí dvou podmínek, z nichž první zaručuje existenci minimálního prvku každé neprázdné množiny vzhledem k náležení a druhá existenci tranzitivního obalu každé množiny. Tato druhá podmínka bývá uváděna ve dvou podobách (které jsou při platnosti ostatních axiomů ekvivalentní), totiž jako $(\forall x)\ (\exists z \supseteq x)\ (\mathrm{Trans}(z))$ nebo $(\forall x)\ (\exists z \ni x)\ (\mathrm{Trans}(z))$. Pro účely této práce budeme používat první z nich. Nezkrácený zápis axiomu regularity je:

(reg) $$(\forall x)\ [\ \ ((\exists u)\ (u \in x)\ \rightarrow\ (\exists z \in x)\ (\forall u \in z)\ (u \notin x))$$
$$\&\ \ \ (\exists z \supseteq x)\ (\forall u \in z)\ (u \subseteq z)]$$

Schema nahrazení

Je-li $\varphi(u, v)$ formule, která neobsahuje volné proměnné w, z, potom následující formule je axiomem $\mathbf{ZF_{Fin}}$:

(nahr) $$(\forall u, v, w)\ ((\varphi(u, v)\ \&\ \varphi(u, w))\ \rightarrow\ v = w)\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ (\forall x)\ (\exists z)\ (\forall v)\ (v \in z\ \equiv\ (\exists u \in x)\ (\varphi(u, v)))$$

[3] Například nabízející se podmínka $u \in q\ \&\ (\forall w \in q)\ (w \supseteq u\ \rightarrow\ w = u)$ nedává dobrý smysl, protože z formule $(\exists x)\ (\exists y)\ (x \neq y\ \&\ (\forall q)\ (q \notin x\ \&\ q \notin y))$, zajišťující existenci alespoň dvou různých prázdných množin, by pak již vyplývalo, že žádná množina není konečná podle Tarského.

V kapitole 2 ukážeme, že všechny axiomy schematu nahrazení jsou v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ důsledkem instancí jednoduššího schematu vydělení. Je-li $\varphi(u)$ formule, která neobsahuje volnou proměnnou z, je následující formule případem schematu vydělení:

(vyd) $\quad (\forall x)\ (\exists z)\ (\forall u)\ (u \in z\ \equiv\ (u \in x\ \&\ \varphi(u)))$

Axiomatika $\mathbf{AST_{Set}}$

Axiomatika $\mathbf{AST_{Set}}$ sestává z axiomů extenzionality, nuly a množinového následníka, schematu indukce a schematu ε-indukce. Axiomy extenzionality a nuly jsou v $\mathbf{AST_{Set}}$ stejné jako v axiomatice $\mathbf{ZF_{Fin}}$.

Axiom množinového následníka

(násl) $\quad (\forall x)\ (\forall y)\ (\exists z)\ (\forall q)\ (q \in z\ \equiv\ (q \in x\ \vee\ q = y))$

Schema indukce

Schema indukce se obvykle uvádí v následující podobě:

$$[\varphi(0)\ \&\ (\forall x, y)\ (\varphi(x)\ \rightarrow\ \varphi(x \cup \{y\})]\ \rightarrow\ (\forall x)\ (\varphi(x))$$

Protože při našich úvahách nemusí být splněn některý z axiomů nuly, následníka nebo extenzionality, je třeba indukci přeformulovat tak, aby tyto axiomy implicitně nepoužívala.

Schema indukce říká: „co platí pro prázdnou množinu a s každými dvěma množinami i pro jejich následníka, platí už pro každou množinu“. Protože bez ostatních axiomů prázdná množina nemusí existovat nebo jich může být více, je třeba první podmínku přeformulovat na tvar „co platí pro *libovolnou* prázdnou množinu“; stejně tak, protože ke dvěma daným množinám nemusí existovat právě jeden jejich množinový následník, je třeba druhou podmínku vyslovit opatrněji jako „a s každými dvěma množinami i pro jejich *libovolného* následníka“.

Za nezkrácenou formulaci axiomu indukce pro formuli φ proto budeme považovat formuli:

(ind) $\quad$ **(1)** $\quad (\forall x)\ ((\forall q)\ (q \notin x)\ \rightarrow\ \varphi(x))\ \ \&$

$\qquad\quad$ **(2)** $\quad (\forall x, y)\ [\varphi(x)\ \rightarrow\ (\forall z)\ ((\forall q)\ (q \in z\ \equiv\ q \in x\ \vee\ q = y)\ \rightarrow\ \varphi(z))]$

$\qquad\quad \rightarrow\ \quad (\forall x)\ (\varphi(x))$

Schema ε-indukce

(eps) $\quad (\forall x)\ [(\forall y \in x)\ (\varphi(y))\ \rightarrow\ \varphi(x)]\ \rightarrow\ (\forall x)\ (\varphi(x))$

1.4 Používaná tvrzení

V tomto oddílu uvedeme některá tvrzení dokazatelná v **ZF** resp. $\mathbf{ZF_{Fin}}$, která budeme v dalších kapitolách používat. Protože jde vesměs o tvrzení všeobecně známá, nebudeme jejich důkazy uvádět.

Třída $\mathbf{\Pi}^u$

Pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$, $\alpha < \beta$ platí $p^u_\alpha \subset p^u_\beta$. Je-li množina u tranzitivní, je rovněž libovolné p^u_α a třída $\mathbf{\Pi}^u$ tranzitivní a platí: jestliže $\beta \geq 1$, $a \in p^u_\alpha$, $b \in p^u_\beta$, potom $a \cup b \in p^u_{\max(\alpha,\beta)}$ a $\mathrm{P}(a) \in p^u_{\alpha+1}$. Axiom regularity v **ZF** i $\mathbf{ZF_{Fin}}$ je ekvivalentní tvrzení, že $\mathbf{\Pi} = \mathbf{V}$.

Tranzitivní modely

Je-li $\mathfrak{M}$ model s absolutní rovností a náležením, tj. $\mathfrak{M} = \langle u, \mathbf{Id} \cap u^2, \mathbf{E} \cap u^2 \rangle$, potom jsou v $\mathfrak{M}$ splněny axiomy rovnosti. Je-li navíc množina u tranzitivní, jsou v modelu $\mathfrak{M}$ splněna následující tvrzení:

- Extenzionalita: $\mathfrak{M} \models (\mathrm{ext})$.
- Absolutnost inkluze: $\mathfrak{M} \models x \subseteq y\ [e] \ \equiv\ e(x) \subseteq e(y)$.
- Absolutnost nuly: $\mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \notin z)\ [e] \ \equiv\ e(z) = 0$, tedy v $\mathfrak{M}$ je splněn axiom nuly, právě když $0 \in u$.
- Absolutnost dvojice: $\mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \in z \ \equiv\ (q = x \ \vee\ q = y))\ [e] \ \equiv\ e(z) = \{e(x), e(y)\}$.
- Absolutnost sjednocení: $\mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \in z \ \equiv\ (\exists w)\ (q \in w \in x))\ [e] \ \equiv\ e(z) = \bigcup e(x)$. Důsledkem absolutnosti sjednocení a dvojice je absolutnost množinového následníka; axiom množinového následníka je tedy v $\mathfrak{M}$ splněn právě tehdy, když je u vůči operaci následníka uzavřená.
- Absolutnost induktivnosti množiny: v tranzitivních modelech uzavřených na následníka platí $\mathfrak{M} \models \mathrm{Ind}(x)\ [e] \ \equiv\ \mathrm{Ind}(e(x))$.
- Absolutnost potence: je-li množina u uzavřená na podmnožiny, je absolutní i pojem potence, tj. $\mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \in z \ \equiv\ q \subseteq x)\ [e] \ \equiv\ e(z) = \mathrm{P}(e(q))$.
- Absolutnost konečnosti: je-li u uzavřená vůči potenci a podmnožinám, je v $\mathfrak{M}$ absolutní i pojem konečnosti, tj. $\mathfrak{M} \models \mathrm{Fin}(x)\ [e] \ \equiv\ \mathrm{Fin}(e(x))$.
- Absolutnost tranzitivity: $\mathfrak{M} \models \mathrm{Trans}(x)\ [e] \ \equiv\ \mathrm{Trans}(e(x))$.

2 Závislost schematu nahrazení na schematu vydělení v $\mathbf{ZF_{Fin}}$

Ukážeme nejprve, že při formulaci axiomu konečna v podobě „každá množina je konečná podle Tarského“ schema nahrazení v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ vyplývá z jednoduššího schematu vydělení. Potom ukážeme (pomocí modelu v $\mathbf{ZF}$), že při formulaci axiomu konečna v podobě „neexistuje induktivní množina“ je schema nahrazení na schematu vydělení nezávislé.

2.1 S axiomem (fin)

$\mathbf{ZF_{Fin}}$ $-$ (nahr) + (vyd) $\vdash$ (nahr$_\varphi$) pro libovolnou formuli φ.

Nástin důkazu

Důkaz povedeme sporem. Mějme formuli φ, která splňuje podmínky schematu nahrazení a množinu a, která nemá ve φ svůj „obraz“. Uvažujme množinu $b \subseteq \mathrm{P}(a)$ těch jejích podmnožin, které ještě svůj „obraz“ mají. Zřejmě $0 \in b$, $a \notin b$ a snadno ukážeme, že s každým $r \in b$ je v b i množina $r \cup \{s\}$ pro libovolné $s \in a - r \neq 0$. Pak ale (neprázdná) množina $b \subseteq \mathrm{P}(a)$ nemá maximální prvek vůči inkluzi — spor s Tarského konečností množiny a.

Podrobné provedení důkazu

Nechť $\varphi(u, v)$ je formule, která splňuje podmínky schematu nahrazení, tj. nemá volné proměnné w, z a platí

(1) $$(\forall u, v, w)\ (\varphi(u, v)\ \&\ \varphi(u, w)\ \rightarrow\ v = w)$$

(formule φ tedy každému „vzoru“ u přiřazuje nejvýše jeden „obraz“). Chceme dokázat, že potom

$$(\forall x)\ (\exists z)\ (\forall v)\ (v \in z\ \equiv\ (\exists u \in x)\ (\varphi(u, v)))$$

Důkaz vedeme sporem. Nechť tedy a je libovolná množina taková, že neexistuje množina všech „obrazů jejích prvků ve φ“, tj. že

(2) $$\neg\ (\exists z)\ (\forall v)\ (v \in z\ \equiv\ (\exists u \in a)\ (\varphi(u,v)))$$

Uvažujme množinu $b \subseteq \mathrm{P}(a)$ těch jejích podmnožin, k nimž množina všech „obrazů jejich prvků ve φ“ ještě existuje, tj.

$$b = \{q \in \mathrm{P}(a);\ (\exists z)\ (\forall v)\ (v \in z\ \equiv\ (\exists u \in q)\ (\varphi(u,v)))\}$$

(množina b existuje podle axiomu vydělení z množiny $\mathrm{P}(a)$). Platí:

1. $0 \in b$, neboť „obrazem“ prázdné množiny ve φ je opět prázdná množina: $(\forall v)\ (v \in z\ \equiv\ (\exists u \in 0)\ (\varphi(u,v)))$ platí právě pro $z = 0$. Množina b je tedy neprázdná.

2. $a \notin b$ podle předpokladu (2). Pro každé $r \in b$ je tedy množina $a - r$ neprázdná.

3. $(\forall r \in b)\ (\forall s \in a - r)\ (r \cup \{s\} \in b)$. Nechť totiž $r \in b$; potom r má „obraz“ ve φ, který označíme r', tj.

   $$(\forall v)\ (v \in r'\ \equiv\ (\exists u \in r)\ (\varphi(u,v)))$$

   Mějme prvek $s \in a - r \neq 0$. Podle (1) mohou nastat tyto dva případy:

   (a) Formule φ nepřiřazuje prvku s žádný „obraz“, tj. $(\forall v)\ \neg\,\varphi(s,v)$.
   Potom „obrazem“ $r \cup \{s\}$ ve φ je množina r', neboť pro každé v platí:

   $$\begin{aligned} v \in r' &\equiv (\exists u)\ (u \in r\ \&\ \varphi(u,v)) && \equiv \\ &\equiv (\exists u)\ (u \in r\ \&\ \varphi(u,v))\ \vee\ \varphi(s,v) && \equiv \\ &\equiv (\exists u)\ ((u \in r\ \vee\ u = s)\ \&\ \varphi(u,v)) && \equiv \\ &\equiv (\exists u)\ ((u \in r \cup \{s\}\ \&\ \varphi(u,v)) \end{aligned}$$

   (b) Formule φ přiřazuje prvku s prvek s', tj. platí $\varphi(s,s')$.
   Potom „obrazem“ $r \cup \{s\}$ ve φ je množina $r' \cup \{s'\}$, neboť pro každé v platí:

   $$\begin{aligned} v \in r' \cup \{s'\} &\equiv v \in r'\ \vee\ v = s' && \equiv \\ &\equiv (\exists u)\ (u \in r\ \&\ \varphi(u,v))\ \vee\ \varphi(s,v) && \equiv \\ &\equiv (\exists u)\ ((u \in r\ \vee\ u = s)\ \&\ \varphi(u,v)) && \equiv \\ &\equiv (\exists u)\ ((u \in r \cup \{s\}\ \&\ \varphi(u,v)) \end{aligned}$$

   V obou případech má množina $r \cup \{s\}$ „obraz“ ve φ (tj. $(\exists z)\ (v \in z\ \equiv\ (\exists u)\ (u \in r \cup \{s\}\ \&\ \varphi(u,v))))$, a tedy $r \cup \{s\} \in b$.

4. Množina $b \subseteq \mathrm{P}(a)$ tudíž nemá maximální prvek vůči inkluzi (ke každému $r \in b$ existuje v b jeho nadmnožina o jeden prvek větší), tedy a není konečná ve smyslu Tarského. Spor s axiomem (fin).

2.2 S axiomem (fin′)

Vezmeme-li za axiom konečna tvrzení „neexistuje induktivní množina“, není již schema nahrazení na schematu vydělení závislé. Ukážeme model v **ZF**, který splňuje všechny příslušné axiomy včetně schematu vydělení a ve kterém neexistuje induktivní množina, ale schema nahrazení je v něm porušeno.

Definujme následující množiny:

$$\left.\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \{u_n\} \end{array}\right\} \quad u = \bigcup_{n\in\omega} u_n, \quad \text{tj. } u = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \ldots\}$$

Množina u je zřejmě tranzitivní, pročež je tranzitivní také množina p^u_ω. V tranzitivním modelu $\mathfrak{M}$ s nosičem p^u_ω jsou tedy splněny axiomy rovnosti a extenzionality. Protože p^u_ω obsahuje prázdnou množinu a je uzavřená vůči sjednocení (a tyto pojmy jsou v tranzitivním modelu absolutní), jsou v $\mathfrak{M}$ splněny axiomy nuly a sjednocení. Protože je dále p^u_ω uzavřená vůči podmnožinám a (tudíž absolutní) potenci, je v $\mathfrak{M}$ splněn i axiom potence. Dokážeme postupně zbývající axiomy:

1. Neexistence induktivní množiny v $\mathfrak{M}$ vyplývá z následujícího lemmatu:

   Lemma: $(\forall z \in p^u_\omega)\ (\mathrm{Ind}(z) \ \rightarrow\ z \subseteq u)$

   Důkaz: Stačí ukázat, že pokud induktivní množina z je prvkem p^u_n pro nějaké $n > 1$, pak také $z \in p^u_{n-1}$. Indukčním sestupem potom totiž dostáváme, že $z \in p^u_1 = \mathrm{P}(u)$, tj. $z \subseteq u$, což je požadované tvrzení.

   Nechť tedy $z \in p^u_n$ je induktivní, $n > 1$. Potom pro každé $x \in z$ je $x \cup \{x\} \in z$, tj. $x \in x \cup \{x\} \in z \in p^u_n$, tedy $x \in p^u_{n-2}$. Máme tedy $(\forall x \in z)\ (x \in p^u_{n-2})$, tj. $z \subseteq p^u_{n-2}$, neboli $z \in p^u_{n-1}$, což bylo dokázati.

   Protože pojem induktivnosti je v tranzitivním modelu uzavřeném na následníka absolutní a množina u induktivní množinu jako svoji část zřejmě neobsahuje, je v $\mathfrak{M}$ axiom konečna v podobě neexistence induktivní množiny splněn.

2. Schema vydělení. Nechť $\varphi(v)$ neobsahuje volnou proměnnou z. Podle definice splňování v $\mathfrak{M}$ je

   $$\begin{array}{rl} & \mathfrak{M} \models (\forall x)\ (\exists z)\ (\forall q)\ (q \in z \ \equiv\ q \in x \ \&\ \varphi(q))\ [e] \ \equiv \\ \equiv & (\forall a \in p^u_\omega)\ (\exists b \in p^u_\omega)\ (\forall c \in p^u_\omega)\ (c \in b \ \equiv\ c \in a \ \&\ \hat{\varphi}(c)) \end{array}$$

   kde $\hat{\varphi}(e'(t))$ je formule základního jazyka teorie množin vyjadřující, že $\mathfrak{M} \models \varphi(t)\ [e']$, kde $e' = {}^{q\,z\,x}_{c\,b\,a}e$.

   Ukážeme, že množina $d = \{c \in a :\ \hat{\varphi}(c)\} \subseteq a \in p^u_\omega$ je prvkem p^u_ω, a je tudíž hledaným b: Jestliže $a \in p^u_n$ pro $n > 0$, pak $d \subseteq a \subseteq p^u_{n-1}$, tedy $d \in p^u_n$. Pokud naopak $a \in u$, potom z tranzitivity u je $d \subseteq a \subseteq u$, tedy $d \in p^u_1$.

3. Axiom regularity v $\mathfrak{M}$ je důsledkem toho, že $p^u_\omega \subset \mathbf{\Pi}$. Existence tranzitivního obalu vyplývá z faktu, že pojem „být tranzitivní“ je v tranzitivním modelu absolutní a každá hladina p^u_n je tranzitivní.

4. Schema nahrazení. Z axiomu regularity v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ vyplývá, že $\mathbf{\Pi} = \mathbf{V}$, neboli že $(\forall x)\ (\exists n \in \mathbf{N})\ (x \in p_n)$. Protože pojmy „být přirozeným číslem“ a „být hladinou p_n“ jsou v tranzitivním modelu uzavřeném na množinové operace absolutní,[1] muselo by při platnosti schematu nahrazení platit $(\forall a \in p^u_\omega)\ (\exists n \in \mathbf{N})\ (a \in p_n)$. Protože však $p_\omega \neq p^u_\omega$, není v $\mathfrak{M}$ tvrzení $\mathbf{\Pi} = \mathbf{V}$ splněno, a schema nahrazení je tudíž porušeno.

   Jiný důkaz: Uvažujme predikát

$$
\begin{aligned}
R(x,n) \quad \equiv \quad & \mathrm{Nat}(n)\ \&\ (\exists f)\ (f \text{ je prostá funkce } \& \\
& \&\ \mathrm{Dom}(f) = n+1\ \&\ \langle 0,0\rangle \in f\ \& \\
& \&\ (\forall m \in n)\ (\forall z)\ (\langle m,z\rangle \in f \ \rightarrow\ \langle m+1,\{z\}\rangle \in f)\ \& \\
& \&\ \langle n,x\rangle \in f)
\end{aligned}
$$

   Predikát R lze zřejmě nadefinovat bez axiomu nahrazení a je v tranzitivním modelu uzavřeném na množinové operace absolutní. Snadno lze ukázat, že ke každému x existuje nejvýše jedno n takové, že $R(x,n)$, a naopak že pro každé přirozené číslo n existuje $x \in u$ takové, že $R(x,n)$. Platí $u \in p^u_\omega$, ale $\{y : (\exists x \in u)\ (R(x,y))\} = \omega \notin p^u_\omega$, schema nahrazení pro formuli $R(x,y)$ není tudíž splněno.

[1] Predikát „být hladinou p_n“ lze definovat jako:

$$p_n(x)\ \equiv\ (\exists y)\ (\mathrm{Nat}(n)\ \&\ \mathrm{Dom}(y) = n+1\ \&\ y''0 = 0\ \&\ (\forall m \in n)\ (y''m+1 = \mathrm{P}(y''m))\ \&\ x = y''n)$$

3 Nezávislost axiomů $\mathbf{AST}_{\mathbf{Set}}$

V následujících odstavcích prokážeme pomocí modelů v **ZF** nezávislost axiomů extenzionality, následníka, schematu indukce a ε-indukce na ostatních axiomech $\mathbf{AST}_{\mathbf{Set}}$ a naopak ukážeme závislost axiomu nuly na axiomu indukce (při jeho formulaci uvedené v 1.3).

3.1 Extenzionalita

Označme $\sigma = \{\omega\}$, $u = \{\sigma\}$. Jako model prokazující nezávislost axiomu extenzionality vezmeme tranzitivní model $\mathfrak{M}$ s nosičem $v = p^u_\omega$. Vyslovíme tři pomocná tvrzení:

Lemma 1: $(\forall a \in v)\ (\mathrm{Fin}(a))$

Důkaz: Indukcí dokážeme, že každá hladina p^u_n obsahuje pouze konečně mnoho konečných množin:

1. $p^u_0 = \{\sigma\}$ obsahuje jedinou množinu $\sigma = \{\omega\}$, která je konečná (jednoprvková).
2. Nechť p^u_n obsahuje pouze konečně mnoho konečných množin. Potom
   (a) $p^u_{n+1} = \mathrm{P}(p^u_n) \cup \{\sigma\}$ je rovněž konečná, neboť potence konečné množiny je konečná;
   (b) každý prvek $x \in p^u_{n+1} = \mathrm{P}(p^u_n) \cup \{\sigma\}$ je konečný, neboť buď $x = \sigma = \{\omega\}$, což je konečná množina, nebo $x \subseteq p^u_n$, která je konečná podle indukčního předpokladu. Tím je důkaz hotov.

Lemma 2: $(\forall a \in v)\ (a \notin \sigma)$

Důkaz: Podle definice $\sigma = \{\omega\}$ je $(\forall a)\ (a \in \sigma \ \equiv\ a = \omega)$, ale $\omega \notin v$, neboť v obsahuje podle lemmatu 1 pouze konečné množiny.

Lemma 3: $(\forall a \in v)\ (a \neq \sigma\ \rightarrow\ a \subseteq v)$

Důkaz: Pokud $a \neq \sigma\ \&\ a \in v$, pak podle definice v je $a \in p^u_n$ pro nějaké $n \geq 1$, tedy $a \subseteq p^u_{n-1} \subseteq v$.

Protože rovnost a náležení jsme ponechali absolutní, jsou v $\mathfrak{M}$ splněny axiomy rovnosti. Dokážeme nyní jednotlivé axiomy $\mathbf{AST}_{\mathbf{Set}} \div (\mathrm{ext})$:

1. Negace extenzionality. Dokážeme, že

$$\mathfrak{M} \models (\exists x, y)\ (x \neq y\ \&\ (\forall q)\ (q \in x\ \equiv\ q \in y))$$

To je podle definice splňování v modelu ekvivalentní tvrzení, že

$$(\exists a, b \in v)\ (a \neq b\ \&\ (\forall c \in v)\ (c \in a\ \equiv\ c \in b))$$

Toto tvrzení je splněno pro $a = 0$, $b = \sigma$:

(a) $0, \sigma \in v$, neboť $\sigma \in p^u_0$ podle definice a $0 \subseteq p^u_0$, tedy $0 \in p^u_1$.

(b) $\sigma \neq 0$, přitom však $(\forall c \in v)\ (c \notin 0)$, jelikož 0 je prázdná, a také $(\forall c \in v)\ (c \notin \sigma)$ podle lemmatu 2.

2. Axiom nuly. Podle definice splňování v modelu je

$$\mathfrak{M} \models (\mathrm{nul})\ \equiv\ (\exists c \in v)\ (\forall d \in v)\ (d \notin c),$$

což je splněno pro $c = 0 \in v$ (neboť 0 je prázdná) nebo pro $c = \sigma \in v$ (neboť σ nemá v modelu žádné prvky podle lemmatu 2).

3. Axiom následníka. Podle definice splňování v modelu je

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M} \models (\text{násl})\ \equiv \\ &\quad \equiv\ (\forall a, b \in v)\ (\exists c \in v)\ (\forall d \in v)\ (d \in c\ \equiv\ d \in a\ \vee\ d = b) \end{aligned}$$

Mějme libovolná $a, b \in p^u_\omega$ a vezměme $c = a \cup \{b\}$. Podle tvrzení uvedeného v oddílu 1.4 je $c = a \cup \{b\} \in p^u_\omega$. Přitom platí $d \in c\ \equiv\ d \in a\ \vee\ d = b$ dokonce pro každé d, tím spíše pro $d \in v$.

4. Indukce. Podle definice splňování v modelu je

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M} \models (\mathrm{ind}_\varphi)\ [\mathrm{e}]\ \equiv \\ \text{(I1)}\quad &\equiv\ (\forall a \in v)\ ((\forall d \in v)\ (d \notin a)\ \rightarrow\ \hat{\varphi}(a)) \\ \text{(I2)}\quad &\qquad \&\ (\forall a, b, c \in v)\ ((\hat{\varphi}(a)\ \&\ (\forall d \in v)\ (d \in c\ \equiv\ d \in a\ \vee\ d = b))\ \rightarrow \\ &\qquad\qquad \rightarrow\ \hat{\varphi}(c)) \\ \text{(I3)}\quad &\qquad \rightarrow\ (\forall a \in v)\ \hat{\varphi}(a) \end{aligned}$$

kde $\hat{\varphi}(e'(t))$ je formule základního jazyka teorie množin vyjadřující, že $\mathfrak{M} \models \varphi(t)\ [e']$, kde $e' = {}^{z\,y\,x}_{c\,b\,a}e$.

Toto tvrzení dokážeme sporem. Nechť je splněno (I1) a (I2) a nechť existuje $h \in v$ takové, že $\neg\,\hat{\varphi}(h)$. Pokud $h = 0$ nebo $h = \sigma$, pak podle (I1) je $\hat{\varphi}(h)$, jelikož $0, \sigma$ nemají ve v žádné prvky — spor.

Nechť tedy $h \in p^u_n$, $n \geq 1$, $h \neq 0$. Vezměme takové h nejmenší mohutnosti. Protože h je neprázdná, existuje nějaké $g \in h$; platí $g \in v$ (neboť $h \subset v$ podle lemmatu 3), a tedy také $\{g\} \in v$, $h - \{g\} \in v$ a $h = (h - \{g\}) \cup \{g\}$. Protože všechny množiny ve v jsou konečné, má $h - \{g\}$ menší mohutnost než h, a tedy podle předpokladu platí $\hat{\varphi}(h - \{q\})$. Dále zřejmě platí $(\forall d \in v)\ (d \in h\ \equiv\ d \in h - \{q\}\ \vee\ d = q)$, takže podle (I2) dostáváme $\hat{\varphi}(h)$ — spor.

5. ε-indukce. Podle definice splňování v modelu je

$$
\begin{array}{lll}
 & \mathfrak{M} \models (\mathrm{eps}_{\varphi})\ [\mathrm{e}] & \equiv \\
\text{(E1)} & \equiv & (\forall a \in v)\ [(\forall b \in v)\ (b \in a\ \rightarrow\ \hat{\varphi}(b))\ \rightarrow\ \hat{\varphi}(a)] \\
\text{(E2)} & & \rightarrow\ (\forall a \in v)\ (\hat{\varphi}(a))
\end{array}
$$

kde $\hat{\varphi}(e'(t))$ je formule základního jazyka teorie množin vyjadřující, že $\mathfrak{M} \models \varphi(t)\ [e']$, kde $e' = {}^{y\,x}_{b\,a}e$.

Toto tvrzení dokážeme sporem: Nechť platí (E1) a nechť pro nějaké $h \in v$ je $\neg\,\hat{\varphi}(h)$. Vezměme takové h na nejmenší hladině p^u_n. Jestliže $h = \sigma$, pak $\hat{\varphi}(h)$ podle (E1), neboť σ nemá ve v žádné prvky — spor.

Nechť tedy $h \in p^u_n$, $n \geq 1$. Potom $(\forall b \in h)\ (b \in p^u_{n-1})$, tedy podle předpokladu nejmenší hladiny je $(\forall b \in h)\ \hat{\varphi}(w)$. Pak ale podle (E1) platí $\hat{\varphi}(h)$ — spor.

Tím jsme dokončili důkaz všech axiomů $\mathbf{AST}_{\mathbf{Set}} \div (\mathrm{ext})$ v modelu $\mathfrak{M}$.

3.2 Nula

Při naší formulaci schematu indukce (viz oddíl 1.3)

$$
\begin{array}{lll}
\text{(ind)} & \mathbf{(1)} & (\forall x)\ ((\forall q)\ (q \notin x)\ \rightarrow\ \varphi(x))\ \ \& \\
 & \mathbf{(2)} & (\forall x, y)\ (\varphi(x)\ \rightarrow\ \varphi(x \cup \{y\})) \\
 & \rightarrow & (\forall x)\ (\varphi(x))
\end{array}
$$

je axiom prázdné množiny jeho důsledkem. Důkaz provedeme sporem.

Předpokládejme, že neexistuje žádná prázdná množina, tedy že $(\forall x)\ (\exists y)\ (y \in x)$. Použijme schema indukce pro libovolnou kontradiktorickou formuli $\varphi(x)$, například $x \neq x$. Protože je podle předpokladu každá množina neprázdná, je první indukční podmínka $(\forall q)\ (q \notin x)\ \rightarrow\ \varphi(x)$ splněna triviálně. Protože dále $x \neq x$ není splněno pro žádné x, je i druhá indukční podmínka $(\forall x, y)\ (\varphi(x)\ \rightarrow\ \ldots)$ splněna triviálně. Podle axiomu indukce pro formuli $x \neq x$ tedy platí $(\forall x)\ (x \neq x)$. Z předpokladu neprázdnosti univerza však vyplývá, že $(\exists x)\ (x = x)$ — spor.

3.3 Množinový následník

Modelem prokazujícím nezávislost axiomu množinového následníka je libovolný tranzitivní model p_n, tj. model $\mathfrak{M}_n = \langle p_n, \mathbf{Id} \cap (p_n)^2, \mathbf{E} \cap (p_n)^2 \rangle$, kde $n \geq 1$.[1] Dokážeme, že v libovolném z těchto modelů jsou splněny všechny axiomy teorie $\mathbf{AST}_{\mathbf{Set}} \div (\mathrm{násl})$.

[1] Nejjednodušším z těchto modelů je $\mathfrak{M}_1 = \langle \{0\}, \{\langle 0, 0 \rangle\}, 0 \rangle$, pro nějž jsou důkazy splňování většiny axiomů (zejména indukce a ε-indukce) trivializovány.

1. Protože rovnost a náležení jsme ponechali absolutní a množiny p_n jsou vesměs tranzitivní, jsou v každém z modelů $\mathfrak{M}_n$ splněny axiomy rovnosti a extenzionalita.

2. Axiom nuly je v $\mathfrak{M}_n$ splněn, protože v tranzitivních modelech je pojem prázdné množiny absolutní a $0 \in p_n$ pro všechna $n \geq 1$.

3. Platnost negace axiomu následníka v $\mathfrak{M}_n$ vyplývá z toho, že pojem následníka je v tranzitivních modelech absolutní a pro každé přirozené číslo n platí $n \in p_{n+1} - p_n$. Žádná z množin p_n není na operaci následníka uzavřena, neboť pro $x = y = n - 1 \in p_n$ je $x \cup \{y\} = n \notin p_n$, tedy podle tvrzení uvedených v oddílu 1.4 není v žádném $\mathfrak{M}_n$ axiom následníka splněn.

4. Schema indukce. Mějme libovolnou formuli $\varphi(x)$. Podle definice splňování v modelu je

$$
\begin{array}{lll}
 & & \mathfrak{M}_n \models (\mathrm{ind}_\varphi)\ [\mathrm{e}] \\
\text{(I1)} & \equiv & [(\forall a \in p_n)\ (a = 0\ \rightarrow\ \hat{\varphi}(a))\ \& \\
\text{(I2)} & & (\forall a, b, c \in p_n)\ (\hat{\varphi}(a)\ \&\ c = a \cup \{b\}\ \rightarrow\ \hat{\varphi}(z))]\ \rightarrow \\
\text{(I3)} & & (\forall a \in p_n)\ (\hat{\varphi}(a))
\end{array}
$$

   kde $\hat{\varphi}(e'(t))$ je formule základního jazyka teorie množin vyjadřující, že $\mathfrak{M}_n \models \varphi(t)\ [e']$, kde $e' = {}^{z\,y\,x}_{c\,b\,a}e$.

   Nechť platí (I1), (I2) a h je množina nejmenší mohutnosti v p_n, pro kterou neplatí $\hat{\varphi}(h)$.

   (a) Pokud $h = 0$, pak podle (I1) platí $\hat{\varphi}(h)$ — spor.

   (b) Pokud $h \neq 0$, pak $h = (h - \{s\}) \cup \{s\}$ pro nějaké $s \in h$, přičemž z definice p_n je zřejmé, že s i $h - \{s\}$ jsou prvky p_n. Mohutnost $h - \{s\}$ je menší než mohutnost h, tedy podle předpokladu minimality h platí $\hat{\varphi}(h - \{s\})$. Podle (I2) tudíž platí $\hat{\varphi}((h - \{s\}) \cup \{s\})$, neboli $\hat{\varphi}(h)$ — spor.

   Tím je platnost axiomu indukce pro formuli φ v modelu $\mathfrak{M}_n$ dokázána.

5. Schema ε-indukce dokážeme obecněji pro libovolný tranzitivní model $\mathfrak{M}_\alpha$ s nosičem p_α, kde $\alpha \in \mathbf{On}$, což využijeme v části 3.4. Mějme formuli $\varphi(x)$. Podle definice splňování v modelu platí

$$
\begin{array}{lll}
 & & \mathfrak{M}_\alpha \models (\mathrm{eps}_\varphi)\ [\mathrm{e}] \\
 & \equiv & (\forall a \in p_\alpha)\ [(\forall b \in p_\alpha)\ (b \in a\ \rightarrow\ \hat{\varphi}(b))\ \rightarrow\ \hat{\varphi}(a)]\ \rightarrow \\
 & & \quad \rightarrow\ (\forall a \in p_\alpha)\ (\hat{\varphi}(a)) \\
\text{(E1)} & \equiv & (\forall a \in p_\alpha)\ [(\forall b \in a)\ (\hat{\varphi}(b))\ \rightarrow\ \hat{\varphi}(a)]\ \rightarrow \\
\text{(E2)} & & \quad \rightarrow\ (\forall a \in p_\alpha)\ (\hat{\varphi}(a))
\end{array}
$$

   kde $\hat{\varphi}(e'(t))$ je opět formule základního jazyka teorie množin vyjadřující, že $\mathfrak{M}_n \models \varphi(t)\ [e']$, kde $e' = {}^{y\,x}_{b\,a}e$. Druhá z ekvivalencí je důsledkem tranzitivity p_α (množina $a \in p_\alpha$ má prvky *pouze* v p_α).

   Nechť platí (E1) a h je množina na nejnižší hladině p_β, $\beta < \alpha$, taková, že $\neg\,\hat{\varphi}(h)$. Protože $h \in p_\beta$, platí $(\forall s \in h)\ (s \in p_{\beta-1})$, a tedy podle předpokladu minimality β je $(\forall s \in h)\ (\hat{\varphi}(s))$. Podle (E1) pak ale také $\hat{\varphi}(h)$ — spor.

Tím je dokázáno, že $\mathfrak{M}_n$ je pro každé $n \geq 1$ modelem teorie $\mathbf{ZF_{Fin}} \div$ (násl) a axiom následníka je tudíž nezávislý na ostatních axiomech $\mathbf{ZF_{Fin}}$.

3.4 Schema indukce

Jako model prokazující nezávislost schematu indukce může sloužit každý tranzitivní model $\mathfrak{M}_\lambda$ s univerzem p_λ, kde λ je libovolný limitní ordinál větší než ω (nejjednodušseji tedy $p_{\omega\cdot 2}$). Dokážeme jednotlivé axiomy:

1. Každý z modelů $\mathfrak{M}_\lambda$ je tranzitivní, takže jsou v něm splněny axiomy rovnosti i extenzionality (viz oddíl 1.4). Protože $0 \in p_\lambda$, je splněn i axiom muly.
2. V tranzitivních modelech je pojem množinového následníka absolutní, stačí tedy ukázat uzavřenost p_λ vůči této operaci. Nechť $a \in p_\alpha$, $b \in p_\beta$, $\alpha, \beta < \lambda$. Potom $\{b\} \in p_{\beta+1}$, a tedy podle 1.4 je $a \cup \{b\} \in p_{\max(\alpha,\beta)+2}$, tedy $a \cup \{b\} \in p_\lambda$, což bylo dokázati.
3. Důkaz schematu ε-indukce jsme provedli v oddílu 3.3 (bod 5) obecně pro libovolný tranzitivní model p_α, $\alpha \in \mathbf{On}$.
4. Zbývá ukázat, že v modelech $\mathfrak{M}_\lambda$ je porušeno schema indukce. Vezměme jeho instanci pro formuli $\varphi(x) \equiv \mathrm{Fin}(x)$. Protože p_λ je uzavřené vůči potenci a podmnožinám, je pojem konečnosti množiny absolutní. Formule φ tudíž splňuje v modelu $\mathfrak{M}_\lambda$ předpoklady axiomu indukce, neboť platí $\mathrm{Fin}(0)\ \&\ ((\forall x, y \in p_\lambda)\ (\mathrm{Fin}(x) \rightarrow \mathrm{Fin}(x \cup \{y\})))$. Protože však $\omega \in p_\lambda\ \&\ \neg\ \mathrm{Fin}(\omega)$, je $\mathfrak{M}_\lambda \models \neg\ (\forall x)\ (\mathrm{Fin}(x))$, neboli
$$\mathfrak{M}_\lambda \models [\mathrm{Fin}(0)\ \&\ (\forall x, y)\ (\mathrm{Fin}(x) \rightarrow \mathrm{Fin}(x \cup \{y\}))]\ \&\ \neg\ (\forall x)\ (\mathrm{Fin}(x)),$$
tj. $\mathfrak{M}_\lambda \models \neg\,(\mathrm{ind}_{\mathrm{Fin}(x)})$, což bylo dokázati.

3.5 Schema ε-indukce

Nechť $u \notin p_\omega$, například $u = \{\omega\}$. Definujme množiny

$$\left.\begin{array}{rcl} p'_0 & = & \{u\} \\ p'_{n+1} & = & \mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{m\leq n} p'_m\right) - \{\{u\}\} \end{array}\right\} \quad v = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} p'_n$$

a relace

$$\begin{array}{rcl} r_= & = & \mathbf{Id} \cap v^2 \\ r_\in & = & \{\langle u, u\rangle\} \cup [\mathbf{E} \cap (v - \{u\})^2] \end{array}$$

Za model v $\mathbf{ZF}$ prokazující nezávislost schematu ε-indukce vezmeme $\mathfrak{M} = \langle v, r_=, r_\in\rangle$. Vyslovíme nejprve několik lemmat:

Lemma 1: Pro všechna $a, c \in v$ platí:

$$\begin{array}{lcl} a \neq u & \to & (\langle c, a\rangle \in r_\in \ \equiv \ c \in a) \\ a = u & \to & (\langle c, a\rangle \in r_\in \ \equiv \ c = u) \end{array}$$

Důkaz je zřejmý z definice $r_\in$.

Lemma 2: $(\forall a \in v)\ (a \neq u \ \to \ a \subset v)$

Důkaz: Jestliže $a \neq u$, pak podle definice v je $a \in p'_n$ pro nějaké $n \geq 1$. Podle definice p'_n je pak $a \subseteq \bigcup_{m<n} p'_n \subset v$.

Lemma 3 (splňování prázdnosti v $\mathfrak{M}$):

$$\mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \notin x)\ [e] \ \equiv \ e(x) = 0$$

Důkaz: Pro $e(x) = u$ platí ekvivalence triviálně. Pro $e(x) \neq u$ je

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \notin x)\ [e] & \equiv & (\forall c \in v)\ (\langle c, e(x)\rangle \notin r_\in) & \equiv \\ & \equiv & (\forall c \in v)\ (c \notin e(x)) & \equiv \\ & \equiv & (\forall c)\ (c \notin e(x)) & \equiv \\ & \equiv & e(x) = 0 & \end{array}$$

První ekvivalence plyne z definice splňování v $\mathfrak{M}$, druhá z lemmatu 1, třetí z lemmatu 2 $(e(x) \subset v)$ a čtvrtá z extenzionality.

Lemma 4 (překlad pojmu následník):

$$\mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \in z \ \equiv \ q \in x \ \vee \ q = y)\ [e] \ \equiv \ e(z) = N(e(x), e(y))$$

kde N je funkce zadaná následující tabulkou (hvězdičkou jsou vyznačeny případy, kdy $e(z) \neq e(x) \cup \{e(y)\}$):

$N(e(x), e(y))$	$e(y) = 0$	$e(y) = u$	$e(y) \notin \{0, u\}$
$e(x) = 0$	$\{0\}$	u *	$\{e(y)\}$
$e(x) = u$	$\{0, u\}$ *	u *	$\{u, e(y)\}$ *
$e(x) \notin \{0, u\}$	$e(x) \cup \{0\}$	$e(x) \cup \{u\}$	$e(x) \cup \{e(y)\}$

Důkaz: Dokážeme postupně následující dvě tvrzení, která zahrnují všechny případy:

1. Pro $e(z) = u$ platí $\mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \in z \ \equiv \ q \in x \ \vee \ q = y)\ [e]$, právě když $e(x) = e(y) = u$ nebo $e(x) = 0, e(y) = u$.
2. Pro $e(z) \neq u$ platí $\mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \in z \ \equiv \ q \in x \ \vee \ q = y)\ [e]$, právě když $e(x) = u, e(y) \neq u, e(z) = \{u, e(y)\}$ nebo $e(x) \notin \{0, u\}, e(z) = e(x) \cup \{e(y)\}$.

1. Nechť tedy $e(z) = u$. Potom podle lemmatu 1 je

$$\begin{array}{lrll} & & \mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \in z\ \equiv\ q \in x\ \vee\ q = y)\ [e] & \equiv \\ & \equiv & (\forall c \in v)\ (\langle c, e(z)\rangle \in r_\in\ \equiv\ \langle c, e(x)\rangle \in r_\in\ \vee\ c = e(y)) & \equiv \\ (1) & \equiv & (\forall c \in v)\ (c = u\ \equiv\ \langle c, e(x)\rangle \in r_\in\ \vee\ c = e(y)) & \end{array}$$

Podmínka (1) je zřejmě splněna pro dvojice $e(x) = e(y) = u$ a $e(x) = 0, e(y) = u$; ukážeme, že pro jiné dvojice splněna není:

Pokud $e(y) \neq u$, pak (1) neplatí zřejmě. Pokud $e(x) \notin \{0, u\}$, pak podle lemmatu 1 nabývá (1) tvaru

$$(\forall c \in v)\ (c = u\ \equiv\ c \in e(x)\ \vee\ c = u)$$

Protože $e(x) \neq 0$ a $\{u\} \notin v$, má $e(x)$ nějaký prvek různý od u a (1) rovněž není splněno.

2. Nechť nyní $e(z) \neq u$. Potom z definice splňování v $\mathfrak{M}$ a tranzitivity $v - \{u\}$ dostáváme

$$\begin{array}{lrll} & & \mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \in z\ \equiv\ q \in x\ \vee\ q = y)\ [e] & \equiv \\ & \equiv & (\forall c \in v)\ (c \in e(z)\ \equiv\ \langle c, e(x)\rangle \in r_\in\ \vee\ c = e(y)) & \equiv \\ (2) & \equiv & (\forall c)\ (c \in e(z)\ \equiv\ \langle c, e(x)\rangle \in r_\in\ \vee\ c = e(y))) & \end{array}$$

Jestliže $e(x) = u$, nabývá (2) tvaru

$$\begin{array}{rll} & (\forall c)\ (c \in e(z)\ \equiv\ c = u\ \vee\ c = e(y)) & \equiv \\ \equiv & e(z) = \{u, e(y)\} & \end{array}$$

Právě pro $e(y) = u$ je ale $\{u, e(y)\} = \{u\} \notin v$, tedy při $e(x) = e(y) = u$ není (2) splněno pro žádné $e(z) \neq u$.

Jestliže naopak $e(x) \neq u$, nabývá (2) tvaru

$$\begin{array}{rll} & (\forall c)\ (c \in e(z)\ \equiv\ c \in e(x)\ \vee\ c = e(y)) & \equiv \\ \equiv & e(z) = e(x) \cup \{e(y)\} & \end{array}$$

Právě pro $e(x) = 0, e(y) = u$ je ovšem $e(x) \cup \{e(y)\} = \{u\} \notin v$, tedy při $e(x) = 0, e(y) = u$ není (2) splněno pro žádné $e(z) \neq u$.

Přistoupíme nyní k důkazu jednotlivých axiomů:

1. Axiom extenzionality. Podle definice splňování v modelu $\mathfrak{M}$ je

$$\begin{array}{rl} & \mathfrak{M} \models (\mathrm{ext})\ \equiv \\ \equiv & (\forall a, b \in v)\ (a = b\ \equiv\ (\forall c \in v)\ (\langle c, a\rangle \in r_\in\ \equiv\ \langle c, b\rangle \in r_\in)) \end{array}$$

   - Pokud $a = u$, $b = u$, je (1) zřejmě splněno.
   - Pokud $a = u$, $b \neq u$, je $b \neq \{u\}$ podle definice v, $b \subset v$ podle lemmatu 2. Pokud $b = 0$, pak je podmínka (1) splněna, jinak má b nějaký prvek $c \neq u$ a podmínka (1) je splněna rovněž, neboť jediné c takové, že $\langle c, a\rangle \in r_\in$ je $c = u$.

- Pokud $a, b \neq u$, potom $a, b \subset v$ podle lemmatu 2 a vztah (1) vyplývá z lemmatu 1 a extenzionality.

2. Splnění axiomu nuly vyplývá z lemmatu 3.
3. Axiom následníka vyplývá z lemmatu 4 — pro všechny případy je $N(e(x), e(y)) \in v$.
4. Schema indukce. Mějme libovolnou formuli φ. Podle definice splňování v $\mathfrak{M}$ a již dokázaných axiomů je:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \mathfrak{M} \models (\mathrm{ind}_\varphi)\ [\mathrm{e}] \ \equiv \\
 & \equiv & (\forall a \in v)\ (a = 0 \ \rightarrow\ \mathfrak{M} \models \varphi(x)\ [{}^x_a e]) \\
 & & \ \& \ (\forall a, b, c \in v) \\
 & & \qquad (\mathfrak{M} \models \varphi(x)\ [{}^x_a e]\ \&\ c = N(a,b) \ \rightarrow\ \mathfrak{M} \models \varphi(z)\ [{}^z_c e]) \\
 & & \rightarrow\ (\forall a \in v)\ (\mathfrak{M} \models \varphi(x)\ [{}^x_a e]) \ \equiv \\
\text{(I1')} & \equiv & \hat{\varphi}(0) \\
\text{(I2')} & & \ \&\ (\forall a, b, c \in v)\ (\hat{\varphi}(a)\ \&\ c = N(a,b) \ \rightarrow\ \hat{\varphi}(c)) \\
 & & \rightarrow\ (\forall a \in v)\ (\hat{\varphi}(a))
\end{array}
$$

kde $\hat{\varphi}(e'(t))$ je formule základního jazyka teorie množin vyjadřující, že $\mathfrak{M} \models \varphi(t)\ [e']$.

Z lemmatu 4 a podmínek (I1'), (I2') pro každou nejvýše dvouprvkovou množinu $r \in v$ vyplývá $\hat{\varphi}(r)$:

- $\hat{\varphi}(0)$ podle (I1'), odtud $\hat{\varphi}(u)$ podle (I2'), neboť $u = N(0, u)$,
- $\hat{\varphi}(\{x\})$ pro $x \in v$ podle (I2'), neboť $\{x\} = N(0, x)$,
- $\hat{\varphi}(\{0, u\})$ podle (I2'), neboť $\{0, u\} = N(u, 0)$,
- $\hat{\varphi}(\{x, y\})$ pro $x \in v - \{0, u\}$, $y \in v$ podle (I2'), neboť $\{x, y\} = N(\{x\}, y)$.

Vezměme $h \in v$ nejmenší mohutnosti takové, že splňuje (I1'), (I2'), a přitom $\neg\,\hat{\varphi}(h)$. Jelikož h je aspoň trojprvková, obsahuje nějaký prvek $g \notin \{0, u\}$ a (podle lemmatu 4) platí $h = N(h - \{g\}, g)$. Protože ale $h - \{g\}$ má menší mohutnost než h (všechny množiny ve v jsou konečné), platí $\hat{\varphi}(h - \{g\})$, a tedy podle (I2') také $\hat{\varphi}(h)$ — spor.

5. Ukážeme, že v $\mathfrak{M}$ není splněno schema ε-indukce pro formuli $x \notin x$:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \mathfrak{M} \models (\mathrm{eps}_{x \notin x}) \ \equiv \\
\text{(E')} & \equiv & (\forall a \in v)\ [(\forall b \in v)\ (\langle b, a\rangle \in r_\in \ \rightarrow\ \langle b, b\rangle \notin r_\in) \ \rightarrow\ \langle a, a\rangle \notin r_\in] \\
 & & \rightarrow\ (\forall a \in v)\ (\langle a, a\rangle \notin r_\in)
\end{array}
$$

Podmínka (E') je splněna pro každé $a \in v$:

- Pro $a = u$ není splněna podmínka $\langle b, u\rangle \in r_\in \ \rightarrow\ \langle b, b\rangle \notin r_\in$ pro $b = u$, takže (E') platí triviálně.
- Pokud $a \neq u$, potom $\langle a, a\rangle \notin r_\in$ právě když $a \notin a$, což je splněno pro každé $a \in v$ (neboť $v \subset \mathbf{\Pi}^{\{u\}}$), takže podmínka (E') je rovněž splněna.

Přitom ale $\langle u, u\rangle \in r_\in$, neplatí tedy $(\forall a \in v)\ (\langle a, a\rangle \notin r_\in)$ a tudíž $\mathfrak{M}$ nesplňuje schema ε-indukce pro formuli $x \notin x$.

Tím je dokončen důkaz nezávislosti schematu ε-indukce na ostatních axiomech $\mathbf{AST_{Set}}$.

4 Nezávislost axiomů $\mathbf{ZF_{Fin}}$

Následující odstavce ukazují modely v **ZF** prokazující nezávislost axiomů extenzionality, konečna, regularity a potence. Z nemožnosti konečné axiomatizace $\mathbf{ZF_{Fin}}$ vyplývá nezávislost schematu nahrazení. Axiomy nuly a sjednocení jsou naopak v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ závislé na ostatních axiomech.

4.1 Extenzionalita

Model prokazující nezávislost extenzionality v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ je týž jako pro $\mathbf{AST_{Set}}$ — viz oddíl 3.1, kde jsme již dokázali, že jsou v něm splněny axiomy rovnosti a nuly a že naopak není splněn axiom extenzionality. Dokážeme nyní platnost zbývajících axiomů $\mathbf{ZF_{Fin}}$ v $\mathfrak{M}$. Budeme přitom využívat lemmata 1–3 dokázaná v části 3.1 a další pomocná tvrzení, která dokážeme nyní:

Lemma 4 (splnění predikátu inkluze v $\mathfrak{M}$):

$$\mathfrak{M} \models x \subseteq y\ [e] \;\equiv\; e(x) \subseteq e(y) \;\vee\; e(x) = \sigma$$

Důkaz: Platí následující ekvivalence:

$$\begin{array}{lll}
 & & \mathfrak{M} \models x \subseteq y\ [e] \qquad \equiv \\
 & \equiv & \mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \in x \;\rightarrow\; q \in y)\ [e] \qquad \equiv \\
(1) & \equiv & (\forall c \in v)\ (c \in e(x) \;\rightarrow\; c \in e(y)) \qquad \equiv \\
(2) & \equiv & e(x) \subseteq e(y) \;\vee\; e(x) = \sigma
\end{array}$$

První ekvivalence je definicí inkluze, druhá definicí splňování v modelu. Třetí ekvivalenci dokážeme postupně:

(2) $\rightarrow$ (1): Jestliže $e(x) = \sigma$, potom je (1) splněno, neboť σ nemá ve v žádné prvky (podle lemmatu 3 v části 3.1); jestliže $e(x) \subseteq e(y)$, potom (1) platí pro každé c, tím spíše pro $c \in v$.

($\neg$2) $\rightarrow$ ($\neg$1): Pokud $e(x) \neq \sigma$, pak $e(x) \subseteq v$ podle lemmatu 3 v části 3.1, tedy $e(x) \not\subseteq e(y)$ znamená, že $(\exists c \in v)\ (c \in x \;\&\; c \notin e(y))$, QED.

Lemma 5 (prázdnost v $\mathfrak{M}$):

$$\mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \notin z)\ [e] \;\equiv\; e(z) = 0 \;\vee\; e(z) = \sigma$$

Důkaz: Množina σ nemá ve v žádné prvky podle lemmatu 2, libovolná jiná je podle lemmatu 3 částí v, a tedy nemá žádný prvek ve v, právě když je prázdná.

Lemma 6 (splnění predikátu tranzitivity v $\mathfrak{M}$):

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{Trans}(x)\ [e] \ \equiv\ e(x) = \sigma \ \vee\ (\forall c \in e(x))\ (c = \sigma \ \vee\ c \subseteq e(x))$$

Důkaz: Podle definice splňování v $\mathfrak{M}$ a lemmatu 4 platí následující ekvivalence:

$$\begin{array}{lll} & \mathfrak{M} \models \mathrm{Trans}(x)\ [e] & \equiv \\ \equiv & \mathfrak{M} \models (\forall q)\ (q \in x \ \to\ q \subseteq x)\ [e] & \equiv \\ \equiv & (\forall c \in v)\ (c \in e(x) \ \to\ (c = \sigma \ \vee\ c \subseteq e(x))) & \equiv \\ \equiv & e(x) = \sigma \ \vee\ (\forall c \in e(x))\ (c = \sigma \ \vee\ c \subseteq e(x)) & \end{array}$$

Axiom potence

Podle definice splňování v $\mathfrak{M}$ a lemmatu 4 je:

$$\begin{array}{lll} & \mathfrak{M} \models (\mathrm{pot})\ [e] & \equiv \\ \equiv & (\forall a \in v)\ (\exists b \in v)\ (\forall c \in v)\ (c \in b \ \equiv\ \mathfrak{M} \models q \subseteq x\ [e']) & \equiv \\ \equiv & (\forall a \in v)\ (\exists b \in v)\ (\forall c \in v)\ (c \in b \ \equiv\ c \subseteq a \ \vee\ c = \sigma) & \end{array}$$

kde $e' = {}^{q\ z\ x}_{c\ b\ a}e$. Mějme tedy $a \in v$ a vezměme $b = \mathrm{P}(a) \cup \{\sigma\}$; podle 1.4 je $b \in p^u_{\tau^u(a)+1}$, tj. $b \in v$ a podmínka $(c \in b \ \equiv\ c \subseteq a \ \vee\ c = \sigma)$ platí pro všechna c, tím spíše pro $c \in v$. QED

Sjednocení

Podle definice splňování v modelu je

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{M} \models (\mathrm{sjedn}) \ \equiv \\ (1) & \quad \equiv\ (\forall a \in v)\ (\exists b \in v)\ (\forall c \in v)\ (c \in b \ \equiv\ (\exists d \in v)\ (c \in d\ \&\ d \in a)) \end{array}$$

Jestliže $a = \sigma$, pak vyhovuje $b = 0$ nebo $b = \sigma$ (protože nemají ve v žádné prvky). Jestliže naopak $a \neq \sigma$, potom $a \subseteq v$ podle lemmatu 3 ve 3.1. Vezměme $b = \bigcup(a - \{\sigma\})$. Platí:

$$\begin{array}{rcl} c \in \bigcup(a - \{\sigma\}) & \equiv & (\exists d)\ (d \in a\ \&\ d \neq \sigma\ \&\ c \in d) \ \equiv \\ & \equiv & (\exists d \in v)\ (d \in a\ \&\ d \neq \sigma\ \&\ c \in d) \ \equiv \\ & \equiv & (\exists d \in v)\ (c \in d\ \&\ d \in a) \end{array}$$

Druhá ekvivalence vyplývá z toho, že $a \subseteq v$ a třetí z toho, že σ nemá ve v žádné prvky. Přitom $b \in v$, neboť je-li $a \in p^u_n$, je $\bigcup(a - \{\sigma\}) \in p^u_{n-1}$; toto $\bigcup(a - \{\sigma\})$ je tedy hledaným b v (1) a axiom sjednocení je tudíž v $\mathfrak{M}$ splněn.

Konečnost

Podle definice splňování v modelu a lemmatu 4 je

$$
\begin{array}{lll}
 & \mathfrak{M} \models (\text{fin}) \ \equiv & \\
 & \equiv & (\forall a, b \in v) \\
\text{(K1)} & & [((\forall d \in v)\ (d \in b \ \rightarrow\ (d \subseteq a \ \vee \ d = \sigma))\ \& \\
\text{(K2)} & & \ \&\ (\exists h \in v)\ (h \in b)) \ \rightarrow \\
 & & \ \rightarrow\ (\exists c \in v)\ (c \in b\ \&\ (\forall d \in v)\ [d \in b \ \rightarrow \\
 & & \quad \rightarrow\ ((\exists s \in v)\ (s \in d\ \&\ s \notin c) \ \rightarrow\ (\exists t \in v)\ (t \in c\ \&\ t \notin d))])]
\end{array}
$$

Podmínka neprázdnosti (K2) v antecedentu vylučuje $b = 0$ a $b = \sigma$, tedy podle lemmatu 3 je $b \subseteq v$. Podmínku (K1) lze tudíž přepsat:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(K1)} & \equiv & (\forall d \in b)\ (d \subseteq a \ \vee \ d = \sigma) \ \equiv \\
 & \equiv & b \subseteq \mathrm{P}(a) \cup \{\sigma\}
\end{array}
$$

Stačí tedy najít $c \in b$ (pak už $c \in v$), že platí

$$
(1) \qquad (\forall d \in b)\ ((\exists s \in v)\ (s \in d\ \&\ s \notin c) \ \rightarrow\ (\exists t \in v)\ (t \in c\ \&\ t \notin d))
$$

Rozlišíme dva případy:

1. $\sigma \notin b$. Protože a je konečná, má $b \subseteq \mathrm{P}(a)$ maximální prvek vůči inkluzi. Označme tento prvek c; dokážeme, že splňuje podmínku (1). Vezměme libovolné $d \in b$. Jelikož $\sigma \notin b$, je $c, d \neq \sigma$, tedy podle lemmatu 3 je $c, d \subseteq v$. Podmínka (1) se tedy redukuje na $(\exists s \in d)\ (s \notin c) \ \rightarrow\ (\exists t \in c)\ (t \notin d)$, což platí podle předpokladu maximality c v b.

2. $\sigma \in b$. Pokud $b = \{\sigma\}$, je podmínka splněna pro $c = \sigma$. Pro $b \neq \{\sigma\}$ má neprázdná množina $b - \{\sigma\} \subseteq \mathrm{P}(a)$ maximální prvek c. Toto c splňuje podmínku (1) vůči každému $d \in b - \{\sigma\}$ (důkaz je stejný jako v předchozím bodě) a pro $d = \sigma$ je podmínka splněna rovněž, neboť σ nemá ve v žádné prvky. QED

Regularita

Podle definice splňování v $\mathfrak{M}$ a lemmatu 5 dostáváme:

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathfrak{M} \models (\forall x)\ [(\forall w)\ (w \notin x) \ \rightarrow\ (\exists q)\ (w \in q \ \rightarrow\ w \notin x)] \ \equiv \\
\text{(1)} & \equiv\ (\forall a \in v - \{0, \sigma\})\ (\exists b \in v)\ (b \in a\ \&\ (\forall c \in v)\ (c \in b \ \rightarrow\ c \notin a))
\end{array}
$$

Nechť tedy $a \in v - \{0, \sigma\}$. Vezměme prvek $h \in a$ na nejmenší hladině p'_n. Protože podle lemmatu 3 je $a \subseteq v$, je $h \in v$. Jestliže $h \neq \sigma$, má h podle předpokladu minimality p'_n prvky pouze ve $v - a$; jestliže $h = \sigma$, potom nemá vůbec žádný prvek ve v. V obou případech je h hledaným prvkem b a tvrzení (1) je splněno.

Dokážeme nyní druhou podmínku axiomu regularity. Podle definice splňování v $\mathfrak{M}$ a lemmatu 6 platí:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{M} \models (\forall x)\ (\exists z)\ (x \subseteq z\ \&\ \mathrm{Trans}(z))\ [e] \quad \equiv \quad (\forall a \in v)\ (\exists b \in v) \\
(2) \qquad &\qquad [(a \subseteq b\ \vee\ a = \sigma)\ \&\ (b = \sigma\ \vee\ (\forall c \in b)\ (c = \sigma\ \vee\ c \subseteq b))]
\end{aligned}
$$

Jestliže $a = \sigma$, je podmínka (2) splněna pro $b = \sigma$. Podle definice hladin p'_n pro libovolné jiné $a \in p'_n$, $n \geq 1$ platí $a \subseteq p'_{n-1}$ a $(\forall c \in p_{n-1})\ (c = \sigma\ \vee\ c \subseteq p'_{n-1})$, tvrzení (2) je tedy splněno pro $b = p'_{n-1}$.

Nahrazení

Nechť $\varphi(r, s)$ je libovolná formule, která neobsahuje volné proměnné t, z. Podle definice splňování v $\mathfrak{M}$ dostáváme:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{M} \models (\forall r, s, t)\ (\varphi(r,s)\ \&\ \varphi(r,t)\ \rightarrow\ s = t)\ \rightarrow \\
&\qquad \rightarrow\ (\forall x)\ (\exists z)\ (\forall q)\ (q \in z\ \equiv\ (\exists r)\ (r \in x\ \&\ \varphi(r,q)))\ \equiv \\
(1) \qquad &\equiv\ (\forall h, i, j \in v)\ (\hat{\varphi}(h,i)\ \&\ \hat{\varphi}(h,j)\ \rightarrow\ i = j)\ \rightarrow \\
(2) \qquad &\qquad \rightarrow\ (\forall a \in v)\ (\exists b \in v)\ (\forall c \in v)\ (c \in b\ \equiv\ (\exists d \in v)\ (d \in a\ \&\ \hat{\varphi}(d,c)))
\end{aligned}
$$

kde $\hat{\varphi}(e'(f), e'(g))$ je formule základního jazyka teorie množin vyjadřující skutečnost, že $\mathfrak{M} \models \varphi(f,g)\ [e']$, přičemž $e' = \genfrac{}{}{0pt}{}{r\,s\,t\,x\,z\,q}{h\,i\,j\,a\,b\,c}e$.

Chceme nyní najít ke každému $a \in v$ nějaké $b \in v$, které splňuje podmínku (2). Pro $a = \sigma$ je takovým b nula nebo σ, které nemají ve v žádné prvky.

Mějme tedy $a \in v$, $a \neq \sigma$. Podmínka (1) zajišťuje, že $\hat{\varphi}$ splňuje jednoznačnost obrazů na v. Formule $\psi(h,i) \stackrel{\mathrm{df}}{\equiv} \hat{\varphi}(h,i)\ \&\ h \in v\ \&\ i \in v$ tedy splňuje podmínku jednoznačnosti obrazu pro *každé* h. Podle lemmatu 3 je $a \subseteq v$ a podle axiomu nahrazení pro formuli ψ tudíž existuje b tak, že

$$
\begin{aligned}
&\quad (\forall c)\ (c \in b\ \equiv\ (\exists d)\ (d \in a\ \&\ \psi(d,c))) && \equiv \\
&\equiv\ (\forall c)\ (c \in b\ \equiv\ (\exists d)\ (d \in a\ \&\ \hat{\varphi}(d,c)\ \&\ d \in v\ \&\ c \in v)) && \equiv \\
(3) \qquad &\equiv\ (\forall c)\ (c \in b\ \equiv\ c \in v\ \&\ (\exists d \in v)\ (d \in a\ \&\ \hat{\varphi}(d,c)))
\end{aligned}
$$

Podle (3) je $b \subseteq v$, tedy $b \subseteq p_n$ pro nějaké n (neboť b je konečná podle lemmatu 1), tedy $b \in p_{n+1}$, a tedy $b \in v$. Toto b tudíž v důsledku (3) splňuje podmínku (2) a důkaz je hotov. Tím je zároveň dokončen důkaz toho, že $\mathfrak{M}$ je modelem teorie $\mathbf{ZF_{Fin}} \div (\mathrm{ext})$.

4.2 Nula

Axiom nuly je v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ stejně jako v **ZF** závislý na schematu vydělení (které je důsledkem schematu nahrazení). Prázdnou množinu lze vydělit jako podmnožinu kterékoli množiny libovolnou kontradiktorickou formulí $\varphi(v)$.

4.3 Sjednocení

Axiom sjednocení je v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ závislý na ostatních axiomech. Dokážeme postupně existenci množinového následníka (tj. sjednocení s jednoprvkovou množinou), sjednocení dvojice množin a konečně sjenocení libovolné množiny.

Existence následníka

Chceme dokázat:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists z)\ (\forall q)\ (q \in z\ \equiv\ q \in x\ \vee\ q = y)$$

Vezměme libovolné množiny x, y. Sestrojíme formuli, která bude každému singletonu $\{z\} \in \mathrm{P}(x)$ přiřazovat jeho jediný prvek z a každé jiné množině z $\mathrm{P}(x)$ přiřazovat y; množinám mimo potenci x nebude přiřazovat žádný prvek. Taková formule zjevně splňuje podmínku axiomu nahrazení, neboť každé množině přiřazuje nejvýše jeden „obraz". Požadované vlastnosti má například formule:

$$\begin{aligned}\varphi(u,v)\quad \equiv\quad & u \subseteq x\ \ \&\ \ [(v \in x\ \&\ (\forall q)\ (q \in u\ \equiv\ q = v))\ \vee \\ & \vee\ (v = y\ \&\ \neg\ (\exists z)\ (q \in u\ \equiv\ q = z))]\end{aligned}$$

Podle axiomu nahrazení existuje množina $a = \{v;\ u \in \mathrm{P}(x)\ \&\ \varphi(u,v)\}$, která je hledaným následníkem:

1. zjevně $\varphi(u,v)\ \rightarrow\ v \in x\ \vee\ v = y$ (viz tvar formule φ),
2. $y \in a$, neboť $0 \subseteq x$ není singleton, tedy $\varphi(0,y)$,
3. libovolný prvek $z \in x$ náleží do a, neboť je přiřazen singletonu $\{z\} \in \mathrm{P}(x)$.

Množina a je tedy hledaným následníkem množin x a y.

Sjednocení dvojice množin

Chceme dokázat:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists z)\ (\forall q)\ (q \in z\ \equiv\ q \in x\ \vee\ q \in y)$$

Vezměme libovolné množiny x, y. Uvažujme množinu

$$a \ = \{y' \subseteq y;\ (\exists z)\ (\forall q)\ (q \in z \ \equiv \ q \in x \ \vee \ q \in y)\} \ \subseteq \ \mathrm{P}(y)$$

tj. množinu těch částí y, pro které existuje jejich sjednocení s x (tato množina existuje podle axiomu vydělení a potence). Množina a má (podle axiomu konečna aplikovaného na y) maximální prvek vůči inkluzi, který označíme b. Pokud $b = y$, pak sjednocení množin x a y existuje, neboť $b \in a$. V opačném případě dospějeme ke sporu: vezměme prvek $y_0 \in y - b$; podle již dokázané existence sjednocení s jednoprvkovou množinou umíme ke sjednocení množin x a b tento prvek přidat, což je spor s maximalitou množiny b.

Sjednocení libovolné množiny

Chceme dokázat:

$$(\forall x)\ (\exists z)\ (\forall q)\ (q \in z \ \equiv \ (\exists w)\ (q \in w \ \&\ w \in x))$$

Postup je podobný jako v předchozím případě. Vezměme libovolnou množinu x. Uvažujme množinu

$$a \ = \{x' \subseteq x;\ (\exists z)\ (\forall q)\ (q \in z \ \equiv \ (\exists w)\ (q \in w \ \&\ w \in x))\} \ \subseteq \ \mathrm{P}(x)$$

tj. množinu těch $x' \subseteq x$, jejichž sjednocení existuje. Tato množina má maximální prvek vůči inkluzi (neboť množina x je konečná). Pokud $b = x$, pak sjednocení množiny x existuje. V opačném případě dospějeme ke sporu: vezměme libovolnou množinu $x_0 \in x - b$; podle již dokázané existence sjednocení dvojice množin umíme ke sjednocení množiny b tuto množinu přisjednotit, což je spor s maximalitou množiny b.

Tím je axiom sjednocení dokázán z ostatních axiomů $\mathbf{ZF_{Fin}}$.

4.4 Konečnost

Teorie $\mathbf{ZF_{Fin}}$ s negací axiomu konečna je v podstatě teorií $\mathbf{ZF}$. Jediný rozdíl je ten, že axiom nekonečna bývá v teorii $\mathbf{ZF}$ obvykle formulován v podobě „existuje induktivní množina“, nikoli „existuje množina, která je nekonečná ve smyslu Tarského“. Protože však induktivní množina *je* nekonečná podle Tarského, jsou v teorii $\mathbf{ZF}$ splněny všechny axiomy teorie $\mathbf{ZF_{Fin}} \div$ (fin). Triviální interpretace * teorie $\mathbf{ZF_{Fin}} \div$ (fin) v teorii $\mathbf{ZF}$, kdy x^* interpretujeme jako $x \in \mathbf{V}$ a predikáty rovnosti a náležení ponecháme absolutní, tedy prokazuje její bezespornost (vůči $\mathbf{ZF}$), a tedy i nezávislost axiomu konečna na ostatních axiomech.

4.5 Regularita

Jako model prokazující nezávislost axiomu regularity v axiomatice $\mathbf{ZF_{Fin}}$ slouží model $\mathfrak{M}$ popsaný v oddílu 3.5. Jak jsme tam ukázali, tento model splňuje všechny axiomy $\mathbf{AST_{Set}}$ s výjimkou případů schematu ε-indukce. Ve [V] je ukázáno, že všechny axiomy $\mathbf{ZF_{Fin}}$ vyplývají z axiomů $\mathbf{AST_{Set}}$, přičemž schema ε-indukce je použito pouze při důkazu axiomu regularity. Z toho vyplývá, že všechny axiomy teorie $\mathbf{ZF_{Fin}}$ – (reg) jsou v $\mathfrak{M}$ splněny. Dokážeme ještě, že v $\mathfrak{M}$ je splněna negace axiomu regularity:

Důsledkem axiomu regularity je, že žádná množina není svým vlastním prvkem. Protože však $\langle u, u\rangle \in r_\in$, je $\mathfrak{M} \models (\exists x)\ (x \in x)$; proto $\mathfrak{M} \models \neg\,(\mathrm{reg})$. QED

4.6 Potence

Jako model prokazující nezávislost axiomu potence vezmeme tranzitivní model p_1, tj. model $\mathfrak{M}_1$ s nosičem $\{0\}$ a absolutní rovností i náležením.[1] Dokážeme jednotlivé axiomy:

1. Protože se jedná o tranzitivní model, jsou splněny axiomy rovnosti a extenzionalita.
2. Axiom nuly je splněn, neboť $\mathfrak{M}_1$ je tranzitivní a $0 \in p_1$.
3. Sjednocení (v tranzitivních modelech absolutní): jediná množina v p_1 je 0 a $\bigcup 0 = 0 \in p_1$, axiom sjednocení je tedy v $\mathfrak{M}_1$ splněn.
4. Konečnost. Pojem neprázdné podmnožiny je v tranzitivních modelech absolutní. Protože 0 nemá žádnou neprázdnou podmnožinu, je v $\mathfrak{M}_1$ konečná triviálně; axiom konečna je tudíž splněn.
5. Regularita. První podmínka axiomu je splněna triviálně, neboť v modelu žádná neprázdná množina není. Predikát „být tranzitivní" je v tranzitivním modelu absolutní, $0 \subseteq 0\ \&\ \mathrm{Trans}(0)$, tedy i druhá část axiomu regularity je splněna.
6. Nahrazení. Splnění axiomu nahrazení pro formuli φ v $\mathfrak{M}_1$ je podle definice splňování v modelu ekvivalentní formuli

$$\begin{aligned} &[(\forall h,i,j \in p_1)\ (\hat\varphi(h,i)\ \&\ \hat\varphi(h,j)\ \rightarrow\ i=j)]\ \rightarrow \\ &\rightarrow\ (\forall a \in p_1)\ (\exists b \in p_1)\ (\forall c \in p_1) \\ &\qquad (c \in b\ \equiv\ (\exists d \in p_1)\ (d \in a\ \&\ \hat\varphi(d,c))) \end{aligned}$$

   kde $\hat\varphi(e'(s), e'(t))$ je formule základního jazyka teorie množin vyjadřující splnění $\varphi(s,t)$ v modelu $\mathfrak{M}_1$ při ohodnocení proměnných e'.

[1] V tomto modelu ovšem není splněn axiom dvojice, který bývá — podobně jako axiom nuly — často uváděn jako jeden z axiomů $\mathbf{ZF_{Fin}}$, přestože je závislý na ostatních axiomech; pro účely této práce však axiom dvojice mezi axiomy $\mathbf{ZF_{Fin}}$ nepočítáme (viz 1.3). Nalézt model, ve kterém by byl splněn i tento axiom, by bylo patrně obtížnější. Stejně tak zde není splněna druhá formulace axiomu regularity, kdy požadujeme, aby existoval tranzitivní obal, jehož je daná množina *prvkem,* nikoli částí.

Konsekvent této implikace je splněn bez ohledu na antecedent, neboť k jediné množině $a = 0 \in p_1$ nalezneme $b = 0 \in p_1$, pro něž je požadovaná podmínka splněna triviálně: pro jediné $c \in p_1$, totiž $c = 0$, neplatí ani $c \in b$, ani $(\exists d \in p_1)\ (d \in 0\ \&\ \hat{\varphi}(d, c))$.

7. Negace potence. Prázdná množina nemá v $\mathfrak{M}_1$ svoji potenci, neboť $0 \subseteq 0$, ale žádná množina v $\mathfrak{M}_1$ nulu jako svůj prvek neobsahuje; QED.

4.7 Schema nahrazení

Uvažujeme-li $\mathbf{ZF_{Fin}}$ bez schematu vydělení, je teorie $\mathbf{ZF_{Fin}} -$ (nahr) konečně axiomatizována. Protože však teorie $\mathbf{ZF_{Fin}}$ konečně axiomatizovatelná není, musí být schema nahrazení nezávislé na ostatních axiomech $\mathbf{ZF_{Fin}}$.

Diskuse nezávislosti schematu nahrazení v teorii $\mathbf{ZF_{Fin}} +$ (vyd) byla provedena v kapitole 1.4: při formulaci axiomu konečna v podobě „všechny množiny jsou konečné podle Tarského“ je schema nahrazení závislé, pro formulaci „neexistuje induktivní množina“ jsme nalezli model v **ZF** prokazující jeho nezávislost.

5 Dobré uspořádání univerzální třídy

Úlohou je najít co nejjednodušší popis dobrého uspořádání univerzální třídy $\mathbf{V}$. Ukážeme tři jednoduché popisy dvou různých takových uspořádání.

Protože je každé lineární uspořádání konečné množiny dobré, jsou v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ všechna lineární uspořádání libovolné třídy dobrá.[1] Stačí tedy najít jednoduchý popis libovolného *lineárního* uspořádání třídy $\mathbf{V}$.

Z dobrých uspořádání však mají lepší vlastnosti (a více se podobají dobrým uspořádáním v $\mathbf{ZF}$) uspořádání *úzká* (taková, kde každý prvek má jen množinu, tj. konečně mnoho, předchůdců). V těchto uspořádáních je vlastnost existence prvního prvku splněna nejen pro všechny neprázdné *množiny*, ale i *třídy* (odpovídající spočetným množinám v $\mathbf{ZF}$). Shodou okolností obě předkládaná uspořádání s jednoduchým popisem úzká jsou.

5.1 Uspořádání $\leq_1$

Pro $x \neq y$ definujeme rekurzí

$$(<_1) \qquad x <_1 y \overset{\text{df}}{\equiv} \max_{<_1}(x \triangle y) \in y$$

Dále definujeme obvyklým způsobem $x \leq_1 y \overset{\text{df}}{\equiv} x <_1 y \vee x = y$. Je třeba dokázat korektnost definice a požadované vlastnosti uspořádání $<_1$.

Definice je provedena rekurzí podle hladin p_n; je-li $x, y \in p_n$, je $x \triangle y \subseteq p_{n-1}$, přičemž (jak ukážeme), p_{n-1} je relací $\leq_1$ lineárně uspořádána. (Konečná) neprázdná množina $x \triangle y$ má tedy v lineárním uspořádání $\leq_1$ hladiny p_{n-1} největší prvek a výraz $\max_{<_1}(x \triangle y)$ má smysl.

Zřejmě platí $\{\langle x, y\rangle \in p_n; x \leq_1 y\} \subseteq \{\langle x, y\rangle \in p_{n+1}; x \leq_1 y\}$. Dokážeme, že $\leq_1$ je lineárním uspořádáním hladiny p_n, za indukčního předpokladu, že $\leq_1$ je lineárním uspořádáním hladiny p_{n-1} pro $n \geq 1$ (lineárním uspořádáním prázdné hladiny p_0 je triviálně):

[1] Uspořádání třídy všech celých čísel podle velikosti je tedy v $\mathbf{ZF_{Fin}}$ dobrým uspořádáním.

1. Reflexivita relace $\leq_1$ je zaručena přímo definicí.

2. Antisymetrie. Mějme x, y taková, že $x \neq y$, $x <_1 y$, $y <_1 x$. Podle definice pak platí $\max_{<_1}(x \triangle y) \in x$ & $\max_{<_1}(x \triangle y) \in y$, tedy $\max_{<_1}(x \triangle y) \in x \cap y$, neboli $\max_{<_1}(x \triangle y) \notin x \triangle y$ — spor.

3. Tranzitivita. Nechť (1) $y_0 = \max_{<_1}(x \triangle y) \in y$, (2) $z_0 = \max_{<_1}(y \triangle z) \in z$. Chceme dokázat, že potom $x_0 = \max_{<_1}(x \triangle z) \in z$. Rozlišíme tři případy:

   (a) $y_0 = z_0$ nemůže nastat, neboť $z_0 \in z - y$ a $y_0 \in y$.

   (b) $y_0 <_1 z_0$: Podle (1) je každý prvek množiny x, který je větší než y_0, prvkem y. Podle (2) každý prvek množiny y, který je větší než z_0, je prvkem z. Proto — jelikož $y_0 <_1 z_0$ — každý prvek množiny x, který je větší než z_0, je prvkem z; přitom $z_0 \notin x$, neboť $z_0 \notin y$. Tedy je z_0 největší prvek, ve kterém se množiny x a z liší, neboli $\max_{<_1}(x \triangle z) = z_0 \in z$, QED.

   (c) $z_0 <_1 y_0$: Podle (1) je každý prvek množiny x, který je větší než y_0, prvkem y. Podle (2) je každý prvek množiny y, který je větší než z_0, tím spíše než y_0, prvkem z. Tedy každý prvek množiny x, který je větší než y_0, je prvkem z; přitom $y_0 \notin x$, neboť $y_0 \in y - x$, ale $y_0 \in z$, neboť $y_0 \in y$ & $z_0 <_1 y_0$. Tedy je y_0 největší prvek, ve kterém se množiny x a z liší, neboli $\max_{<_1}(x \triangle z) = z_0 \in z$, QED.

4. Linearita. Pro $x \neq y$ je $\max_{<_1}(x \triangle y)$ buď prvkem x, nebo prvkem y, tedy buď $x <_1 y$ nebo $y <_1 x$.

Tím je dokázáno, že $\leq_1$ je korektně definované dobré uspořádání $\mathbf{V}$. Abychom prokázali, že $\leq_1$ je dobré *úzké* uspořádání, stačí ukázat, že pro libovolná x, y platí:[2]

(3) $$\tau(x) < \tau(y) \ \rightarrow \ x <_1 y$$

Pak totiž má libovolné $x \in p_n$ předchůdce pouze v p_n, tedy jich je konečně mnoho.

Důkaz provedeme indukcí podle hladin p_n. Pro p_0 a p_1 platí tvrzení (3) triviálně. Předpokládejme tedy, že $n > 1$ a pro všechna $x, y \in p_{n-1}$ tvrzení (3) platí. Chceme ukázat, že potom pro libovolná $x_0, y_0 \in p_n$ platí také.

1. Pokud $y_0 \in p_{n-1}$, potom rovněž $x_0 \in p_{n-1}$, neboť $\tau(x_0) < \tau(y_0)$, a tedy $x_0 <_1 y_0$ podle indukčního předpokladu.

2. Nechť tedy $y_0 \in p_n - p_{n-1}$. Potom $x_0 \in p_{n-1}$ (neboť $\tau(x_0) < \tau(y_0)$) a všechny prvky x_0 tudíž leží v p_{n-2}. Alespoň jeden prvek $y_1 \in y_0$ však leží v $p_{n-1} - p_{n-2}$ (jinak by $y_0 \in p_{n-1}$); podle indukčního předpokladu je tedy y_1 větší než libovolný prvek množiny x_0, takže $\max_{<_1}(x_0 \triangle y_0) \in y_0$, neboli $x <_1 y$, což jsme chtěli dokázat.

Uspořádání $<_1$ je tedy dobrým úzkým uspořádáním univerzální třídy $\mathbf{V}$.

[2] $\tau(x)$ je číslo nejmenší hladiny p_n obsahující x, viz 1.2.

Poznámka

Obdobně lze ukázat, že také uspořádání

$$\begin{aligned} x <_{11} y &\stackrel{\text{df}}{\equiv} \min_{<_{11}}(x \triangle y) \in y \\ x <_{12} y &\stackrel{\text{df}}{\equiv} \max_{<_{12}}(x \triangle y) \in x \\ x <_{13} y &\stackrel{\text{df}}{\equiv} \min_{<_{13}}(x \triangle y) \in x \end{aligned}$$

jsou dobrými uspořádáními **V**, nejsou však úzká: v uspořádání $<_{12}$ a $<_{13}$ předchází každou množinu libovolná její vlastní nadmnožina; v uspořádání $<_{11}$ každá množina, která neobsahuje 0, předchází libovolnou množinu, která 0 obsahuje (neboť 0 je v tomto uspořádání první).[3]

Ekvivalentní popis

Ukážeme ještě, že uspořádání $\leq_1$ lze ekvivalentně definovat takto:

$$(\leq_{1'}) \qquad x \leq_{1'} y \stackrel{\text{df}}{\equiv} \mathrm{N}(x) \leq \mathrm{N}(y), \qquad \text{kde } \mathrm{N}(x) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{q \in x} 2^{\mathrm{N}(q)}$$

(přičemž prázdný součet definujeme jako 0); definice je opět provedena rekurzí podle hladin p_n. Číslu N(x) budeme říkat číslo množiny x. Ukážeme ve stručnosti, že uspořádání $<_{1'}$ je totožné s uspořádáním $<_1$:

1. Mějme $x \in p_{n+1} - p_n$. Pak jsou podle této definice čísla prvků množiny x (které leží v p_n) čísly binárních řádů ve (formálním) binárním zápisu čísla N(x), přičemž na N(q)-tém místě je jednička, pokud $q \in x$, a nula, pokud $q \notin x$. Z toho rovněž vyplývá, že $x \neq y \;\equiv\; \mathrm{N}(x) \neq \mathrm{N}(y)$, a definice je tudíž korektní.

2. Z aritmetiky víme, že pro přirozená čísla m, n platí $m < n$, právě když na nejvyšším binárním řádu, ve kterém se liší, je v zápisu čísla n jednička (a tedy v zápisu čísla m nula).

3. Mějme libovolné dvě množiny $x \neq y$. Nejvyšší binární řád, ve kterém se liší čísla N(x) a N(y), je podle bodu 1 a definice $(\leq_{1'})$ číslem největšího $q \in x \triangle y$;

[3] Definujeme-li

$$x <_{11'} y \stackrel{\text{df}}{\equiv} \tau(x) < \tau(y) \;\vee\; (\tau(x) = \tau(y) \;\&\; x <_{11} y)$$

(a obdobně $<_{12'}$, $<_{13'}$), jsou i tato uspořádání úzká, definice je však složitější (cílem bylo najít co nejjednodušší popis). Obecně dobré úzké uspořádání R′ získáme z libovolného uspořádání R, které je lineární na každé hladině $p_n - p_{n-1}$ tak, že položíme

$$x\mathrm{R}'y \stackrel{\text{df}}{\equiv} \tau(x) < \tau(y) \;\vee\; (\tau(x) = \tau(y) \;\&\; x\mathrm{R}y)$$

Výsledné uspořádání je zřejmě lineární, tedy dobré, a každá množina $x \in p_n$ má předchůdce pouze v p_n.

přitom $\mathrm{N}(x) < \mathrm{N}(y)$ podle bodu 2 právě tehdy, když je na tomto N(q)-tém místě v zápisu čísla N(y) jednička, tedy podle bodu 1 právě když $q \in y$, neboli právě když $q = \max_{<_{1'}}(x \triangle y) \in x$.

4. Pro $x \neq y$ tedy platí $x <_{1'} y \ \equiv\ \max_{<_{1'}}(x \triangle y) \in y$, což je ale definice uspořádání $<_1$.

Poznámka

Indukcí podle hladin p_n lze triviálně ukázat, že každému přirozenému číslu m odpovídá nějaká množina x, tj. že $(\forall m)\ (\exists x)\ (m = \mathrm{N}(x))$. Jedná se tedy o bijekci mezi $\mathbf{N}$ a $\mathbf{V}$.

Počáteční úsek uspořádání $<_{1'}$ (tedy i uspořádání $<_1$) vypadá takto:

$$0 < 1 < \{1\} < 2 < \{\{1\}\} < \{\{1\},0\} < \{\{1\},1\} < \{\{1\},1,0\} < \dots$$

Indukcí lze ukázat, že z každé hladiny $p_n - p_{n-1}$ je v tomto uspořádání nejmenší množina

$$\underbrace{\{\{\dots\{\{}_{(n-1)\times}0\underbrace{\}\}\dots\}\}}_{(n-1)\times}$$

a největší je v ní celá p_{n-1}.

5.2 Uspořádání $\leq_2$

Uspořádání $\leq_2$ je na neformální úrovni velmi názorné, neboť se odvolává na obvyklý zápis množiny pomocí složených závorek. Jeho formalizace je však poněkud zdlouhavá.

Každou konečnou množinu lze zapsat pomocí (formální) posloupnosti znaků { a }, například 0 jako {}, $2 = \{0, 1\}$ jako {{}{{}}} apod. Seřaďme tyto zápisy nejprve podle délky a potom lexikograficky. Z možných zápisů téže množiny (pořadí prvků, opakování prvků) přitom bereme ten maximo-lexikograficky nejmenší. Tím dostáváme úzké dobré uspořádání třídy $\mathbf{V}$, neboť jsme ji nejprve rozdělili na dobře uspořádaný systém konečných množin (podle délky zápisu), a každou z nich jsme poté lineárně uspořádali (lexikograficky).

Vyslovme nyní formální definici tohoto uspořádání. Stačí definovat, kdy je formální slovo zápisem dané konečné množiny, a dokázat, že každá množina má formální zápis. Dobré úzké uspořádání třídy $\mathbf{V}$ je pak již indukováno (uvedeným maximo-lexikografickým) dobrým úzkým uspořádáním třídy všech zápisů.

Uvažujme formální slova nad abecedou {, } (reprezentovaná např. funkcemi $f : n \to \{0, 1\}$ pro libovolné $n \in \mathbf{N}$). Délku slova α označujme $\mathrm{len}(\alpha)$. Definujme *úroveň vnoření* na pozici $i \in \{0, \dots, \mathrm{len}(\alpha)\}$ ve slově α rekurzí takto:

- na pozici 0 je úroveň vnoření 0;
- je-li na pozici $0 \leq i < \mathrm{len}(\alpha)$ úroveň vnoření $k \in \mathbf{Z}$ a znak {, je na pozici $i + 1$ úroveň vnoření $k + 1$;

- je-li na pozici $0 \leq i < \mathrm{len}(\alpha)$ úroveň vnoření $k \in \mathbf{Z}$ a znak $\}$, je na pozici $i+1$ úroveň vnoření $k-1$.

Za *přípustná* považujeme pouze slova, která mají úroveň vnoření na pozicích $0 < i < \mathrm{len}(\alpha)$ všude kladnou a na pozici $\mathrm{len}(\alpha)$, tj. na konci slova, opět rovnu nule.

S využitím regularity definujeme (rekurzivním sestupem k prvkům množiny), kdy je přípustné slovo α zápisem množiny x:

- $\{\}$ je zápisem množiny 0.
- $q \in x \;\equiv\;$ ve slově α je podslovo, které je zápisem q a začíná i končí na první úrovni vnoření závorek.

Maximo-lexikografické uspořádání slov nad abecedou $\{, \}$ (které označíme $\leq_{\mathrm{m}}$) je úzké dobré uspořádání.[4] Proto můžeme vyslovit následující definici:

Slovo α nazveme *kanonickým zápisem* množiny x, je-li nejmenším ze třídy všech zápisů množiny x v uspořádání $\leq_{\mathrm{m}}$. Kanonický zápis množiny x budeme značit $\overline{x}$.

Je třeba ukázat, že každá množina má kanonický zápis. Důkaz provedeme ε-indukcí. Mějme množinu $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Podle indukčního předpokladu mají množiny $x_1, \ldots, x_n$ kanonické zápisy $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$. Je zřejmé, že slovo $\{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\ldots\,\overline{x_n}\}$ je zápisem množiny x.[5] Třída všech zápisů množiny x je tedy neprázdná, takže existuje její první prvek v úzkém dobrém uspořádání $\leq_{\mathrm{m}}$, neboli kanonický zápis množiny x, což bylo dokázati.

Podle úvahy provedené na začátku tohoto oddílu je tím již prokázáno, že definice

$$(\leq_2) \qquad x \leq_2 y \overset{\mathrm{df}}{\equiv} \overline{x} \leq_{\mathrm{m}} \overline{y}$$

je korektní definicí dobrého úzkého uspořádání třídy $\mathbf{V}$.

Poznámka

Počáteční úsek tohoto uspořádání vypadá takto:

$$\{\} = 0 < \{\{\}\} = 1 < \{\{\{\}\}\} = \{1\} < \{\{\{\{\}\}\}\} = \{\{1\}\} < \{\{\{\}\}\{\}\} = 2 < \ldots$$

pokud abecedu uspořádáme $\{\, < \,\}$, resp.

$$\{\} = 0 < \{\{\}\} = 1 < \{\{\{\}\}\} = \{1\} < \{\{\}\{\{\}\}\} = 2 < \{\{\{\{\}\}\}\} = \{\{1\}\} < \ldots$$

při uspořádání $\} < \{$.

[4] Že je $\leq_{\mathrm{m}}$ dobré, vyplývá z úvahy uvedené v prvním odstavci tohoto oddílu. Úzké je proto, že všichni předchůdci slova α mají délku nejvýše $\mathrm{len}(\alpha)$ a slov omezené délky je jen konečně mnoho. V uspořádání $\leq_{\mathrm{m}}$ má tedy nejmenší prvek nejen každá neprázdná množina, ale i třída.

[5] Zřetězení konečné množiny slov definujeme tak, jak je v teorii formálních jazyků obvyklé (lze provést i v $\mathbf{ZF}_{\mathbf{Fin}}$).

Literatura

[V] P. Vopěnka: *Mathematics in the Alternative Set Theory*, TEUBNER TEXTE, Leipzig 1979.

[S] A. Sochor: *Metamathematics of the Alternative Set Theory II*, CMUC 23 (1982), 55–79.

Obsah