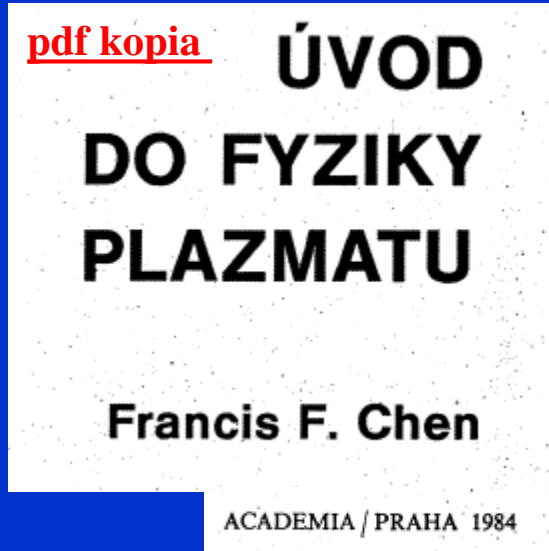


Debyeho stínící vzdálenost

Coulombovský logaritmus



Literatura:

pdf kopia

Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu

„Velký Kracík“

J.Kracík, B. Šesták a L. Aubrecht

Academia Praha 1974

Plazma v přírodě, v laboratořích a technologických procesech se vyznačuje velice širokou škálou dosahovaných parametrů. Přes mnoho řádu se mění kinetická energie a koncentrace částic.

I když jenom určitá podmnožina plazmatických prostředí je v termodynamické rovnováze, často se používá pro charakterizování plazmatu pojem teplota, teplota elektronu, teplota iontů, kinetická teplota, rotační teplota a podobně ...

Při vysokých energiích je vhodnější používat jednotky eV, při nízkých energiích je přejít vztahem E/k na vyjádření ve stupních K.

$$E \leftrightarrow kT$$

$$1\text{eV} \sim 11\,604.5\text{ K}$$

$$1\text{K} \sim 9 \times 10^{-5} \text{eV}$$

Energy levels of H atom

Selection rule

$$\Delta l = \pm 1; \quad \Delta m_l = 0, \pm 1$$

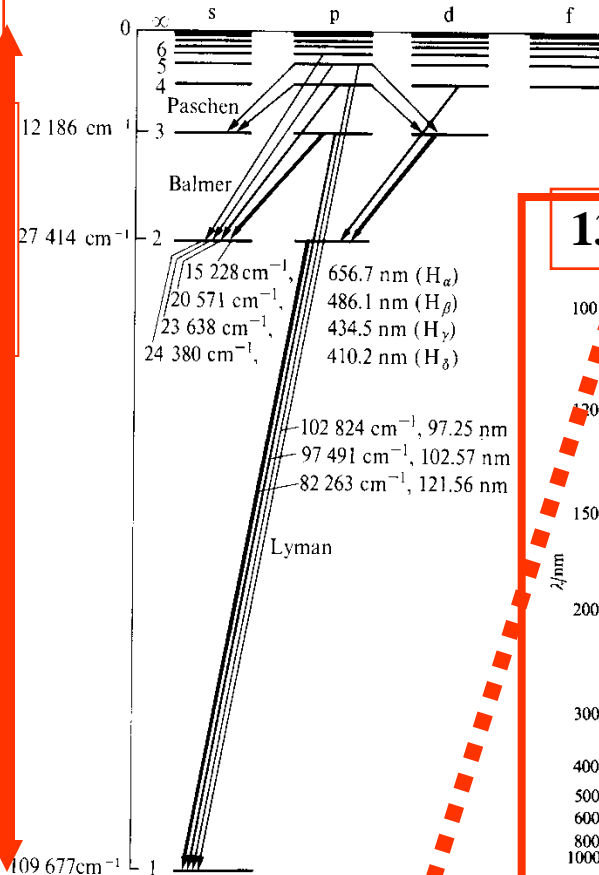
Grotrian diagram H

Angular momentum of photon is $s=1$

5.2 Atomic structure and atomic spectra

13.6eV

Fig. 15.12. A *Grotrian diagram* which summarizes the appearance and analysis of the spectrum of atomic hydrogen. The thicker the line, the more intense the transition.



13.6eV

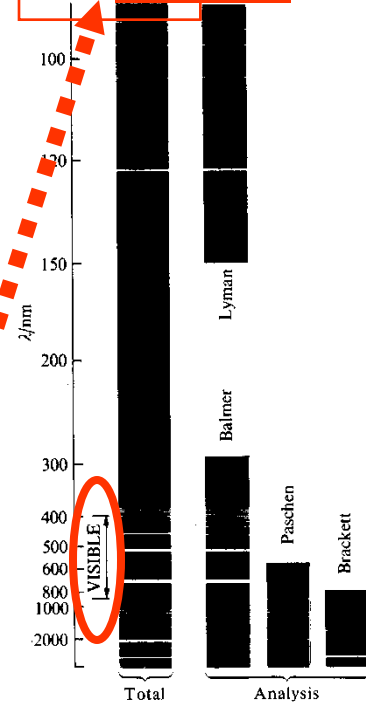
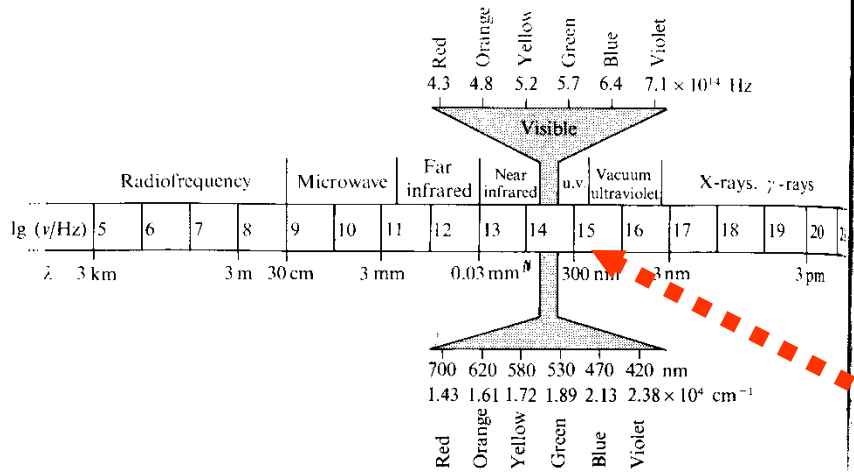


Fig. 15.1. The spectrum of atomic hydrogen. The spectrum is shown on the left, and is analysed into its overlapping series on the right. Note that the Balmer series lies in the visible region.



Ionization energy

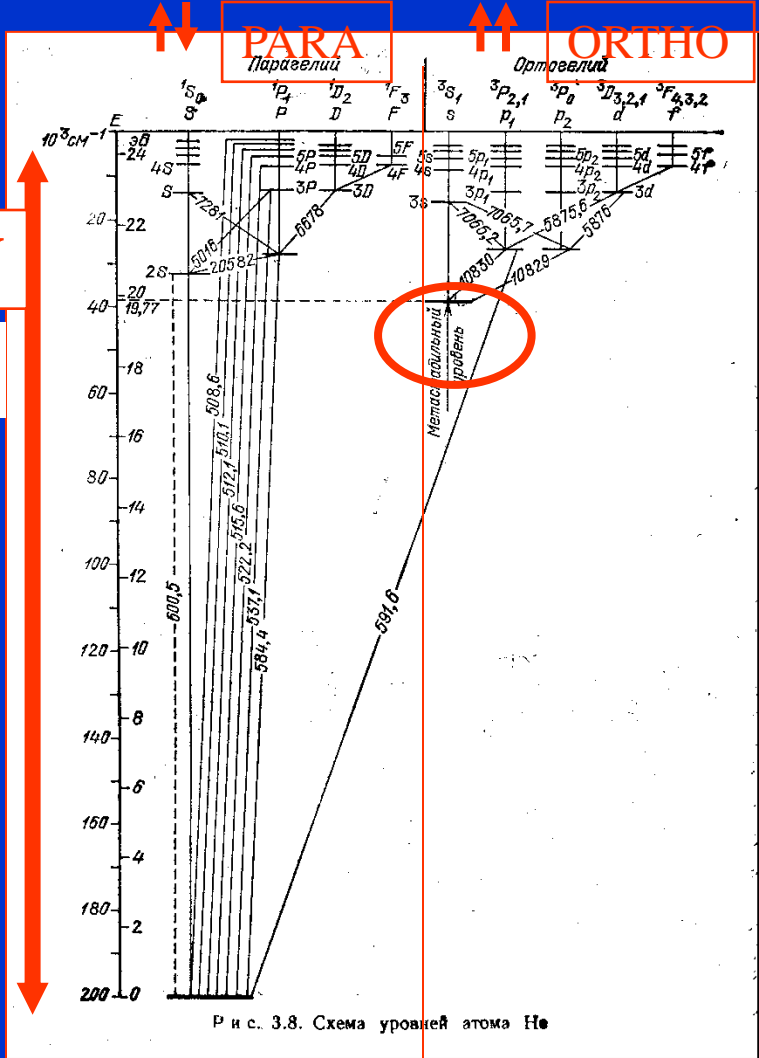
$$E_n = -\frac{Z^2 \mu e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} x \frac{1}{n^2}$$

$$h\nu = 13.6 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) [eV]$$

13.6eV x 8065,5 cm⁻¹ → 109000 cm⁻¹ → 91nm

Energy levels He

Grotrian diagram He
Ionization energy He



He ionization energy

24.46eV → ~198400 cm⁻¹ → ~50nm
vacuum ultraviolet

He⁺ ionization energy

$$E_n = -\frac{Z^2 \mu e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} x \frac{1}{n^2} = -4x \frac{\mu e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} x \frac{1}{n^2}$$

$$h\nu = 4x13.6(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2})[eV]$$

He⁺ ionization energy (to form He⁺⁺) = 54.4 eV

Singlet Triplet
Spin of electrons

Rydberg atom

Scientific American 1981

$$\langle r \rangle_{n,l} = n^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l(l+1)}{n^2} \right) \right\} x \frac{a_0}{Z}$$

$$\langle r \rangle_{n,l=0} = n^2 \left\{ \frac{3}{2} \right\} x \frac{a_0}{Z}$$

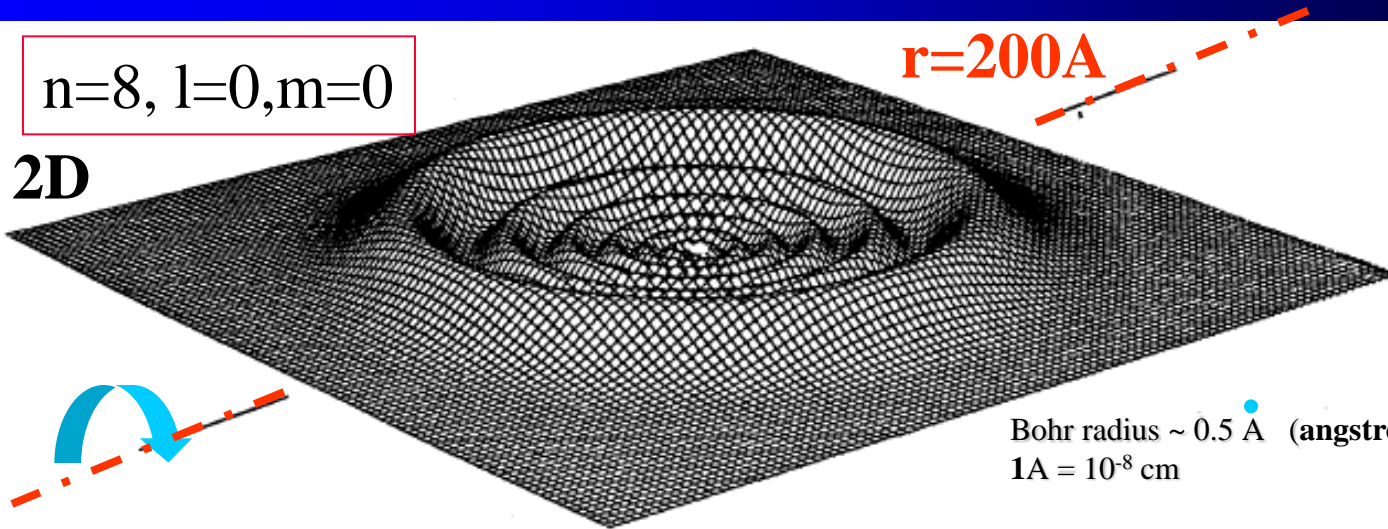
Highly Excited Atoms

They are floppy, fragile and huge. Some of them have been found to have a diameter of almost a hundredth of a millimeter, which is 100,000 times the diameter of an atom in its lowest energy state

by Daniel Kleppner, Michael G. Littman and Myron L. Zimmerman

$n=8, l=0, m=0$

2D

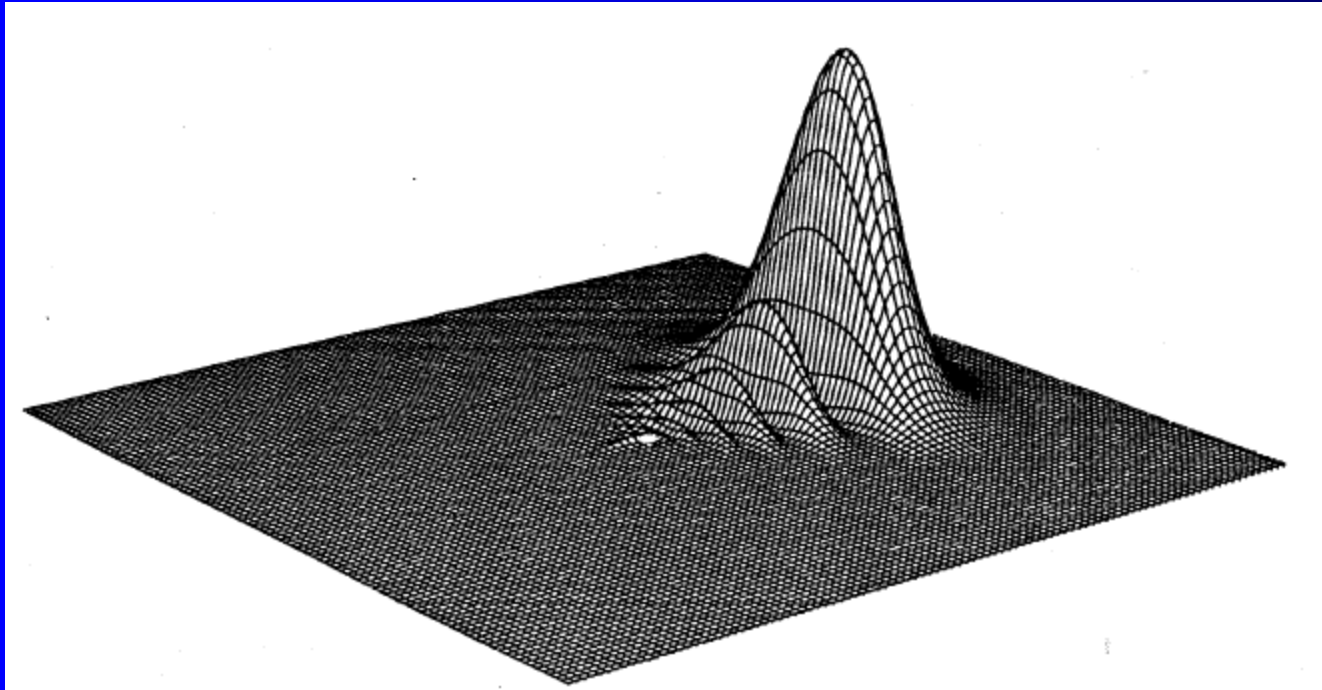


Bohr radius $\sim 0.5 \text{ \AA}$ (angstrom)
 $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$

ELECTRON-CHARGE DENSITY OF HYDROGEN is graphed on a plane passing through the single proton that forms the nucleus of the atom (colored dot). The states of hydrogen are described by the three quantum numbers n , l and m ; n is a positive integer that designates the energy level of the electron, l is an integer between 0 and $n - 1$ that corresponds to the magnitude of the eccentricity (or angular momentum) of the electron's orbit and m is an integer between $-l$ and $+l$ that describes the orbit's orientation. In the state where $n = 8$, $l = 0$ and $m = 0$ (upper graph) charge density is a series of concentric wavelike peaks. In three dimensions the charge density can be visualized as a series of spherical shells formed by rotating the graph about an axis passing through the nucleus. The distance from the nu-

cleus to the edge of the plane corresponds to 2×10^{-6} centimeter, which is 380 times the Bohr radius (the radius of a hydrogen atom in the lowest energy state). In a weak electric field (lower graph) the electron in an $n = 8$ state of hydrogen "stands" far to one side of the proton, forming an electric dipole. (In this state $m = 0$ and the angular momentum is a mixture of all possible values of l from zero to 7.) A dipole consists of two equal and opposite charges separated by a fixed distance. Many atoms act as dipoles, but most of them are not true dipoles: there is no separation of charges but only a slight distortion of the charge cloud. In the diagrammed state the separation is real. An atom whose outermost electron has been excited to a high energy level is often called a Rydberg atom. All Rydberg atoms are true dipoles.

Rydberg atom in electric field



$n=8, l=0, m=0$

All Rydberg atoms are true dipoles.

Properties of Rydberg atoms

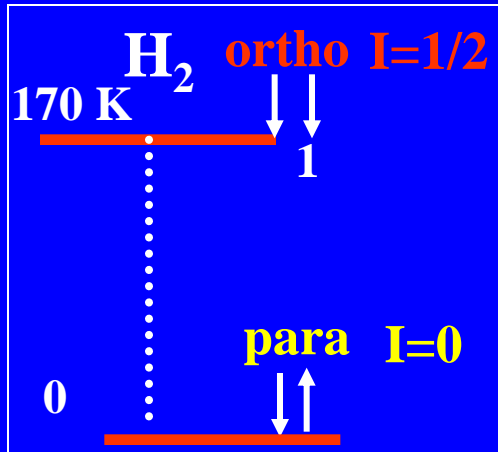
Table 1. Properties of Rydberg atoms.

Property	n dependence	Numerical values			
		$n=1$	$n=10$	$n=100$	$n=1000$
Bohr radius	$n^2 a_0$	$5.3 \times 10^{-8} \text{ cm}$	$5.3 \times 10^{-7} \text{ cm}$	$5.3 \times 10^{-5} \text{ cm}$	$5.3 \times 10^{-3} \text{ cm}$
Binding energy	R/n^2	<u>13.6 eV</u>	136 meV	<u>1.36 meV</u>	13.6 μeV
RMS velocity of Rydberg electron	v_0/n	$2.2 \times 10^8 \text{ cm s}^{-1}$	$2.2 \times 10^7 \text{ cm s}^{-1}$	$2.2 \times 10^6 \text{ cm s}^{-1}$	$2.2 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1}$
Orbital period	$n^3 \tau$	$1.5 \times 10^{-16} \text{ s}$	$1.5 \times 10^{-13} \text{ s}$	$1.5 \times 10^{-10} \text{ s}$	$1.5 \times 10^{-7} \text{ s}$
<u>Classical field</u> <u>ionization</u> <u>threshold</u>	$\frac{1}{16} n^4$	<u>$3.2 \times 10^8 \text{ V cm}^{-1}$</u>	$3.2 \times 10^4 \text{ V cm}^{-1}$	<u>3.2 V cm^{-1}</u>	$3.2 \times 10^{-4} \text{ V cm}^{-1}$

Bohr radius $\sim 0.5 \text{ \AA}$ (angstrom)

$$1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$$

Small differences in zero point energies
not sufficient to describe IMR @ low T
nuclear spin selection rules



$$E \leftrightarrow kT$$

$$1\text{eV} \sim 11\,604.5\text{ K}$$

$$1\text{K} \sim 9 \times 10^{-5} \text{eV}$$

Energies of H₂ and D₂

H₂

B_e=60.80

1eV corresponds to ~ 11604K

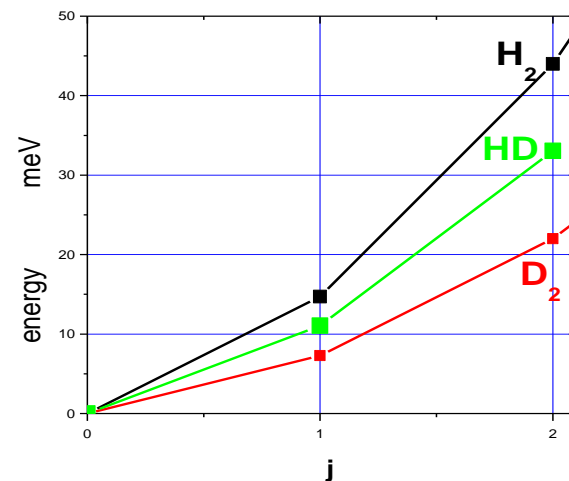
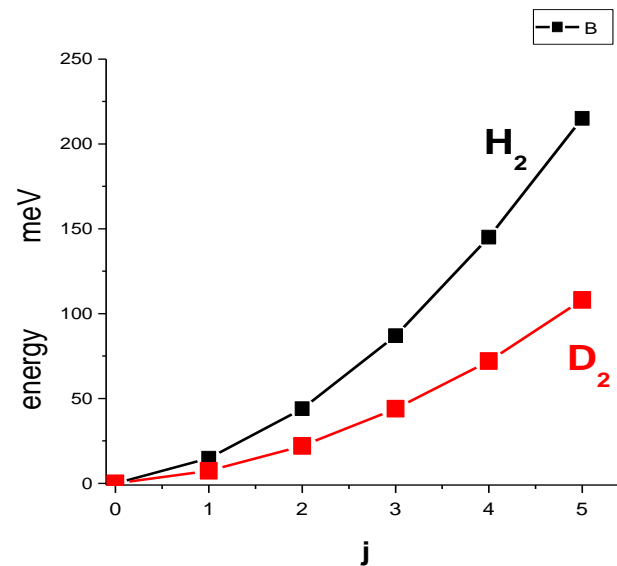
D₂

B_e=30.429

HD

B_e=45.655

	j	E/meV	E/in K	300K	250K	80K	35K	low
H ₂	0	0	0	0.128	0.150	0.248	0.25	1/4
	1	14.7	170.6	0.657	0.694	0.75	0.75	3/4
	2	44	510.6	0.117	0.098	0.002	0	
	3	87	1009.5	0.092	0.055	0	0	
	4	145	1682.6	0.004	0.0016	0	0	
	5	215	2494.9	0.001	0.0002	0	0	
D ₂	0	0	0	0.179	0.213	0.552	0.664	2/3
	1	7.3	84.71	0.202	0.227	0.329	0.333	1/3
	2	22	255.29	0.383	0.384	0.114	0.002	
	3	44	510.6	0.115	0.098	0.004	0	
	4	72	835.5	0.098	0.066	0.0001	0	
	5	108	1253.2	0.015	0.008	0	0	
HD	0	0	0					1
	1	11.04	128.1					
	2	33.05	383.4					



H₂ and D₂ are taken from O. Wick dissertation

HD is calculated using B_e from Herzberg and comparison with H₂ from table

Energy levels Rotational states

$$E \leftrightarrow kT$$

$$1\text{eV} \sim 11\,604.5\text{ K}$$

$$1\text{K} \sim 9 \times 10^{-5} \text{eV}$$

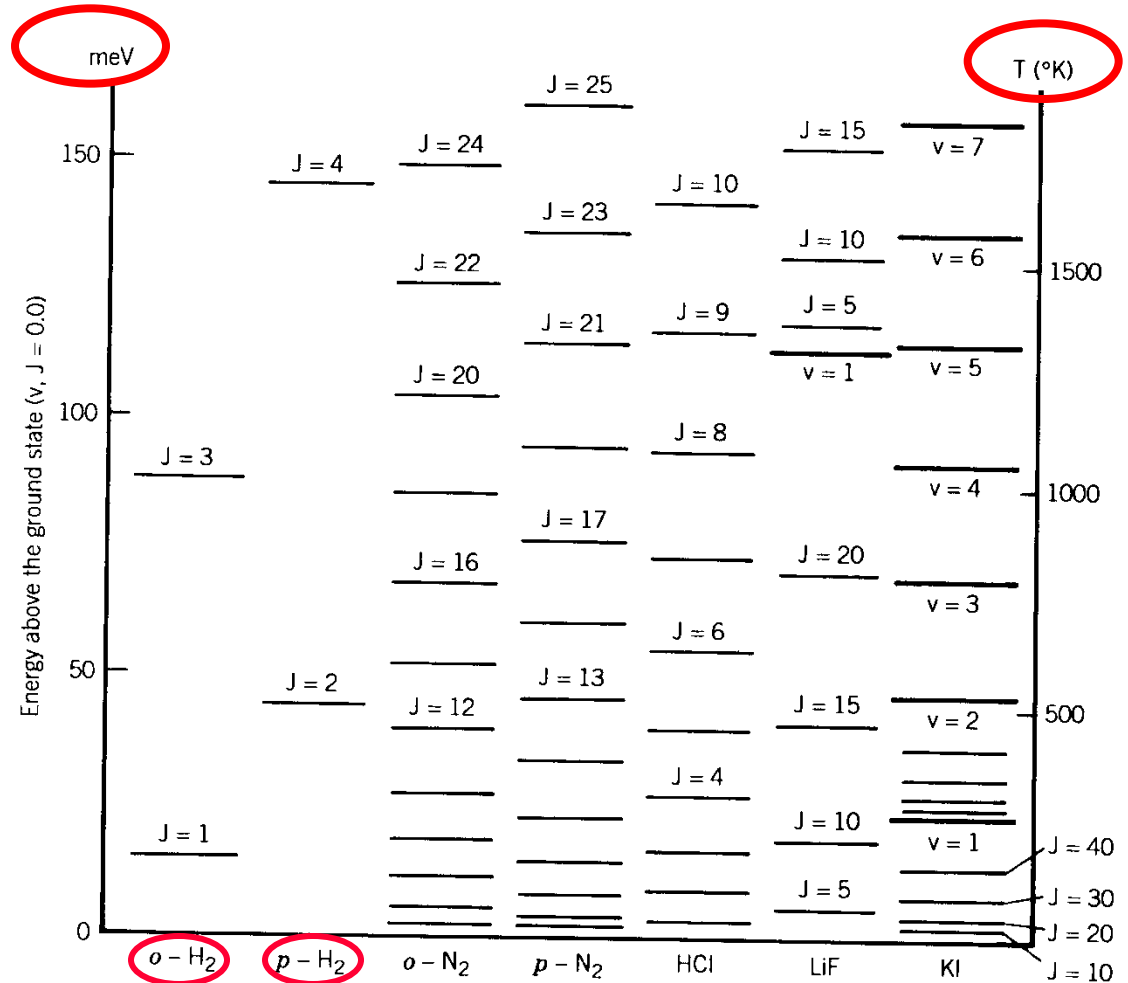


Figure 2-2-1. Vibrational-rotational levels (quantum numbers v and J) of a few diatomic molecules. The ($v = 1$, $J = 0$) level of H_2 lies 0.54 eV above the ground state ($v = 0$, $J = 0$). Rotational level spacings for H_2 are uniquely large, about $15J$ meV, where J is the quantum number for the upper level. For the ortho species of H_2 ($o\text{-H}_2$), the nuclear spins are parallel; for the para version ($p\text{-H}_2$), the nuclear spins are antiparallel. [From Shimamura (1984).]

Energy levels Rotational states

$$E \leftrightarrow kT$$

$$1\text{eV} \sim 11\,604.5\text{ K}$$

$$1\text{K} \sim 9 \times 10^{-5} \text{eV}$$

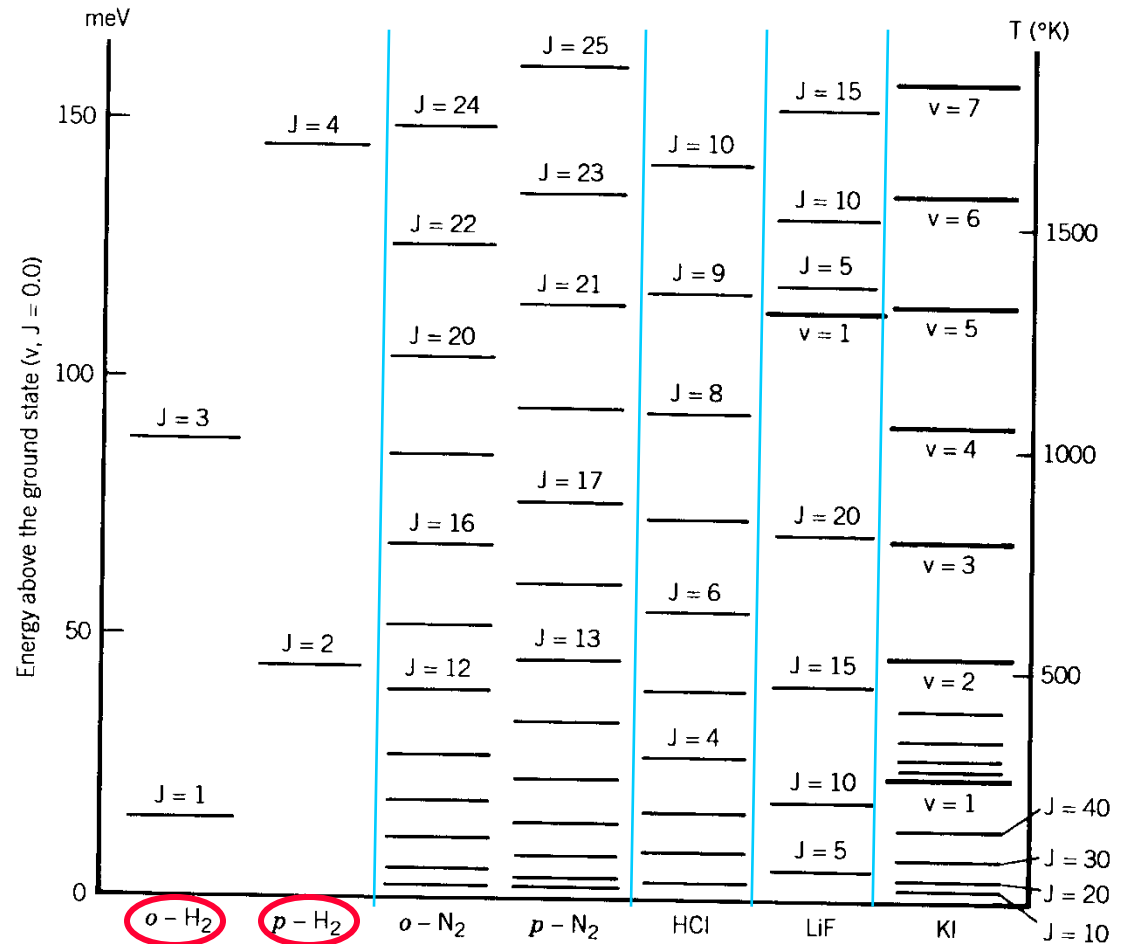


Figure 2-2-1. Vibrational-rotational levels (quantum numbers v and J) of a few diatomic molecules. The ($v = 1$, $J = 0$) level of H_2 lies 0.54 eV above the ground state ($v = 0$, $J = 0$). Rotational level spacings for H_2 are uniquely large, about $15J$ meV, where J is the quantum number for the upper level. For the ortho species of H_2 ($o\text{-H}_2$), the nuclear spins are parallel; for the para version ($p\text{-H}_2$), the nuclear spins are antiparallel. [From Shimamura (1984).]

Potential curves N_2 , N_2^+

Vibrational states
Electronic states
Ionisation

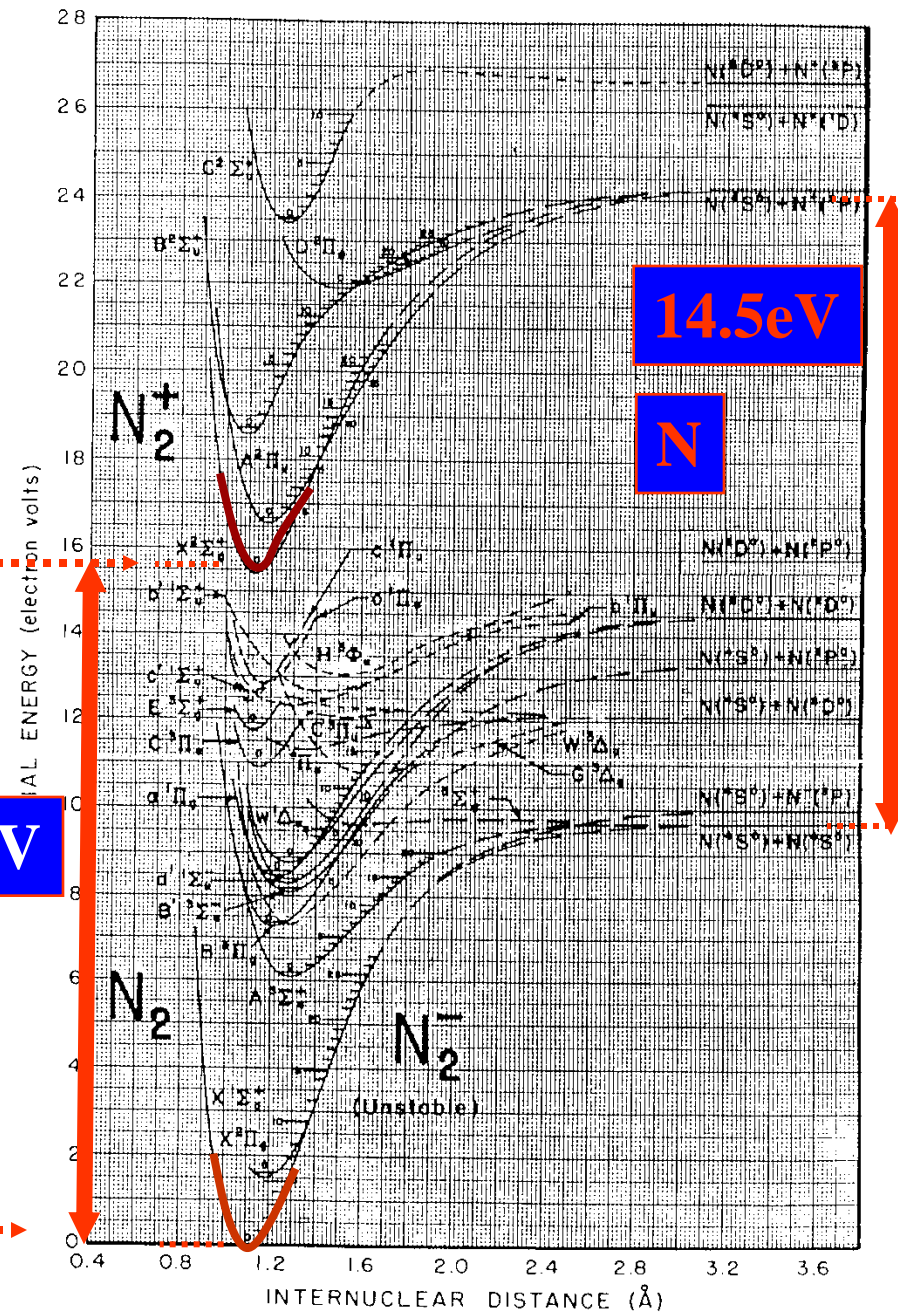
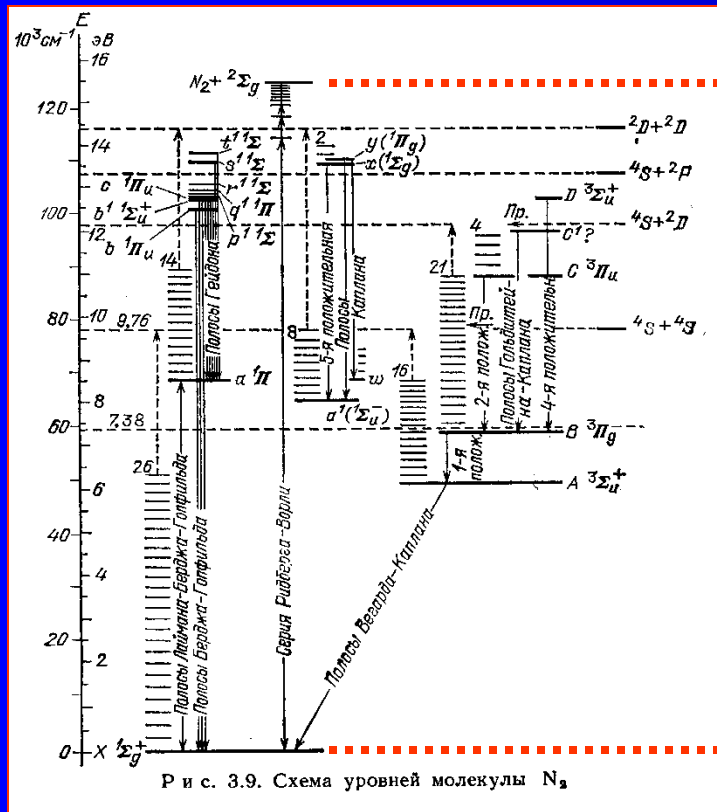


FIGURE 1. Potential energy curves for N_2 and N_2^+ .*

PLASMA

Simple definition:

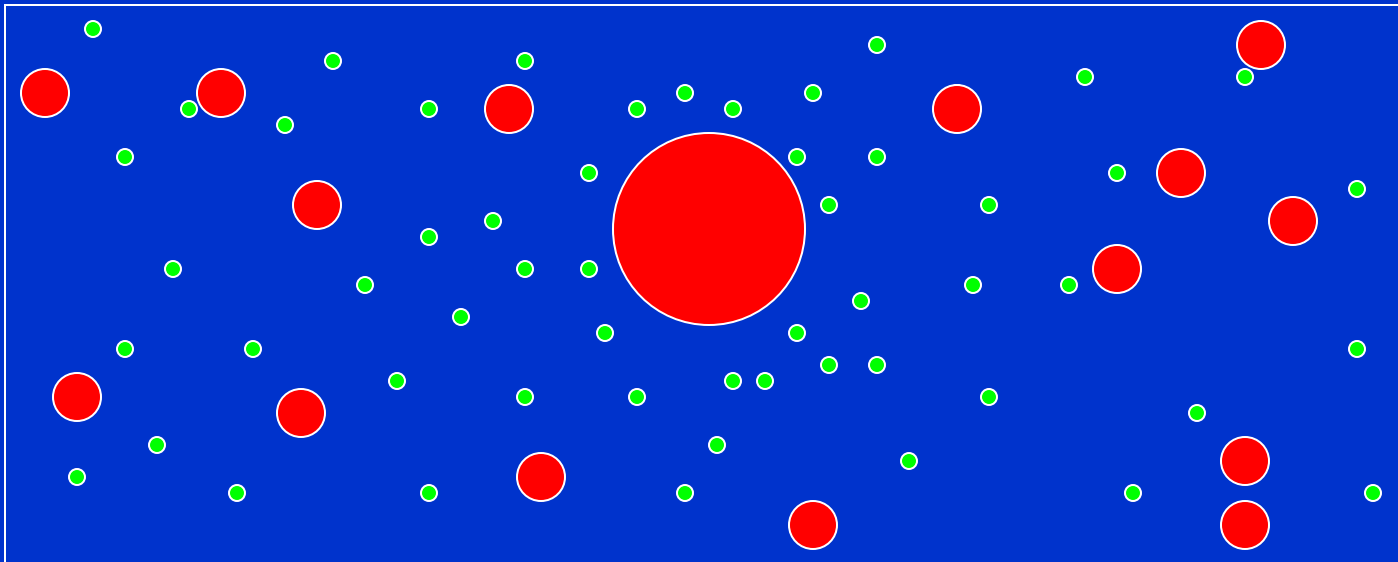
a quasi-neutral gas of charged particles showing collective behaviour.

Quasi-neutrality: number densities of electrons, n_e , and ions, n_i , with charge state Z are locally balanced: $n_e \approx Zn_i$

Collective behaviour: long range of Coulomb potential ($1/r$) leads to nonlocal influence of disturbances in equilibrium.

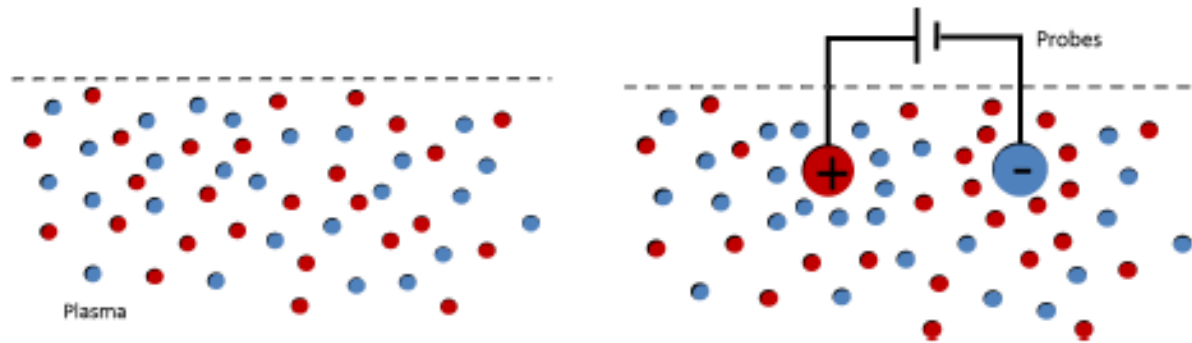
Macroscopic fields usually dominate over microscopic fluctuations, e.g.:

$$\rho = e(Zn_i - n_e) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$



Plasma Shielding

Debye shielding



What is the potential $\phi(r)$ of an ion (or positively charged sphere) immersed in a plasma?

For equal ion and electron temperatures ($T_e = T_i$), we have:

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{3}{2}k_B T_e \quad (2)$$

Therefore,

$$\frac{v_i}{v_e} = \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} = \left(\frac{m_e}{A m_p} \right)^{1/2} = \frac{1}{43} \quad \text{(hydrogen, } Z=A=1\text{)}$$

Ions are almost stationary on electron timescale!

To a good approximation, we can often write:

$$n_i \simeq n_0,$$

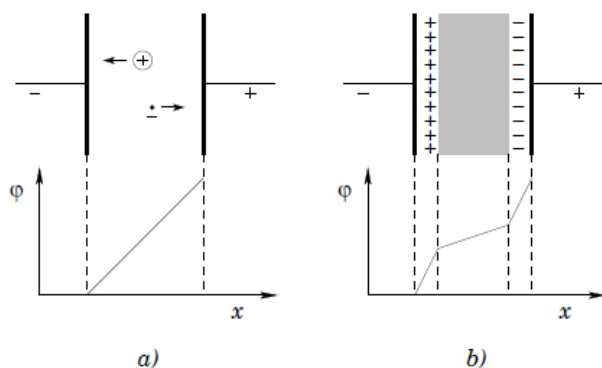
where the material (eg gas) number density, $n_0 = N_A \rho_m / A$.

$$M_p/m_e \sim 1836$$

ZÁKLADY FYZIKY PLAZMY

2	Plazma ako fyzika priestorového náboja	9
2.1	Základná terminológia	10
2.2	Významné vlastnosti plazmy	11
2.3	Výskyt plazmy	12
2.4	Debyeova–Hückelova teória tienenia náboja	12
2.4.1	Počet nabitých častíc v Debyeovej guli	17
2.4.2	Fluktuácie náboja v plazme – kvázineutralita plazmy	18
2.5	Plazmová frekvencia	21

Predstavme si teraz, že budeme v ionizovanom plyne postupne zvyšovať počet nabitých častíc. Pri párovom vzniku bude koncentrácia priestorového náboja zanedbateľná. Pôsobením elektrického poľa však budú kladne nabité častice sa pohybovať smerom k zápornej elektróde a elektróny zasa opačným smerom. Vďaka tomu sa pri zápornej elektróde objaví prebytok kladného náboja a pri kladnej zasa prebytok záporného náboja: hovoríme, že nastáva polarizácia ionizovaného plynu. Takto vytvorený priestorový náboj generuje elektrické pole, ktoré je opačne orientované ako pole od elektród – v centre ionizovaného plynu nastáva odtieňovanie vonkajšieho elektrického poľa. Preto v centrálnej časti je elektrické pole slabšie a naopak v blízkosti elektród zasa silnejšie než bola pôvodná hodnota, ako to vidíme na obr. 2.1b. V tomto prípade nie sme už ale schopní toto pole jednoduchým spôsobom určiť. Vplyv priestorového náboja teda zmenil pôvodné vlastnosti ionizovaného plynu a hovoríme, že ionizovaný plyn sa stal plazmou.



Obr. 2.1: Vplyv koncentrácie nabitých častíc na priebeh elektrostatičného potenciálu φ :
a) priestorový náboj sa neuplatňuje; b) priestorový náboj nemožno zanedbať

Integračné konštanty A a B určíme z asymptotického priebehu elektrického poľa

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \left[A \left(1 + \frac{r}{h} \right) \exp \left(-\frac{r}{h} \right) + B \left(1 - \frac{r}{h} \right) \exp \left(\frac{r}{h} \right) \right].$$

Nekonečne ďaleko od vloženého náboja je elektrické pole nulové

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}(r) = 0,$$

z čoho vyplýva $B = 0$. V blízkosti vloženého náboja sa vplyv priestorového náboja plazmy neuplatňuje a preto elektrické pole tu nadobúda rovnaké hodnoty ako v prípade náboja uloženého vo vákuu

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

z čoho $A = q/4\pi\epsilon_0$ a teda

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp \left(-\frac{r}{h} \right). \quad (2.4)$$

Dĺžka

$$h = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k}{e^2 n_0} \frac{T_+ T_-}{T_+ + T_-}}$$

sa nazýva Debyeova dĺžka. Jej fyzikálny význam je zrejmý z obr. 2.3, kde sú vynesené funkcie $\varphi(r)$ a elektrostatický potenciál náboja q vo vákuu

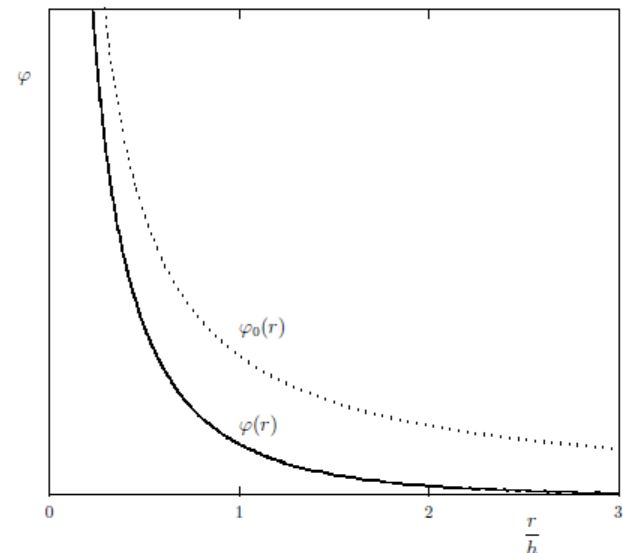
$$\varphi_0(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Vidíme, že pomer $\varphi(r)/\varphi_0(r)$ klesá exponenciálne s pomerom r/h , takže už vo vzdialenosti $3h$ potenciál dosahuje iba 5 % z hodnoty vo vákuu – nastáva odtieňovanie elektrického poľa vloženého náboja. Ako sa ale správa elektrostatický potenciál v blízkosti vloženého náboja q ? K tomu použijeme Taylorov rozvoj exponenciálnej funkcie, pričom ponecháme len prvé dva členy

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp \left(-\frac{r}{h} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{r}{h} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h} = \varphi_0(r) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h}.$$

Vidíme, že odtienený potenciál sa v blízkosti náboja odlišuje od náboja uloženého vo vákuu len o aditívnu hodnotu $-q/4\pi\epsilon_0 h$. Význam tejto diferencie si objasníme výpočtom limity

$$\lim_{r \rightarrow 0} [\varphi(r) - \varphi_0(r)] = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 h},$$



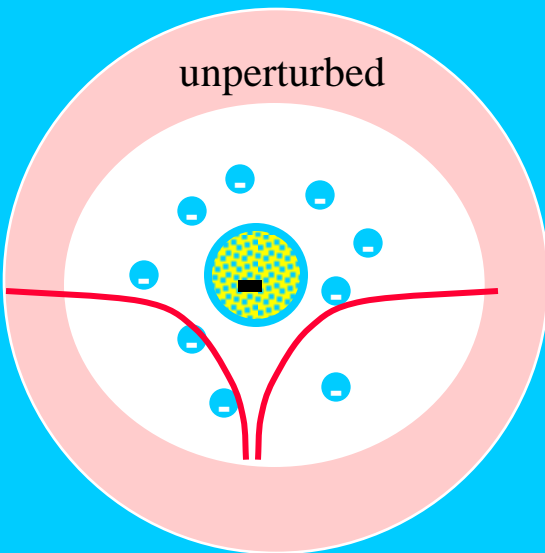
Obr. 2.3: Elektrostatický potenciál $\varphi(r)$ v okolí vloženého náboja do plazmy. Na porovnanie potenciál $\varphi_0(r)$ rovnakého náboja vo vákuu

2.4.1 Počet nabitých častíc v Debyeovej guli

Teraz sa vrátime k analýze podmienky (2.2). Z obr. 2.3 vidno, že pre $r \gg h$ potenciál $\varphi \rightarrow 0$, takže obidve podmienky (2.2) sú splnené a teda riešenie (2.4) je správne. Aj v opačnom prípade, keď $r \ll h$ riešenie (2.4) je opäť správne i keď podmienky (2.2) teraz nie sú splnené. To znamená, že kritickým miestom, kde treba testovať potenciál (2.4) a následne aj podmienky (2.2), je $r \approx h$. Vypočítame teda $\varphi(h)$, pričom predpokladáme už $|q| = e$ a výsledok dosadíme do (2.2)

$$\frac{e\varphi(h)}{kT_+} = \frac{e}{kT_+} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 h} \frac{1}{\epsilon} \ll 1; \quad \frac{e\varphi(h)}{kT_-} = \frac{e}{kT_-} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 h} \frac{1}{\epsilon} \ll 1,$$

Debye shielding 1



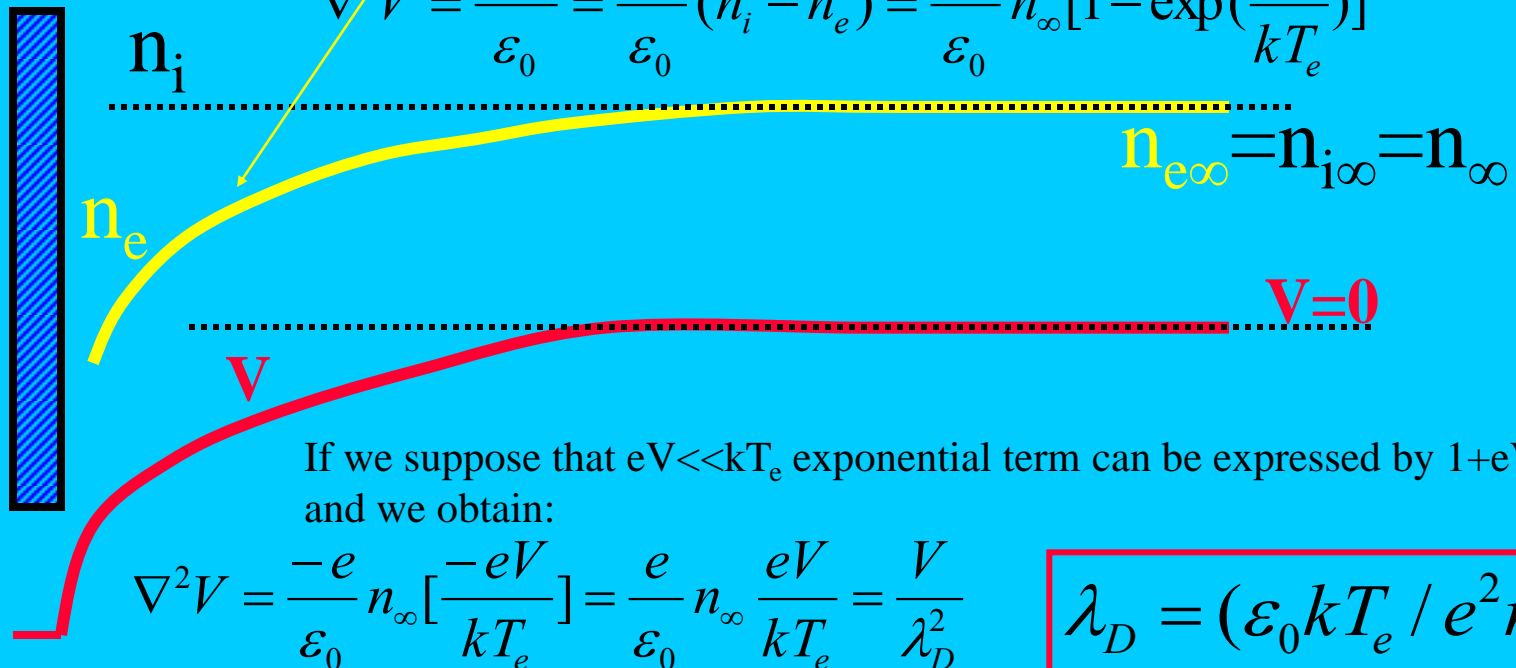
The effect of potential – perturbing charge in a plasma are generally much shorter- range than in vacuum because the charges in plasma tend to distribute themselves so as to shield the plasma from the electric field the perturbing charge generates.

The effect can be deduced readily from Poisson's equation by assuming, for example, that ions do not move but that electrons adopt a thermal equilibrium distribution in which electron distribution is determined by the Boltzmann factor:

$$n_e = n_\infty \exp(eV / kT_e)$$

n_∞ is electron density far from the perturbing charge where potential V is taken as a zero. Poisson's equation is:

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0} = \frac{-e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) = \frac{-e}{\epsilon_0} n_\infty [1 - \exp(\frac{eV}{kT_e})]$$



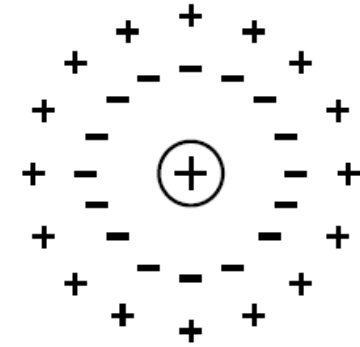
If we suppose that $eV \ll kT_e$ exponential term can be expressed by $1 + eV / kT_e$ and we obtain:

$$\nabla^2 V = \frac{-e}{\epsilon_0} n_\infty \left[\frac{-eV}{kT_e} \right] = \frac{e}{\epsilon_0} n_\infty \frac{eV}{kT_e} = \frac{V}{\lambda_D^2}$$

$$\lambda_D = (\epsilon_0 kT_e / e^2 n_\infty)^{1/2}$$

Linear approximation just to understand problem, signs are roughly OK

Predpokladajme, že máme vytvorenú homogénnu plazmu (t.j. jej vlastnosti sa nemenia s polohou). Označme koncentráciu elektrónov ako n_- a koncentráciu kladných iónov ako n_+ . Pokiaľ na plazmu nepôsobia vonkajšie elektrické polia, koncentrácie elektrónov a iónov sú rovnaké a rovnajú sa n_0 . Ak teraz vložíme do plazmy nepohyblivý náboj o veľkosti q , elektrické pole náboja pôsobí na nabitú časticu plazmy: častice so súhlasným nábojom sú odpudzované a s nesúhlasným priťahované (pozri obr. 2.2, kde vložený náboj má kladnú polaritu). Takto sa plazma polarizuje a nastáva tak odtieňovanie elektrického poľa vloženého náboja. Z predpokladu homogénnej plazmy vyplýva, že rozloženie nábojov v okolí vloženého náboja má sférickú symetriu. Všetky veličiny sú teda funkciou vzdialenosti r od vloženého náboja. Preto zavedieme sférický súradnicový systém, ktorého počiatok je umiestnený v pevne vloženom náboji.



Obr. 2.2: Polarizácia plazmy v okolí kladného náboja

Teraz budeme hľadať priebeh hustoty náboja $\varrho(r)$, elektrostatického potenciálu $\varphi(r)$ a ďalších veličín v závislosti od r . Pretože nabitú časticu sa pohybujú len tepelným pohybom, ktorý je charakterizovaný teplotami T_- a T_+ , ich koncentrácie sú opísané Boltzmannovým zákonom

$$n = n_0 \exp \left[-\frac{U_p}{kT} \right],$$

kde U_p je potenciálna energia častice vo vonkajšom poli. Je to analógia rozloženia koncentrácie molekúl plynu v zemskej atmosfére pod vplyvom gravitácie. V našom prípade namiesto gravitačného poľa pôsobí pole elektrické. Potom koncentrácie nabitých častíc budú nasledovné

$$n_-(r) = n_0 \exp \left[\frac{e\varphi(r)}{kT_-} \right], \quad n_+(r) = n_0 \exp \left[-\frac{e\varphi(r)}{kT_+} \right]. \quad (2.1)$$

Tu e je elementárny náboj a k Boltzmannova konštanta. Polarizáciou plazmy vznikne priestorový náboj $\varrho(r) = e[n_+(r) - n_-(r)]$, ktorý vyvolá elektrické pole \mathbf{E} opačného smeru

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(r) = \frac{\varrho(r)}{\varepsilon_0},$$

kde ε_0 je permitivita vákua.

Ak vyjadríme elektrické pole pomocou známeho vzťahu $\mathbf{E} = -\nabla\varphi(r)$, tak dostaneme diferenciálnu rovnicu pre elektrostatický potenciál

$$\nabla^2 \varphi(r) = -\frac{en_0}{\varepsilon_0} \left[\exp \left(-\frac{e\varphi(r)}{kT_+} \right) - \exp \left(\frac{e\varphi(r)}{kT_-} \right) \right].$$

Elektrostatické pole kolem náboje q_T umístěného v počátku je dáno Poissonovou rovnicí

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_e - Zn_i) - \frac{q_T}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r}) . \quad (7)$$

Ve velké vzdálenosti je v homogenním plazmatu vliv bodového náboje zanedbatelný, a proto pro $r = \infty$ je $n_e = n_0 = Zn_i$. Bez újmy na obecnosti lze v nekonečnu položit $\varphi = 0$.

Budeme předpokládat, že plazma je nede degenerované ($T_e \gg E_F$) a můžeme tedy užít Boltzmannovu statistiku pro elektrony i ionty. V Boltzmannově statistice je pravděpodobnost obsazení stavu $\sim \exp(-U/kBT)$, kde U je energie daného stavu. Rovnovážné elektronové a iontové koncentrace v elektrostatickém poli jsou tedy následující

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) \quad n_i = \frac{n_0}{Z} \exp\left(-\frac{Ze\varphi}{k_B T_i}\right) . \quad (8)$$

Stejně vztahy bychom mohli odvodit také ze silové rovnováhy mezi elektrickou silou a gradienty parciálních tlaků.

Hustoty elektronů a iontů lze teď dosadit do Poissonovy rovnice a tuto řešit. Řešení si zjednodušíme linearizací, budeme předpokládat, že potenciální energie \ll kinetická. Pro $|x| \ll 1$ je $\exp(x) \simeq 1 + x$ a rovnici (7) přepíšeme ve sférických souřadnicích pro $r \neq 0$ do tvaru

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) \simeq \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{T_e} + \frac{Z}{T_i} \right) \varphi = \frac{\varphi}{\lambda_D^2} . \quad (9)$$

Po substituci $\varphi = \tilde{\varphi}/r$ přejde rovnice do tvaru $d^2\tilde{\varphi}/dr^2 = \tilde{\varphi}/\lambda_D^2$. Potenciál statického náboje q_T v plazmatu je tedy

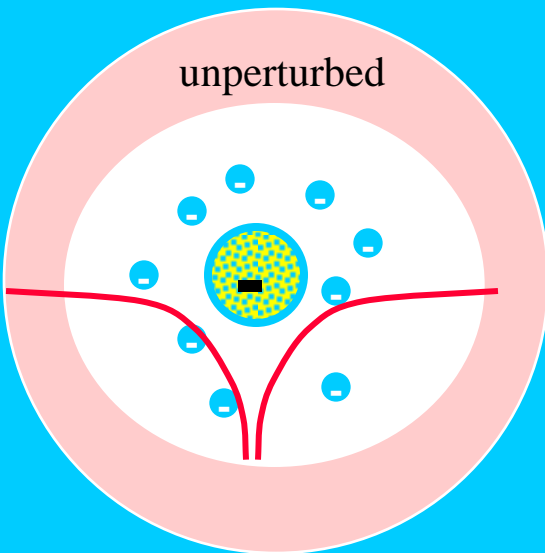
$$\varphi(r) = \frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) . \quad (10)$$

Na Debyově délce λ_D je potenciál odstíněn na $1/e$ vakuové hodnoty. Stínění je součtem elektronového stínění s λ_{De} a iontového s λ_{Di} . Debyova délka λ_D je

$$\lambda_D^{-2} = \lambda_{De}^{-2} + \lambda_{Di}^{-2} \quad \lambda_{De} = \sqrt{\frac{k_B T_e \varepsilon_0}{n_e e^2}} \quad \lambda_{Di} = \sqrt{\frac{k_B T_i \varepsilon_0}{Z^2 n_i e^2}} = \sqrt{\frac{k_B T_i \varepsilon_0}{Z n_e e^2}} . \quad (11)$$

Při $T_e > T_i/Z$ dominuje iontové stínění statického náboje. Statickým nábojem jsou například různé sondy umístěné do plazmatu

Debye shielding 1



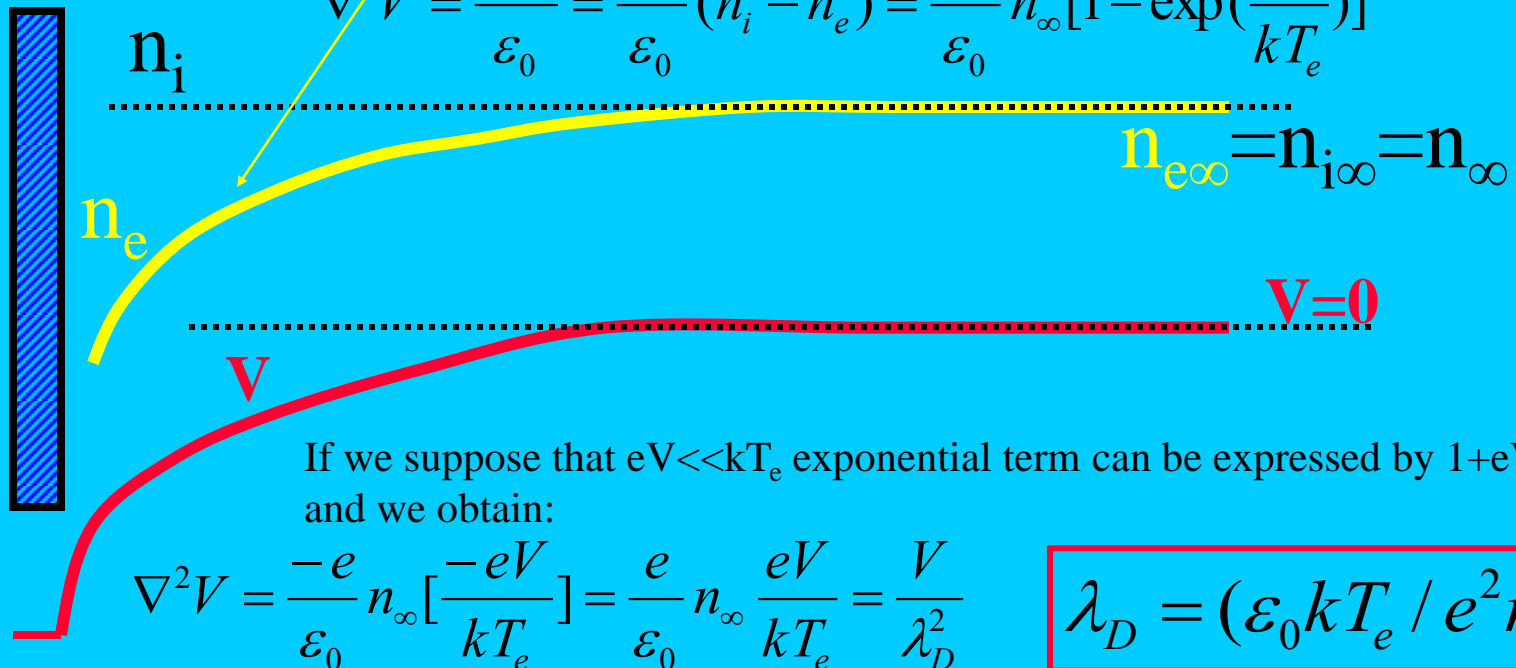
The effect of potential – perturbing charge in a plasma are generally much shorter- range than in vacuum because the charges in plasma tend to distribute themselves so as to shield the plasma from the electric field the perturbing charge generates.

The effect can be deduced readily from Poisson's equation by assuming, for example, that ions do not move but that electrons adopt a thermal equilibrium distribution in which electron distribution is determined by the Boltzmann factor:

$$n_e = n_\infty \exp(eV / kT_e)$$

n_∞ is electron density far from the perturbing charge where potential V is taken as a zero. Poisson's equation is:

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0} = \frac{-e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) = \frac{-e}{\epsilon_0} n_\infty [1 - \exp(\frac{eV}{kT_e})]$$



If we suppose that $eV \ll kT_e$ exponential term can be expressed by $1 + eV / kT_e$ and we obtain:

$$\nabla^2 V = \frac{-e}{\epsilon_0} n_\infty \left[\frac{-eV}{kT_e} \right] = \frac{e}{\epsilon_0} n_\infty \frac{eV}{kT_e} = \frac{V}{\lambda_D^2}$$

$$\lambda_D = (\epsilon_0 kT_e / e^2 n_\infty)^{1/2}$$

Linear approximation just to understand problem, signs are roughly OK

Debye shielding 2

$$n_e = n_\infty \exp(eV / kT_e)$$

$eV \ll kT_e$, exponential can be approximated by linear term \rightarrow

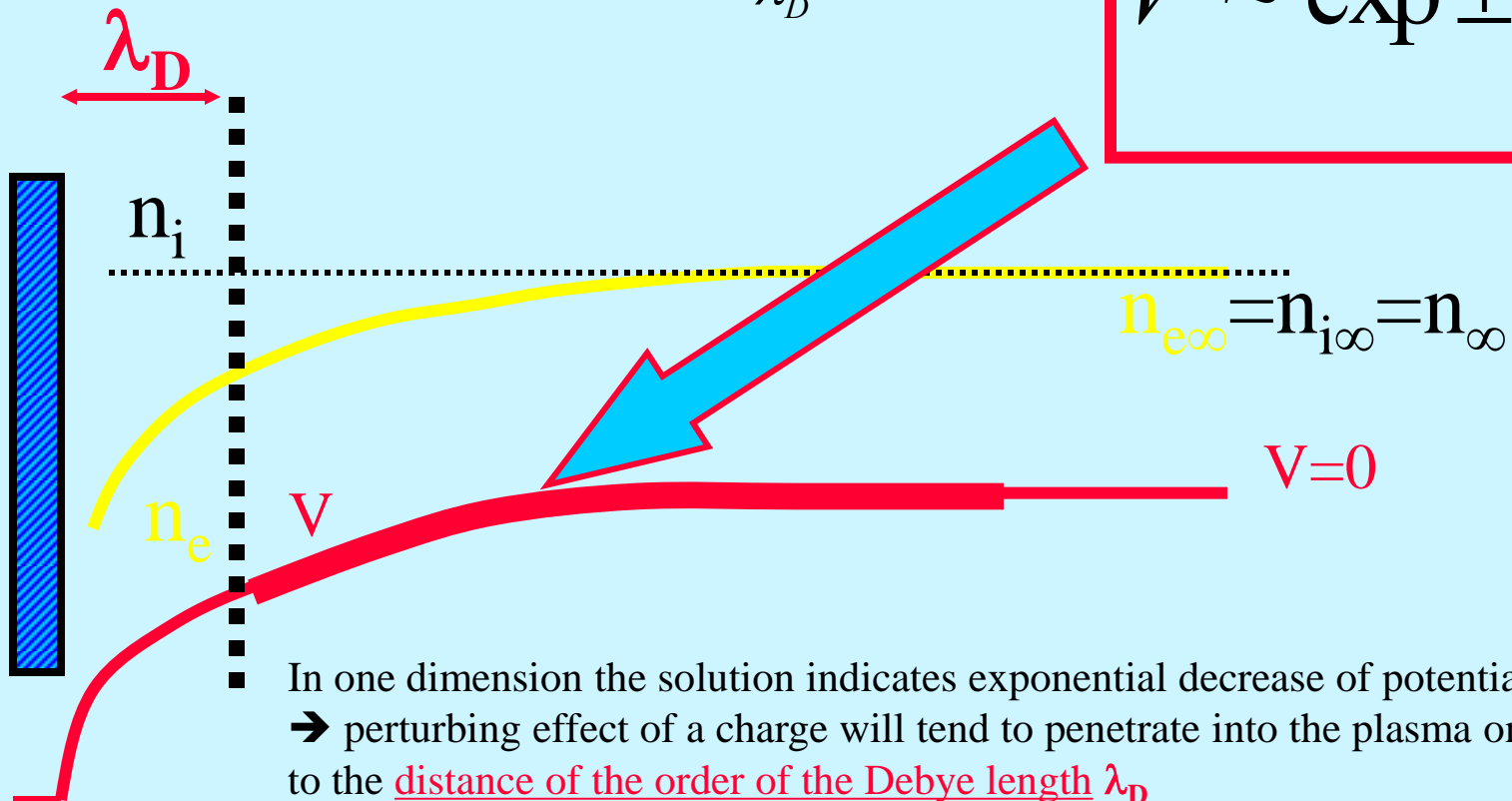
$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0} = \frac{-e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) = \frac{-e}{\epsilon_0} n_\infty [1 - \exp(\frac{eV}{kT_e})]$$

$$\nabla^2 V = \frac{-e}{\epsilon_0} n_\infty [\frac{-eV}{kT_e}] = \frac{e}{\epsilon_0} n_\infty \frac{eV}{kT_e} = \frac{V}{\lambda_D^2}$$

$$\lambda_D = (\epsilon_0 kT_e / e^2 n_\infty)^{1/2}$$

$$\nabla^2 V = \frac{V}{\lambda_D^2}$$

$$V \sim \exp \pm \frac{x}{\lambda_D}$$



Linear approximation just to understand problem

Debye shielding 3

$$n_e = n_\infty \exp(eV / kT_e) \quad \nabla^2 V = \frac{V}{\lambda_D^2} \quad \Rightarrow \quad V \sim \exp \pm \frac{x}{\lambda_D}$$

$eV \ll kT_e$

$$\lambda_D = (\epsilon_0 k T_e / e^2 n_\infty)^{1/2}$$

$$\lambda_D = l_d = 69 \sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \text{ in } K, n \text{ in } m^{-3}$$

For laboratory plasma with $T_e = 1 \text{ eV}$ and $n_e = 10^{11} \text{ cm}^{-3} \rightarrow \underline{\lambda_D = 23 \mu\text{m}}$

$n_e = 10^{11} \text{ cm}^{-3} \rightarrow$ “distance” between particles $\sim 2 \mu\text{m}$;

For plasma with $T_e = 0.001 \text{ eV}$ ($\sim 10 \text{ K}$) and $n_e = 10^{11} \text{ cm}^{-3} \rightarrow \underline{\lambda_D = 0.7 \mu\text{m}}$

$n_e = 10^{11} \text{ cm}^{-3} \rightarrow$ “distance” between particles $\sim 2 \mu\text{m}$;

For plasma with $T_e = 0.001 \text{ eV}$ ($\sim 10 \text{ K}$) and $n_e = 10^7 \text{ cm}^{-3} \rightarrow \underline{\lambda_D = 74 \mu\text{m}}$

Linear approximation just to understand problem

Potential of a Uniform Sphere of Charge

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

Debye shielding 4

(not in SI!):

In spherical symmetry Poisson's equation gives (*not in SI!*):

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \{Vr\} = \frac{4\pi e^2 n_{e\infty}}{kT_e} V(r) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{A}{r} \exp(-r / \lambda_{DX}) + \frac{B}{r} \exp(r / \lambda_{DX})$$

$$\lambda_{DX} = (kT_e / 4\pi e^2 n_{\infty})^{1/2}$$

Applying the boundary condition that as r tends to infinity V must tend to zero gives $B=0$,
 V must tend to e/r as r tend to zero \rightarrow

$$V = \frac{e}{r} \exp(-r / \lambda_{DX})$$

(not in SI!):

$$\lambda_D = (\epsilon_0 kT_e / e^2 n_{\infty})^{1/2}$$

Ak napíšeme Laplaceov operátor vo sférických súradniciach a zvažíme sférickú symetriu problému, dostaneme pre $\varphi(r)$ nelineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) = - \frac{en_0}{\varepsilon_0} \left[\exp \left(- \frac{e\varphi(r)}{kT_+} \right) - \exp \left(\frac{e\varphi(r)}{kT_-} \right) \right].$$

Rovnicu možno riešiť numericky. Debyeova-Hückelova teória využíva linearizáciu nelineárnej diferenciálnej rovnice. Linearizácia spočíva v rozvoji exponenciálnej funkcie do Taylorovho radu. Pritom v rade ponecháme iba prvé dva členy: absolútny a lineárny. Tento postup je možný pri splnení nasledujúcich podmienok (s kritériom na ich splnenie sa budeme zaoberať neskôr)

$$\frac{e\varphi}{kT_+} \ll 1, \quad \frac{e\varphi}{kT_-} \ll 1. \quad (2.2)$$

Po vykonaní linearizácie pôvodná diferenciálna rovnica nadobudne tvar

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k} \left(\frac{1}{T_+} + \frac{1}{T_-} \right) \varphi(r) = \frac{1}{h^2} \varphi(r),$$

pričom sme zaviedli označenie

$$\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k} \left(\frac{1}{T_+} + \frac{1}{T_-} \right) = \frac{1}{h^2}. \quad (2.3)$$

Je zrejmé, že fyzikálny rozmer h je meter. Zavedením substitúcie $r = hx$ získame lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\varphi}{dx} \right) = \varphi.$$

Jej riešením je funkcia (použijeme substitúciu $\varphi = z/x$)

$$\varphi(x) = \frac{A'}{x} \exp(-x) + \frac{B'}{x} \exp(x),$$

kde A' a B' sú integračné konštanty. Ak sa vrátíme znova k nezávisle premennej r , dostaneme pre elektrostatický potenciál výraz

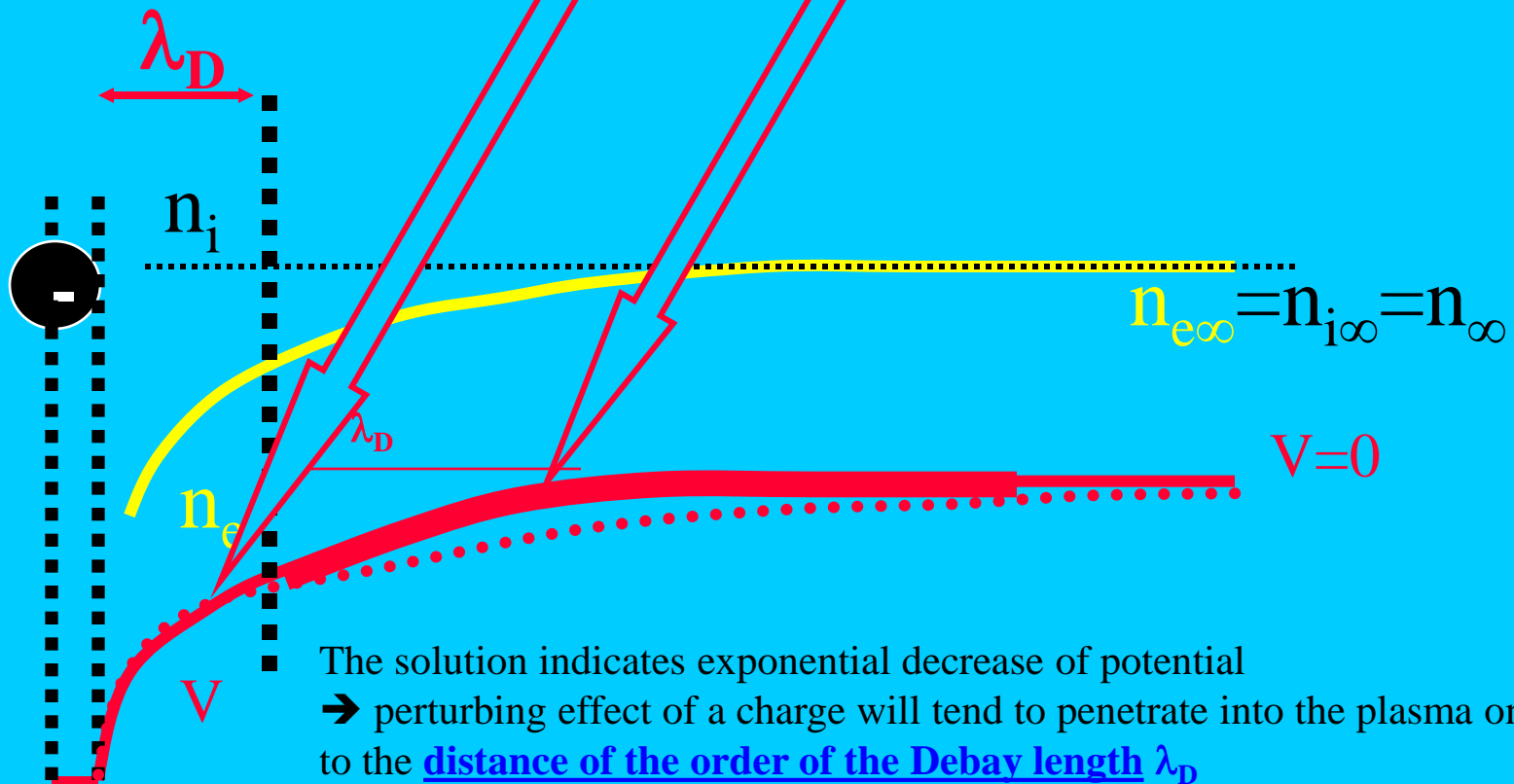
$$\varphi(r) = \frac{A}{r} \exp \left(-\frac{r}{h} \right) + \frac{B}{r} \exp \left(\frac{r}{h} \right).$$

Martišovič

Debye shielding 5

$$V = \frac{e}{r} \exp(-r / \lambda_{DX})$$

$$\lambda_{DX} = (kT_e / 4\pi e^2 n_\infty)^{1/2}$$



Debye shielding 6

$$V = \frac{e}{r} \exp(-r / \lambda_{DX})$$

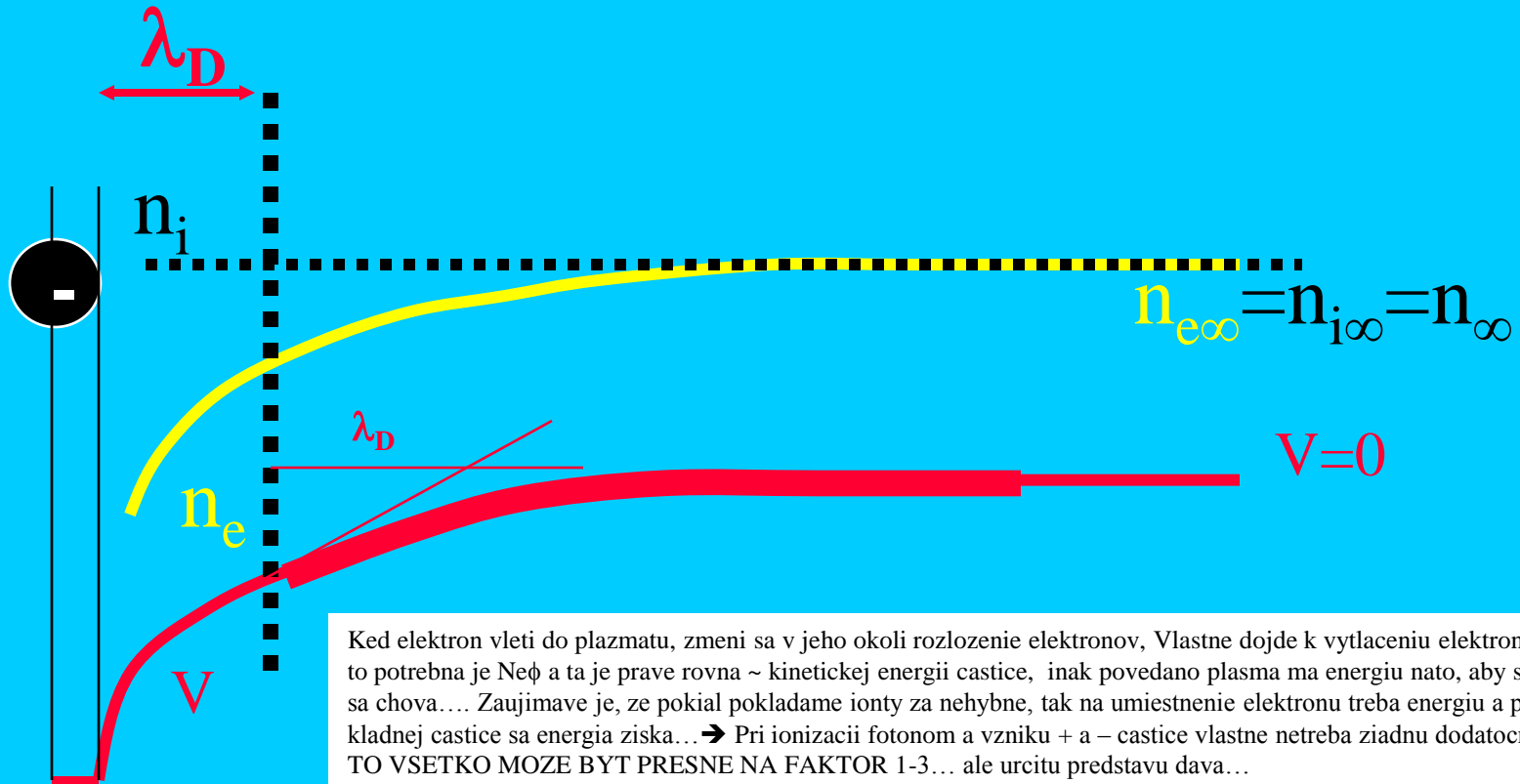
$$\lambda_{DX} = (kT_e / 4\pi e^2 n_\infty)^{1/2}$$

Just rewritten

$$(n_\infty \lambda_{DX}^3 4/3\pi) 3e^2 / \lambda_{DX} = kT_e$$

$$N(e^2 / \lambda_{DX}) \approx Ne(e / \lambda_{DX}) \approx Ne\phi \approx \text{potencial energy} \approx kT_e$$

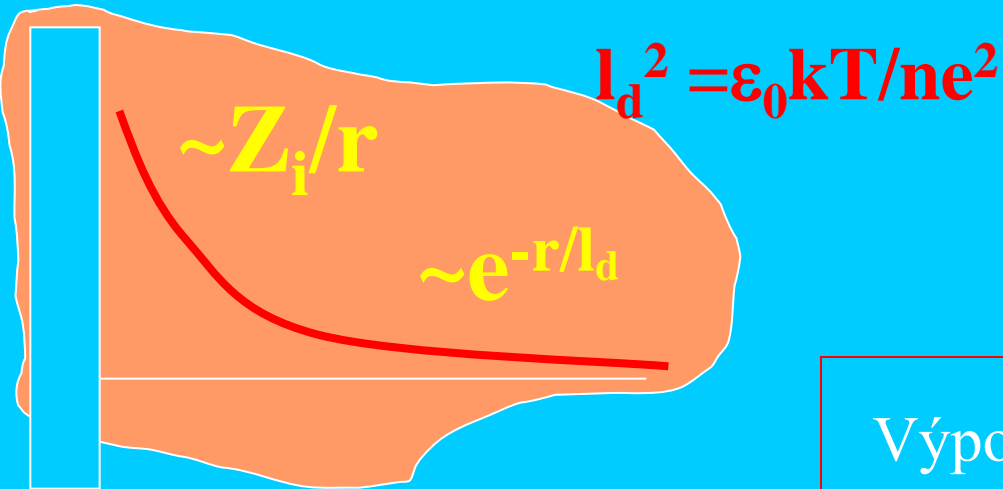
N – number of particles in debye sphere



Ked elektron vleti do plazmatu, zmeni sa v jeho okoli rozlozenie elektronov, Vlastne dojde k vytlaceniu elektronov - energia na to potrebna je $Ne\phi$ a ta je prave rovna ~ kinetickej energii castice, inak povedano plasma ma energiu nato, aby sa chovalo jak sa chova.... Zaujimave je, ze pokial pokladame ionty za nehybne, tak na umiestnenie elektronu treba energiu a pri umiestneni kladnej castice sa energia ziska... → Pri ionizacii fotonom a vzniku + a – castice vlastne netreba ziadnu dodatocnu energiu... TO VSETKO MOZE BYT PRESNE NA FAKTOR 1-3... ale urcitu predstavu dava... Dalo by sa to chapat aj inak: ionizujem casticu a potom + a – vzdialim na vzdialenost λ_D castice uz na seba neposobia ... energia potrebna na separaciu bola $e.e / \lambda_D$ vsetko samozrejme urobiť v SI

Ještě raz

- Stínění v plazmě
- Ustanovení debyovského stínění



$$\phi(r) = (Z_i e / 4\pi \epsilon_0) / r * e^{-r/l_d}$$

$$\sigma_c(v) = 2\pi \int b \, db$$

Problém srážek na velkou vzdálenost

Výpočet:

Martišovič

$$\lambda_D = l_d = 69 \sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \text{ in } K, n \text{ in } m^{-3}$$

at **1000K**, $n = 4.8 \times 10^{12} m^{-3} = 4.8 \times 10^6 cm^{-3}$

$l_d = 1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}$

at **10K**, $n = 1 \times 10^{10} m^{-3} = 1 \times 10^4 cm^{-3}$

$l_d \sim 2 \text{ mm} \sim 0.002 \text{ m}$

Další kroky

eV K

$$\lambda_{De} \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 T_e}{n_e e^2}} \simeq 7434 \sqrt{\frac{T_e (\text{eV})}{n_e (\text{m}^{-3})}} \text{ m, } \text{ electron Debye length.}$$

$$l_d = 69 \sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \text{ in K, } n \text{ in m}^{-3}$$

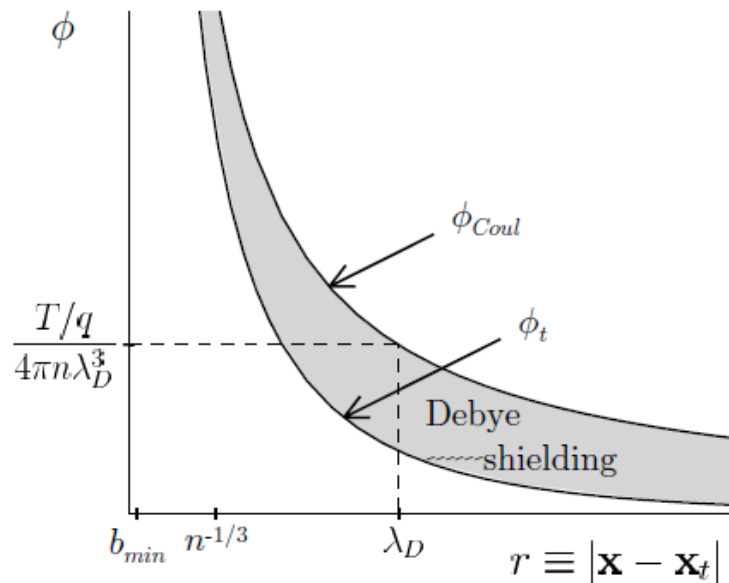


Figure 1.1: Potential ϕ_t around a test particle of charge q_t in a plasma and Coulomb potential ϕ_{Coul} , both as a function of radial distance from the test particle. The shaded region represents the Debye shielding effect. The characteristic distances are: λ_D , Debye shielding distance; $n_e^{-1/3}$, mean electron separation distance; $b_{min}^{cl} = q^2 / (4\pi\epsilon_0 T)$, classical distance of “closest approach” where the $e\phi/T \ll 1$ approximation breaks down.

Debye lengths

$$l_d = 69 \sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \text{ in } K, n \text{ in } m^{-3}$$

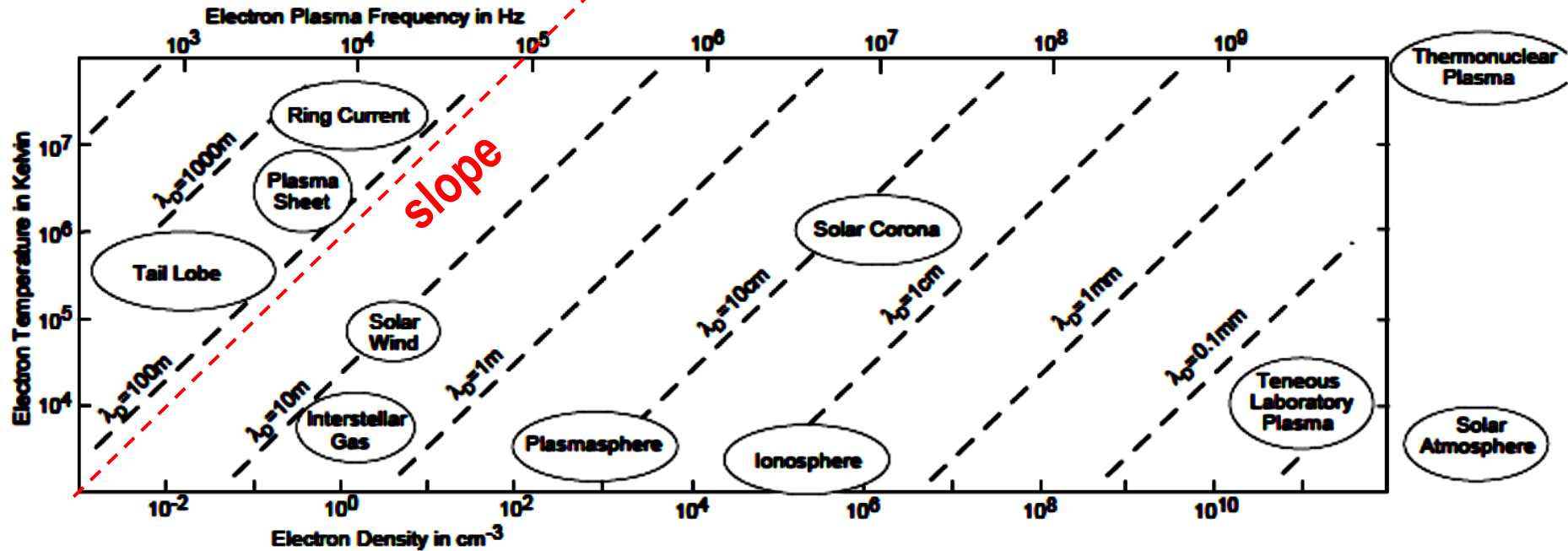
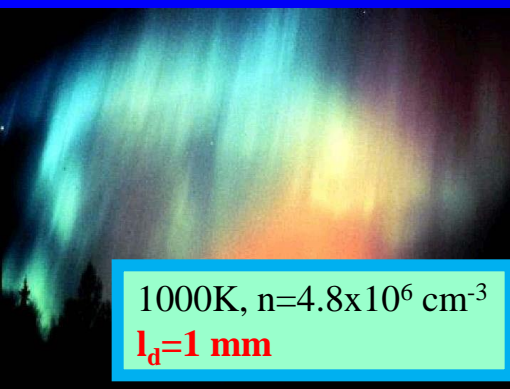
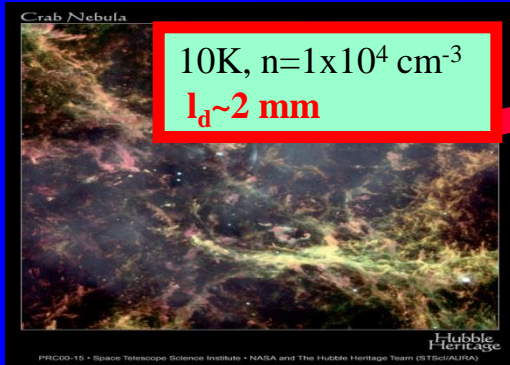


Figure 1.1: Plasma parameters.

Temperatures and energies



$$l_d = 69 \sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \text{ in K}, n \text{ in } m^{-3}$$



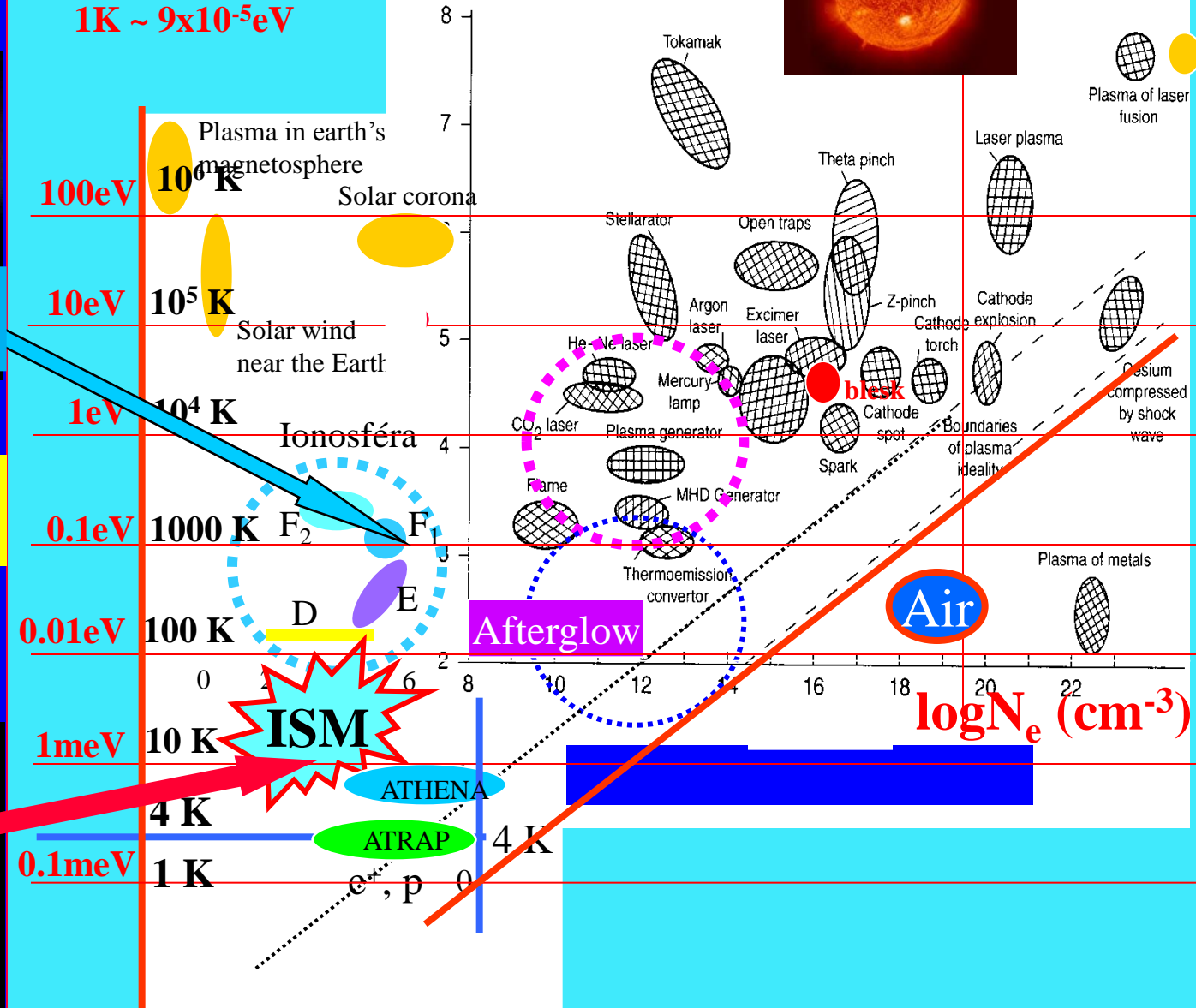
$$E/k \leftrightarrow T$$

1eV ~ 11 400 K
 1K ~ $9 \times 10^{-5} \text{ eV}$

$\log T_e \text{ (K)}$ Solar nucleus



STATE OF MATTER



Debye lengths

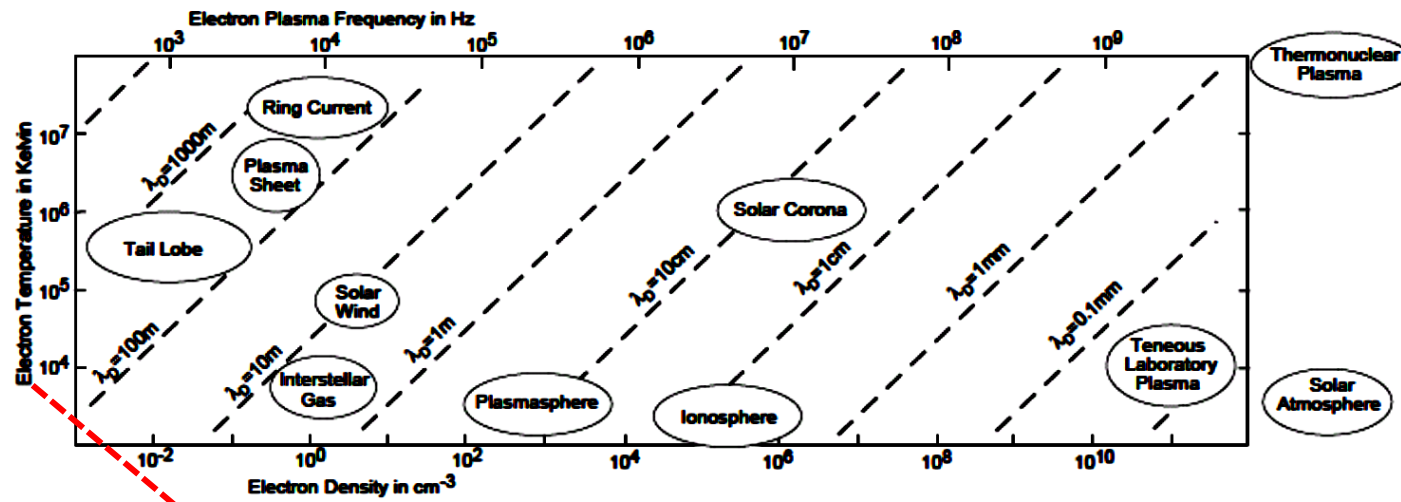


Figure 1.1: Plasma p

$$l_d = 69 \sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \text{ in K}, n \text{ in } \text{m}^{-3}$$

1 Basics of Plasma Physics

9

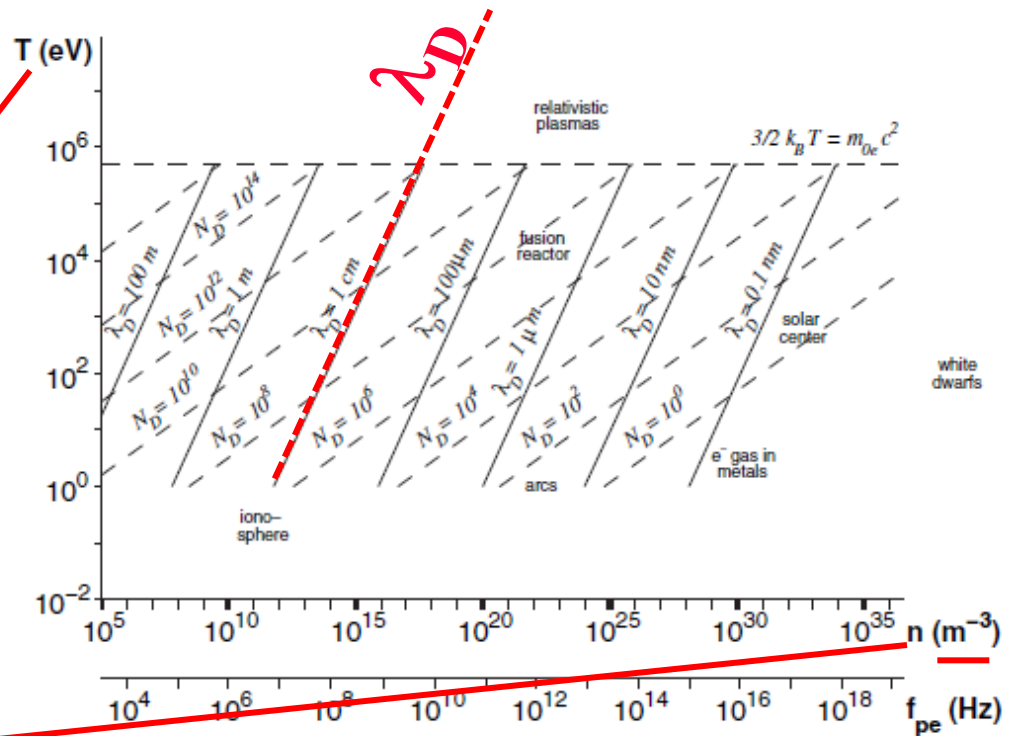


Fig. 1.4. Lines of constant Debye length λ_D and plasma parameter N_D , respectively, in the diagram of typical plasmas

$$\lambda_{De} \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 T_e}{n_e e^2}} \simeq 7434 \sqrt{\frac{T_e (\text{eV})}{n_e (\text{m}^{-3})}} \text{ m, electron Debye length.}$$

Debyeho stínící vzdálenost

- Debyeho stínící vzdálenost
- Potenciál kolem náboje v plazmě.

$$\Delta\phi = - 1/\epsilon_0 e \sum Z_i n_i$$

Plazma

$$\Delta\phi = - 1/\epsilon_0 (Z_1 n_1 + Z_2 n_2)$$

Uvážíme-li, že koncentrace jednotlivých složek plazmatu jsou dány Maxwellovým-Boltzmannovým zákonem:

$$n_i = n_{i0} e^{-Z_i e \phi / k T_i}$$

Dostaneme:

$$\Delta\phi = - e/\epsilon_0 (Z_1 n_{10} e^{-Z_1 e \phi / k T_1} + Z_2 n_{20} e^{-Z_2 e \phi / k T_2})$$

Pro $Z_i e \phi \ll k T_i$

$$\Delta\phi = - e/\epsilon_0 \{ \underbrace{(Z_1 n_{10} + Z_2 n_{20})}_{=0} - \phi (Z_1^2 e n_{10} / k T_1 + Z_2^2 e n_{20} / k T_2) \}$$

Debyeho stínící vzdálenost

Debye-Hückel radius

- Debyeho stínící vzdálenost.
- Debyeovský poloměr

$$\Delta\phi = -e/\epsilon_0 \{ (Z_1 n_{10} + Z_2 n_{20}) - \phi (Z_1^2 e n_{10}/kT_1 + Z_2^2 e n_{20}/kT_2) \}$$

=0

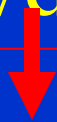
= $1/l_d^2$

$$\Delta\phi = \phi/l_d^2$$

$$l_d^2 = \frac{\epsilon_0 k T_1 T_2}{e^2 (Z_1^2 n_{10} T_2 + Z_2^2 n_{20} T_1)}$$

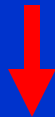
Vzhledem k symetrii problému... kolem bodového náboje.

$$1/r \, d^2(r\phi)/dr^2 = \phi/l_d^2$$

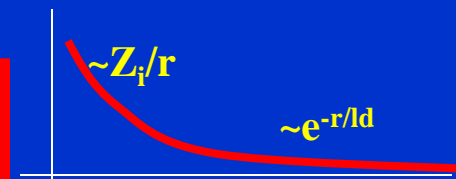


$$\phi(r) = 1/r (C_1 e^{-r/l_d} + C_2 e^{+r/l_d})$$

$$\phi(\infty)=0 \rightarrow C_2=0,$$



$$\phi(r) = (Z_i e / 4\pi\epsilon_0 / r) * e^{-r/l_d}$$



Debyeho stínící vzdálenost

- Shrňte, co se od účastníků očekává – pochopit, co je plazma.

$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T_1 T_2}{e^2 (Z_1^2 n_{10} T_2 + Z_2^2 n_{20} T_1)}$$

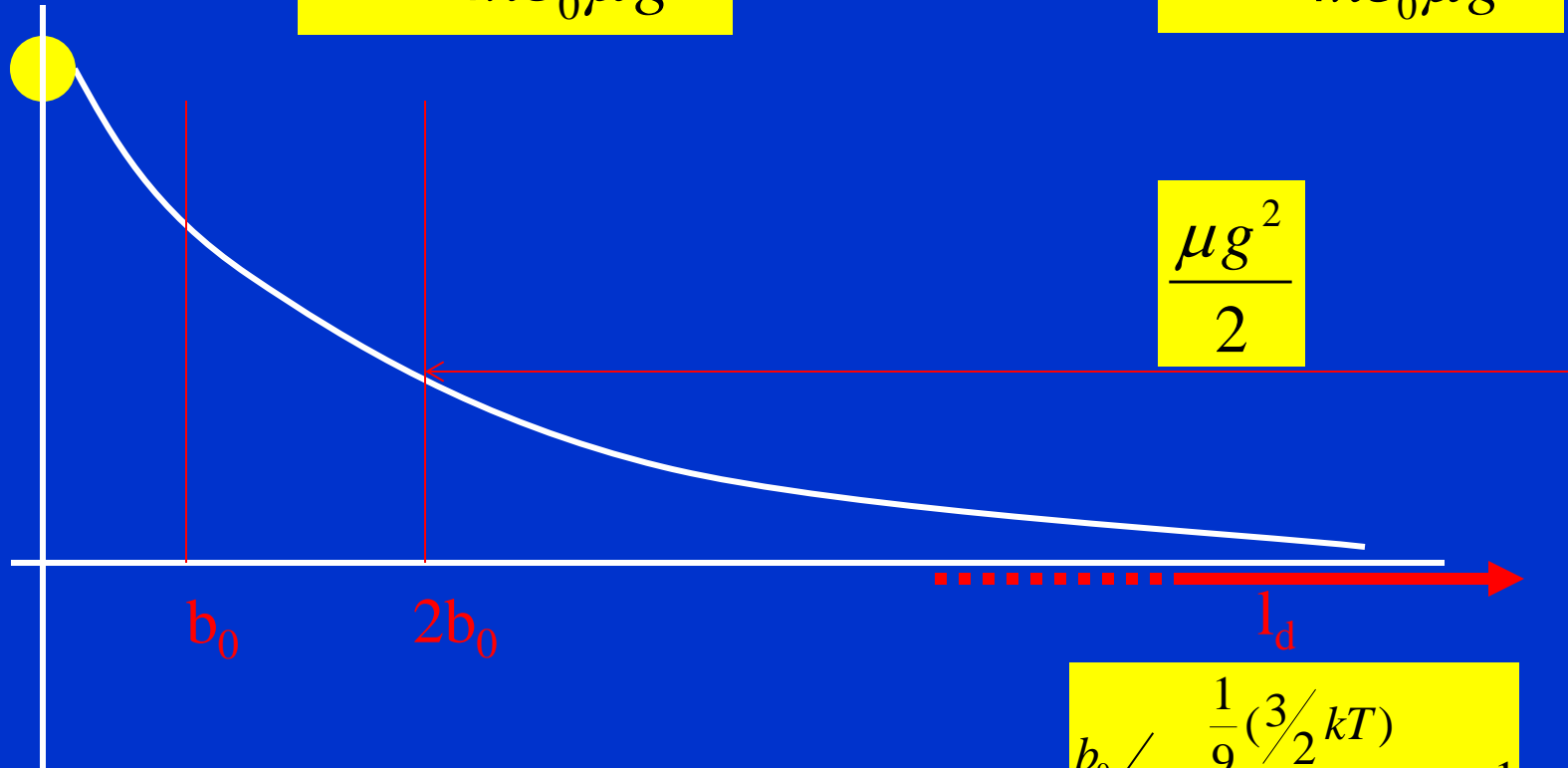
For quasineutral plasma,
 $n_{10} = n_{20} = n/2 =$ with $T_1 = T_2$ we obtain

$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T}{n e^2}$$

DEFINICIA:

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4 \pi \varepsilon_0 \mu g^2}$$

$$b_0 = \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0 \mu g^2}$$



$$b_0 / l_d = \frac{\frac{1}{9} (3/2 kT)}{N^{1/2} \mu g^2} \lll 1$$

Debyeho stínící vzdálenost

■ Jiný pohled

$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T_1 T_2}{e^2 (Z_1^2 n_{10} T_2 + Z_2^2 n_{20} T_1)}$$

For quasineutral plasma,
 $n_{10} = n_{20} = n/2 =$ with $T_1 = T_2$ we obtain

$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T}{n e^2}$$

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4 \pi \varepsilon_0 \mu g^2}$$

$$b_0 = \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0 \mu g^2}$$

$$4 \pi b_0 \mu g^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{k T}{n l_d^2} = \frac{e^2}{\varepsilon_0}$$

$$4 \pi b_0 \mu g^2 = \frac{e^2}{\varepsilon_0} = \frac{k T}{n l_d^2}$$

$$b_0 \mu g^2 = \frac{l_d k T / 3}{\frac{4}{3} \pi n l_d^3} = \frac{l_d k T / 3}{N_D}$$

N_D je počet částic v „debayove sféře“

The problem is that b_0 is for individual collision
 l_d is for many particles...

$$\frac{b_0}{l_d} = \frac{\frac{1}{9} (3/2 k T)}{\frac{1}{2} \mu g^2} \lll 1$$

It is equivalent to condition $e \phi \ll k T$

Převod jednotek, plazmatický parametr

- $kT \sim 1\text{eV} \rightarrow T = 11600\text{K}$
- $300\text{K} \rightarrow kT \sim 25.8\text{meV}$, $3/2kT = 38.8\text{meV}$
- $1\text{eV} \sim 8065.5\text{cm}^{-1}$

Plazmatický parametr;

Ideální plazma --- potenciální energie částic je \ll kinetická energie

$$U(r) \ll kT$$

$$r^3 \sim 1/n$$

$$\gamma = ne^6 / (kT)^3 \ll \ll 1$$

γ = plazmatický parametr

debyeovo stínění platí jenom tehdy, pokud $N_d \gg \gg 1$

$$N_d = n \cdot \frac{4}{3} \pi l_d^3 = \frac{1.38 \times 10^6 T^{3/2}}{n^{1/2}}, \quad T \text{ v } K$$

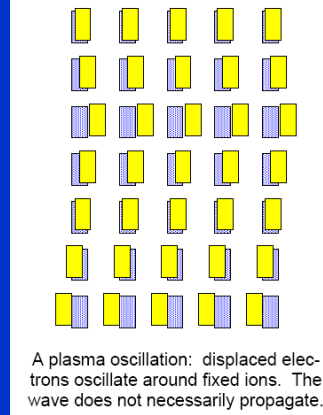
$$N_d \gg \gg 1, \rightarrow l_d^3 \cdot n \gg \gg 1$$

$$l_d \ll L,$$

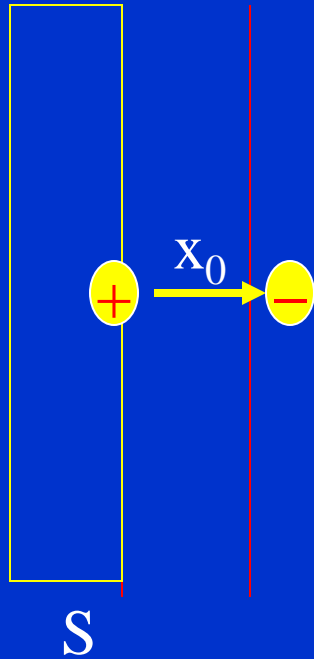
Debye-Hückel radius

Oscilace plazmatu

■ Pozor jiné jednotky



Gausova veta



$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q / \epsilon_0$$



$$E = enx / \epsilon_0$$

$$m_e d^2(x) / dt^2 = -eE$$

$$\omega_p = (4\pi n e^2 / m_e)^{1/2}$$

$$d^2 x / dt^2 = -\omega_p^2 x$$



Langmuir, or plasma, frequency

$$f_p = 9 \sqrt{n(10^{12} \text{ cm}^{-3})} \text{ GHz}$$

$$l_d \omega_p = (2T / m_e)^{1/2} \approx \text{thermal electron velocity}$$

1.4 Plasma oscillations

So far we have considered characteristics, such as density and temperature, of a plasma in equilibrium. We can also ask how fast the plasma will respond to an external disturbance, which could be due to electromagnetic waves (e.g. a laser pulse) or particle beams. Consider a quasi-neutral plasma slab in which an electron layer is displaced from its initial position by a distance δ , as illustrated in Fig. 3. This creates two 'capacitor' plates with surface charge $\sigma = \pm en_e \delta$, resulting in an electric field

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{en_e \delta}{\epsilon_0}.$$

The electron layer is accelerated back towards the slab by this restoring force according to

$$m_e \frac{dv}{dt} = -m_e \frac{d^2 \delta}{dt^2} = -eE = \frac{e^2 n_e \delta}{\epsilon_0},$$

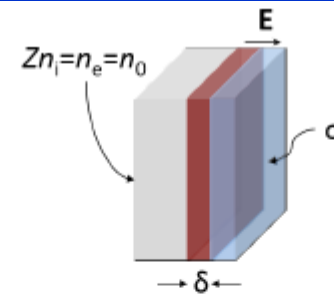


Fig. 3: Slab or capacitor model of an oscillating electron layer

or

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + \omega_p^2 \delta = 0$$

where

$$\omega_p \equiv \left(\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} \simeq 5.6 \times 10^4 \left(\frac{n_e}{\text{cm}^{-3}} \right)^{1/2} \text{ s}^{-1} \quad (11)$$

is the *electron plasma frequency*.

Electron plasma frequency

This quantity can be obtained via another route by returning to the Debye sheath problem of Section 1.1 and asking how quickly it would take the plasma to adjust to the insertion of the foreign charge. For a plasma of temperature T_e , the response time to recover quasi-neutrality is just the ratio of the Debye length to the thermal velocity $v_{te} \equiv \sqrt{k_B T_e / m_e}$; that is,

$$t_D \simeq \frac{\lambda_D}{v_{te}} = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e} \cdot \frac{m}{k_B T_e} \right)^{1/2} = \omega_p^{-1}.$$

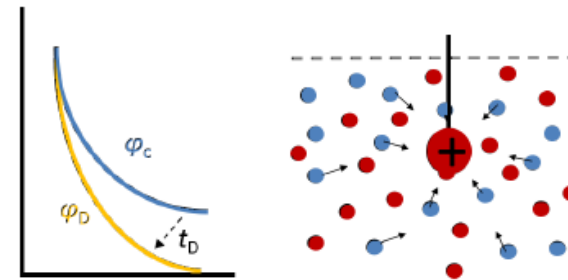


Fig. 4: Response time to form a Debye sheath

If the plasma response time is shorter than the period of an external electromagnetic field (such as a laser), then this radiation will be *shielded out*. To make this statement more quantitative, consider the ratio

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2}.$$

Setting this to unity defines the wavelength λ_μ for which $n_e = n_c$, or

$$n_c \simeq 10^{21} \lambda_\mu^{-2} \text{ cm}^{-3}. \quad (12)$$

Radiation with wavelength $\lambda > \lambda_\mu$ will be reflected. In the pre-satellite/cable era, this property was exploited to good effect in the transmission of long-wave radio signals, which utilizes reflection from the ionosphere to extend the range of reception.

Typical gas jets have $P \sim 1$ bar and $n_e = 10^{18} - 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, and the critical density for a glass laser is $n_c(1\mu) = 10^{21} \text{ cm}^{-3}$. Gas-jet plasmas are therefore *underdense*, since $\omega^2/\omega_p^2 = n_e/n_c \ll 1$. In this case, *collective effects* are important if $\omega_p \tau_{\text{int}} > 1$, where τ_{int} is some characteristic interaction time, such as the duration of a laser pulse or particle beam entering the plasma. For example, if $\tau_{\text{int}} = 100$ fs and $n_e = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, then $\omega_p \tau_{\text{int}} = 1.8$ and we will need to consider the plasma response on the interaction time-scale. Generally this is the situation we seek to exploit in all kinds of plasma applications, including short-wavelength radiation, nonlinear refractive properties, generation of high electric/magnetic fields and, of course, particle acceleration.

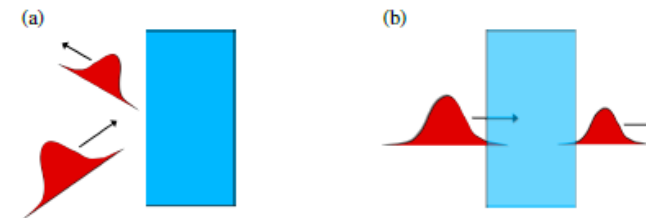


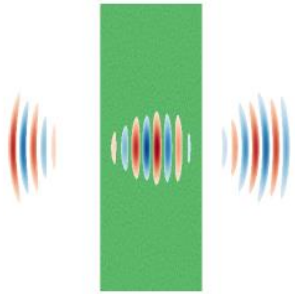
Fig. 5: (a) Overdense plasma, with $\omega < \omega_p$, showing mirror-like behaviour. (b) Underdense plasma, with $\omega > \omega_p$, which behaves like a nonlinear refractive medium.

Critical density

Plasma response time ω_p^{-1} dictates type of interaction with time-varying external fields - eg: laser

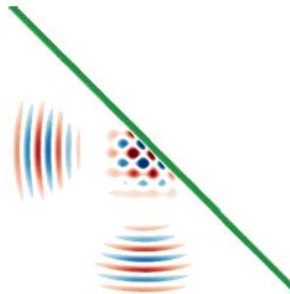
Underdense plasma, $\omega > \omega_p$:

- slow plasma response
- nonlinear refractive medium



Overdense plasma, $\omega < \omega_p$:

- radiation shielded out
- mirror-like optics



The critical density

To make this more quantitative, consider ratio:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2}.$$

Setting this to unity defines the wavelength for which $n_e = n_c$, or

Critical density

$$n_c \simeq 10^{21} \lambda_\mu^{-2} \text{ cm}^{-3} \quad (9)$$

above which radiation with wavelengths $\lambda > \lambda_\mu$ will be reflected.
cf: radio waves from ionosphere.

Summary

- Ideal, thermal plasmas possess intrinsic **length** scale: λ_D
- Characteristic **timescale**: ω_p^{-1}
- Frequency ratio ω_p/ω_0 determines nature of interaction:
 - $\omega_p/\omega_0 < 1 \rightarrow$ propagation
 - $\omega_p/\omega_0 > 1 \rightarrow$ reflection

In previous text

$$\lambda_D = (\epsilon_0 k T_e / e^2 n_\infty)^{1/2}$$

$$N_d = n \cdot \frac{4}{3} \pi \lambda_d^3 = \frac{1.38 \times 10^6 T^{3/2}}{n^{1/2}}, \quad T \text{ v } K$$

$$\omega_p = (4 \pi n e^2 / m_e)^{1/2}$$

Standard formulae

Name	Symbol	Formula (SI)	Formula (cgs)
Debye length	λ_D	$\left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e} \right)^{1/2} \text{ m}$	$\left(\frac{k_B T_e}{4 \pi e^2 n_e} \right)^{1/2} \text{ cm}$
Particles in Debye sphere	N_D	$n \frac{4 \pi}{3} \lambda_D^3$	$n \frac{4 \pi}{3} \lambda_D^3$
Plasma frequency (electrons)	ω_{pe}	$\left(\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} \text{ s}^{-1}$	$\left(\frac{4 \pi e^2 n_e}{m_e} \right)^{1/2} \text{ s}^{-1}$
Plasma frequency (ions)	ω_{pi}	$\left(\frac{Z^2 e^2 n_i}{\epsilon_0 m_i} \right)^{1/2} \text{ s}^{-1}$	$\left(\frac{4 \pi Z^2 e^2 n_i}{m_i} \right)^{1/2} \text{ s}^{-1}$
Thermal velocity	$v_{te} = \omega_{pe} \lambda_D$	$\left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2} \text{ ms}^{-1}$	$\left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2} \text{ cms}^{-1}$
Electron gyrofrequency	ω_c	$e B / m_e \text{ s}^{-1}$	$e B / m_e \text{ s}^{-1}$
Electron-ion collision frequency	ν_{ei}	$\frac{\pi^{3/2} n_e Z e^4 \ln \Lambda}{2^{1/2} (4 \pi \epsilon_0)^2 m_e^2 v_{te}^3} \text{ s}^{-1}$	$\frac{4 (2 \pi)^{1/2} n_e Z e^4 \ln \Lambda}{3 m_e^2 v_{te}^3} \text{ s}^{-1}$
Coulomb-logarithm	$\ln \Lambda$	$\ln \frac{9 N_D}{Z}$	$\ln \frac{9 N_D}{Z}$

Useful formulae

Plasma frequency	$\omega_{pe} = 5.64 \times 10^4 n_e^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$
Critical density	$n_c = 10^{21} \lambda_L^{-2} \text{ cm}^{-3}$
Debye length	$\lambda_D = 743 T_e^{\frac{1}{2}} n_e^{-\frac{1}{2}} \text{ cm}$
Skin depth	$\delta = c/\omega_p = 5.31 \times 10^5 n_e^{-\frac{1}{2}} \text{ cm}$
Elektron-ion collision frequency	$\nu_{ei} = 2.9 \times 10^{-6} n_e T_e^{-\frac{3}{2}} \ln \Lambda \text{ s}^{-1}$
Ion-ion collision frequency	$\nu_{ij} = 4.8 \times 10^{-8} Z^4 \left(\frac{m_p}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} n_i T_i^{-\frac{3}{2}} \ln \Lambda \text{ s}^{-1}$
Quiver amplitude	$a_0 \equiv \frac{p_{osc}}{m_e c} = \left(\frac{I \lambda_L^2}{1.37 \times 10^{18} \text{ W cm}^{-2} \mu\text{m}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$
Relativistic focussing threshold	$P_c = 17.5 \left(\frac{n_c}{n_e} \right) \text{ GW}$

T_e in eV; n_e, n_i in cm^{-3} , wavelength λ_L in μm

$$n_e(\mathbf{r}, t) = n_0 + n'_e(\mathbf{r}, t)$$

In the momentum equation we have assumed that the rate of momentum loss from the electron gas due to collisions is negligible. Considering singly charged ions, the charge density is given by

$$\rho(\mathbf{r}, t) = -e[n_0 + n'_e(\mathbf{r}, t)] + en_0 = -en'_e(\mathbf{r}, t) \quad (1.4)$$

where the ion density was considered to be constant and uniform, and equal to n_0 (neglecting ion motion). Therefore,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} = -\frac{e}{\epsilon_0} n'_e(\mathbf{r}, t) \quad (1.5)$$

Eqs. (1.2), (1.3), and (1.5) constitute a complete set of equations to be solved for the variables $n'_e(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t)$, and $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Taking the divergence of (1.3) and using (1.2) to substitute for $\nabla \cdot \mathbf{u}_e$, we obtain

$$\frac{\partial^2 n'_e(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \frac{en_0}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.6)$$

Combining (1.5) and (1.6) to eliminate $\nabla \cdot \mathbf{E}$, yields

$$\frac{\partial^2 n'_e(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 n'_e(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.7)$$

where

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (1.8)$$

is called the *electron plasma frequency*. Equation (1.7) shows that $n'_e(\mathbf{r}, t)$ varies harmonically in time at the electron plasma frequency,

$$n'_e(\mathbf{r}, t) = n'_e(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_{pe} t) \quad (1.9)$$

In fact, all first-order perturbations have a harmonic time variation at the plasma frequency ω_{pe} . To justify this statement it is convenient to start with the assumption that all first-order quantities vary harmonically in time, as $\exp(-i\omega t)$. Eqs. (1.2) and (1.3) become, in this case,

$$n'_e = -\frac{i}{\omega} n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_e \quad (1.10)$$

$$\mathbf{u}_e = -\frac{ie}{\omega m_e} \mathbf{E} \quad (1.11)$$

which can be combined into

$$n'_e = -\frac{n_0 e}{\omega^2 m_e} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (1.12)$$

Substituting this expression for n'_e into (1.5), yields

$$\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.13)$$

which shows that a nontrivial solution requires $\omega = \omega_{pe}$. Therefore, all the perturbations vary harmonically in time at the electron plasma frequency. Further, for all variables there is no change in phase from point to point, implying the absence of wave propagation. The oscillations are therefore *stationary*. Also, (1.11) shows that the electron velocity is in the same direction as the electric field, so that these oscillations are *longitudinal*.

The electron plasma oscillations are also *electrostatic* in character. In order to show this aspect of the oscillations, consider Maxwell curl equations with a harmonic time variation,

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad (1.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} - i\omega \epsilon_0 \mathbf{E}) \quad (1.15)$$

The electric current density is given by

$$\mathbf{J} = -en_0 \mathbf{u}_e = \frac{in_0 e^2}{\omega m_e} \mathbf{E} \quad (1.16)$$

where we have used (1.11) for \mathbf{u}_e . Therefore,

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (1.17)$$

where we have defined a relative permittivity by

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (1.18)$$

For the electron plasma oscillations we have $\omega = \omega_{pe}$, so that $\epsilon_r = 0$, and (1.17) reduces to

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (1.19)$$

Since the curl of the gradient of any scalar function vanishes identically,

Vlastní oscilace a srážky

- Pozor jiné jednotky

$$\varpi_p = (4\pi n e^2 / m_e)^{1/2}$$

$$\tau_{collision} \sim 1 / \varpi_{collision}$$

Podmínka ideálnosti plazmatu

$$\varpi_p / \varpi_{collision} > 1$$

Many types of collisions

$$\omega_p = (4\pi n e^2 / m_e)^{1/2}$$

$$l_d = 69 \sqrt{\frac{T}{n}}, \quad T \text{ in } K, n \text{ in } m^{-3}$$

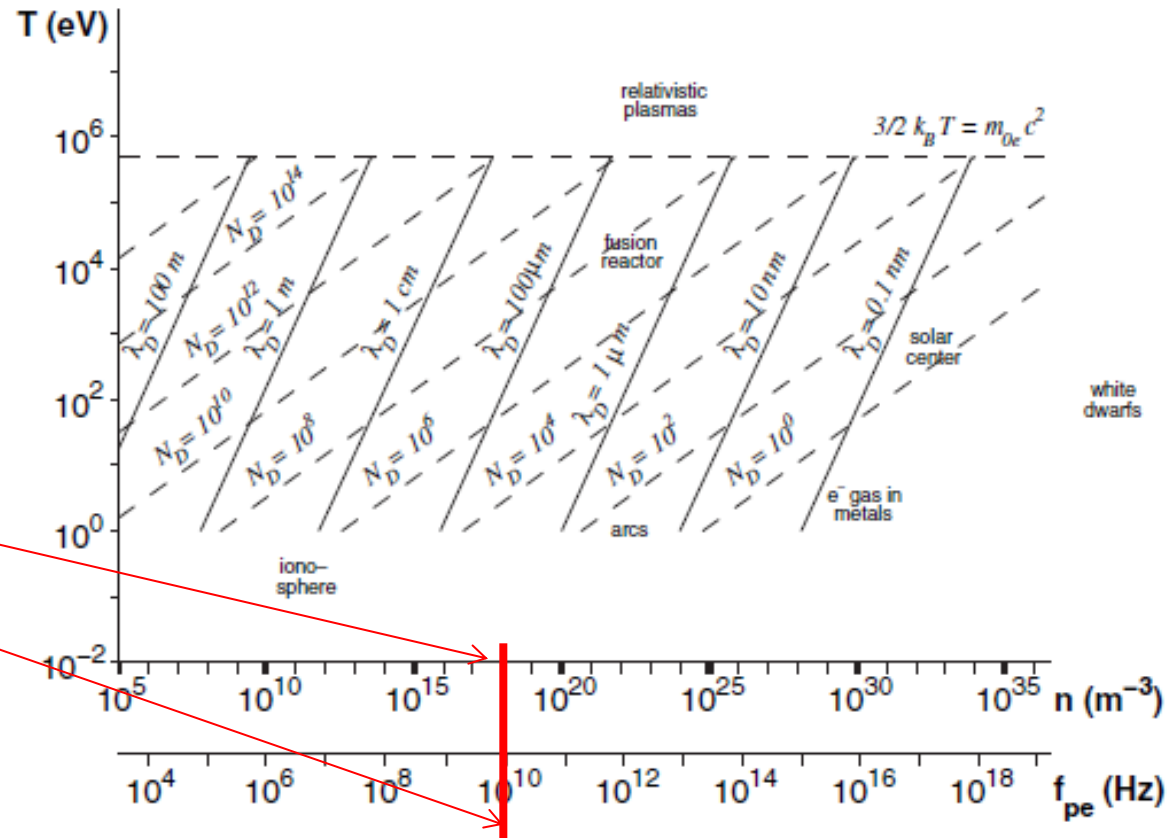
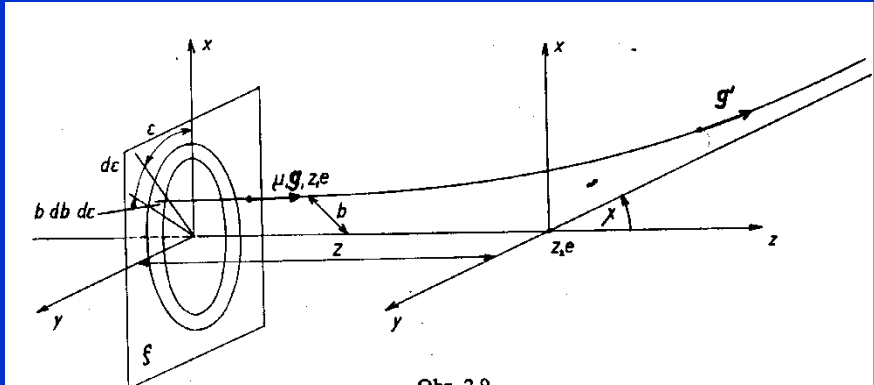


Fig. 1.4. Lines of constant Debye length λ_D and plasma parameter N_D , respectively, in the diagram of typical plasmas

$$\gamma = ne^6 / (kT)^3 \ll 1$$

Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus



$$\mathbf{F} = - \frac{d}{dt} \sum_{(i)} \mathbf{p}_{1i} = - \frac{g}{g} \mu \sum_{(i)} \frac{d}{dt} g_z,$$

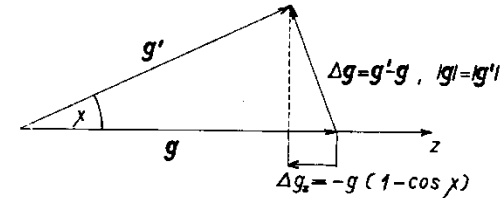
Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu

„Velký Kracík“

J.Kracík, B. Šesták a L. Aubrecht

Academia Praha 1974

kde suma přes i značí sečítání přes všechny částice svazku. Výraz $\sum_{(i)} (dg_z/dt)$ je možno celkem snadno určit: fyzikálně totiž znamená změnu relativní rychlosti svazku částic za jednotku času, nebo – což je totéž – změnu relativní rychlosti jedné částice svazku vlivem srážky, vynásobenou počtem srážek za jednotku času (předpokládáme, že interakci svazku můžeme rozdělit na jednotlivé binární srážky).



Obr. 2.10.

Změnu relativní rychlosti jedné částice svazku Δg_z určíme snadno z obr. 2.10. Snadno zjistíme, že

$$(2.136) \quad \Delta g_z = -g(1 - \cos \chi) = -2g \sin^2 \frac{\chi}{2}.$$

Počet srážek za jednotku času závisí zřejmě na průřezu svazku; za jednotku času „dosáhnou“ silového centra pouze ty částice, jejichž vzdálenost $Z \leq g \cdot 1 \text{ sec}$. Počet částic, které projdou elementární plochou $b db d\epsilon$ za jednotku času a „dosáhnou“ silového centra, pak zřejmě bude

$$(2.137) \quad g n_1 b db d\epsilon,$$

kde n_1 je koncentrace částic svazku. Vynásobíme-li nyní (2.136) výrazem (2.137) a integrujeme-li výsledek přes celou rovinu ξ , dostaneme, že

$$(2.138) \quad \sum_{(i)} \frac{d}{dt} g_z = \int_0^\infty db \int_0^{2\pi} d\epsilon \left(-2g \sin^2 \frac{\chi}{2} g n_1 b \right)$$

a odtud

$$(2.139) \quad F = \frac{g}{g} 2g^2 n_1 \mu 2\pi \int_0^\infty b \sin^2 \frac{\chi}{2} db.$$

Uvážíme-li nyní, že podle (2.106) $\tan \chi/2 = b_0/b$, můžeme dále psát, že

$$(2.140) \quad F = \frac{g}{g} \mu 4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}.$$

Integrál

$$(2.141) \quad L = \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}$$

Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus

$$F = \frac{g}{g} \mu 4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}.$$

$$L = \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}$$

ln(E.kinetická/E.potenciální)
Ve vzdalenosti l_d

Už jsme ukázali, že platí...

$$b_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\mu g^2} \quad l_d^2 = \frac{\epsilon_0 kT}{ne^2}$$

$$\frac{b_0}{l_d} = \frac{\frac{1}{9}(3/2 kT)}{N^{1/2} \mu g^2} \lll 1$$

logaritmicky diverguje pro velké hodnoty parametru b . Abychom dostali pro F konečné hodnoty, musíme v L nějakým způsobem omezit horní integrační mez.

V předchozím odstavci jsme si ukázali, že efektivní interakční potenciál částic je řádově dosahu l_d ; binární coulombovské srážky je pak možno uvažovat pouze pro srážkový parametr $b \leq l_d$. Za horní integrační mez L je tedy možno zvolit l_d . Dostaneme

$$(2.142) \quad L = \int_0^{l_d} \frac{b db}{b_0^2 + b^2} = \ln \sqrt{\left(\frac{b_0^2 + l_d^2}{b_0^2}\right)}.$$

Jestliže dále platí, že $l_d \gg |b_0|$, můžeme (2.142) přepsat do tvaru

$$(2.143) \quad L = \ln \left(\frac{l_d}{|b_0|} \right) = \ln \frac{l_d}{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu g^2}},$$

kde jsme za b_0 dosadili (2.97) a síla F , určená rovnicí (2.140), má nyní tvar

$$(2.144) \quad F = L \frac{g}{g^3} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{4\pi\epsilon_0} \frac{n_1}{\mu}.$$

Veličina L určená rovnicí (2.143) se nazývá coulombovský logaritmus.

Předpokládali jsme, že platí

$$(2.145) \quad l_d \gg b_0.$$

Tato podmínka však plyne přímo z předpokladů (2.120), které mají platit pro libovolné r . Položme tedy $r = l_d$ a předpokládejme pro jednoduchost, že $Z_1 = Z_2 = 1$. Sečtením nerovností (2.120) ($\varphi(r)$ bereme v prvním přiblížení jako coulombovský) dostaneme

$$(2.146) \quad \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l_d} \ll k(T_1 + T_2),$$

což je možno přepsat jako

$$(2.147) \quad l_d \gg \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 k(T_1 + T_2)}.$$

Protože ale $3k(T_1 + T_2) \sim \mu g^2$, je možno (2.147) dále přepsat na

$$(2.148) \quad l_d \gg \frac{6e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu g^2} \sim b_0.$$

Odtud již vidíme, že nerovnost (2.145) je již splněna, platí-li (2.120), nebo jinými slovy, předpokládáme (stejně jako v 1. kapitole), že interakční energie částic je mnohem menší ve srovnání s jejich tepelnou energií. K tomuto výsledku je možno dojít ještě trochu jiným způsobem. Aby „ořezání“ integrálu L (2.141) mělo fyzikální smysl,

Další kroky

$$(2.140) \quad F = \frac{g}{g} \mu 4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}.$$

Integrál

$$(2.141) \quad L = \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}$$

$$(2.151) \quad |F| = \text{konst } L,$$

kde L je dáno rovnicí (2.142), resp. (2.143). Sledujme dále, jak závisí $|F|$ na úhlu rozptylu částic. Na základě (2.106) můžeme tvrdit, že pro $b \gg b_0$ je

$$(2.152) \quad \chi = \frac{2b_0}{b} \ll 1$$

a tedy rozptyl na malé úhly odpovídá dalekým průletům. Hranici mezi dalekými a blízkými průlety stanovme pro $b = 2b_0$. Rovnici (2.151) můžeme nyní psát ve tvaru

$$(2.153) \quad |F| = \text{konst} \int_0^{l_d} \frac{b db}{b_0^2 + b^2} = \text{konst} (L_{b.p.} + L_{d.p.}),$$

kde

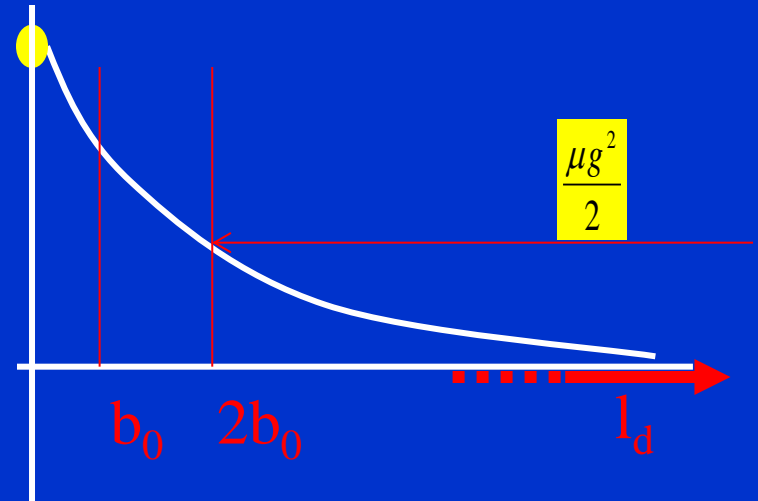
$$(2.154) \quad L_{b.p.} = \int_0^{2b_0} \frac{b db}{b_0^2 + b^2} = \ln 3 \sim 1$$

je coulombovský logaritmus odpovídající blízkým průletům a

$$(2.155) \quad L_{d.p.} = \int_{2b_0}^{l_d} \frac{b db}{b_0^2 + b^2} = \ln \frac{l_d}{b_0} - \ln 3 \sim \ln \frac{l_d}{b_0} = L \gg 1$$

je coulombovský logaritmus odpovídající dalekým průletům. Z (2.153) je zřejmé, že střední sílu, která působí na částici 2 ze strany svazku částic 1, můžeme rozdělit na dvě části a to na sílu $F_{b.p.}$, odpovídající blízkým průletům, a $F_{d.p.}$, odpovídající dalekým průletům; pro $F_{b.p.}$ a $F_{d.p.}$ platí

$$(2.156) \quad |F_{b.p.}| \sim L_{b.p.}$$



$$\frac{b_0}{l_d} = \frac{1}{9} \left(\frac{3}{2} kT \right) / N^{1/2} \mu g^2 \lll 1$$

$$F_{dp} / F_{bp} \sim L \gg 1$$

Závislost na teplotě

V závěru tohoto odstavce uvedeme ještě několik poznámek, týkajících se coulombovského logaritmu L . Z (2.143) vidíme, že L závisí logaritmicky na μg^2 . V důsledku této logaritmické závislosti je možno v mnoha případech nahradit μg^2 střední hodnotou této veličiny nebo tepelnou rychlostí částic, tj. můžeme položit $\mu g^2 \sim \frac{3}{2}k(T_1 + T_2)$. Abychom si utvořili představu, jak závisí L na teplotě a koncentraci, předpokládejme pro jednoduchost, že $T_1 = T_2 = T$. Coulombovský logaritmus má pak jednoduchý tvar

$$(2.159) \quad L = \ln \left[\frac{12\pi}{n^{1/2}} \left(\frac{\varepsilon_0 k T}{e^2} \right)^{3/2} \right].$$

kl - klasický
kv - kvantový

V jednoduchém případě, kdy $\mu g^2 \sim \frac{3}{2}k(T_1 + T_2)$, $T_1 = T_2 = T$ a $|Z_1| = |Z_2| = 1$, je možno (2.161) přepsat na tvar

$$(2.162) \quad L_{kv} = L_{kl} + \ln \left(\frac{4,2 \cdot 10^5}{T} \right)^{1/2},$$

kde L_{kl} je dáno vztahem (2.159). Hodnoty coulombovského logaritmu vypočtené z (2.159) a (2.161) jsou uvedeny v tab. 1; nejsou zde uvedeny hodnoty coulombovského logaritmu pro vysoké koncentrace a nízké teploty, protože v těchto případech je námi uvedená teorie neplatná.

Tabulka 1. Hodnoty coulombovského logaritmu L .

Koncentrace elektronů [m ⁻³]	Teplota K									
	50	100	5.10 ²	10 ³	5.10 ³	10 ⁴	5.10 ⁴	10 ⁵	5.10 ⁵	10 ⁶
10 ¹⁰	10,69	11,73	14,14	15,18	17,60	18,63	21,05	22,09	24,42	25,11
10 ¹¹	9,54	10,58	12,99	14,03	16,44	17,48	19,88	20,94	23,26	23,96
10 ¹²	8,39	9,42	11,84	12,88	15,29	16,33	18,75	19,79	22,11	22,81
10 ¹³	7,23	8,27	10,69	11,73	14,14	15,18	17,60	18,63	20,96	21,65
10 ¹⁴	6,08	7,12	9,54	10,58	12,99	14,03	16,44	17,48	19,81	20,50
10 ¹⁵	4,93	5,97	8,39	9,42	11,84	12,88	15,29	16,33	18,66	19,36
10 ¹⁶	—	4,82	7,23	8,27	10,69	11,73	14,14	15,18	17,51	18,20
10 ¹⁷	—	—	6,08	7,12	9,54	10,58	12,99	14,03	16,36	17,05
10 ¹⁸	—	—	4,93	5,97	8,39	9,42	11,84	12,88	15,21	15,90
10 ¹⁹	—	—	—	4,82	7,23	8,27	10,69	11,73	14,06	14,75
10 ²⁰	—	—	—	—	6,08	7,12	9,54	10,58	12,90	13,60
10 ²¹	—	—	—	—	4,93	5,97	8,39	9,42	11,75	12,45
10 ²²	—	—	—	—	—	4,92	7,23	8,27	10,60	11,30
10 ²³	—	—	—	—	—	—	6,08	7,12	9,45	10,14
10 ²⁴	—	—	—	—	—	—	4,93	5,97	8,30	8,99

Literatura ke kap. 2.

- JANCEL R., KAHAN TH.: Electrodynamics of plasmas. J. Wiley & Sons, London (1966).
 DELCROIX J. L.: Plasma physics. J. Wiley & Sons, London (1965).
 LANDAU L. D., LIFŠIC E. M.: Kvantovaja mechanika. Moskva (1963).
 SIVUCHIN D. V.: Voprosy teorij plazmy 4., red. M. A. Leontovič, Moskva (1964).
 TRUBNIKOV B. A.: Voprosy teorij plazmy 1., red. M. A. Leontovič, Moskva (1963).
 SPITZER L.: Physics of fully ionized gases. Interscience, New York (1956) (ruský překlad Spitzer L.: Fizika polnostju ionizovannogo gaza. Moskva (1965)).