Transport equation

I am sorry for English, Czech and Slovak language … , ☺, ☺, ….

Distribution functions

$$f(\vec{r},\vec{v},t)$$

Local average value of function g(r, v)

The number of particles with a coordinates **r**,**v**,t in d**r**d**v**

$$f(\vec{r},\vec{v},t)d\vec{r}d\vec{v}$$

$$fd\vec{r}d\vec{v}$$

Particle concentration $n(\vec{r},t)$

Mean particle velocity $v_0(\vec{r},t)$

Flow of quantity ψ through unit area moving with velocity v_0

$$\Psi = \overline{\psi} = \int \psi(\vec{V})\vec{V} f d\vec{V}$$

kde integrací se míní integrace přes celý rychlostní prostor a přes objem, ve kterém je daný systém uzavřen. Potom střední hodnota funkce $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ je dána výrazem

(3.2) $$\bar{g} = \frac{1}{N}\iint g(\mathbf{r}, \mathbf{v})\, f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}\,,$$

Podobně pro lokální střední hodnotu (střední hodnotu, která se může obecně měnit v prostoru od bodu k bodu) funkce $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ dostáváme

(3.3) $$\overline{g(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{n}\int g(\mathbf{r}, \mathbf{v})\, f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}\,,$$

kde

(3.4) $$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}$$

je koncentrace částic v místě $\mathbf{r}$; $n(\mathbf{r}, t)\, d\mathbf{r}$ je potom počet částic v objemu $d\mathbf{r}$ kolem bodu $\mathbf{r}$.*)

Pomocí definice (3.3) můžeme nyní zavést některé důležité veličiny, které budou pro nás v dalším textu nepostradatelné.

Tak například střední rychlost částic v bodě $(\mathbf{r}, t)$ $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$ bude podle (3.3) dána vztahem

(3.5) $$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n}\int \mathbf{v}\, f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}\,.$$

Velmi často bývá výhodné vztahovat rychlost částic ke střední rychlosti $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$; zavedeme tedy pojem relativní rychlosti $\mathbf{V}$ vzhledem ke střední rychlosti $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$ vztahem

(3.6) $$\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)\,.$$

Potom s ohledem na definici $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$ (3.5) je zřejmé, že

(3.7) $$\overline{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = 0\,.$$

V systému, který není v rovnovážném stavu, existuje jistý počet gradientů, jako například koncentrace, relativní rychlosti, teploty atd., které způsobují přenos hmotnosti, impulsu, teploty a dalších veličin, jež charakterizují vlastnosti částic daného systému. Označíme-li tyto veličiny jako $\psi(\mathbf{v})$, pak tok veličiny ψ jednotkovou plochou, která se pohybuje rychlostí $\mathbf{v}_0$ **) za jednotku času bude zřejmě roven

(3.8) $$\Psi = \bar{\psi} = \int \psi(\mathbf{V})\, \mathbf{V} f\, d\mathbf{V}\,.$$

*) Pro jednoduchost zápisu budeme místo „v $d\mathbf{r}$ kolem bodu $\mathbf{r}$“ říkat „v bodě $\mathbf{r}$“.

**) V dalším textu budeme vždy uvažovat tok plochou, která je v klidu vzhledem ke střední rychlosti částic systému.

Derivation of the Boltzmann equation

3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému N částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce f_i jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování f_i, za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvillův teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$ a částice 2 v bodě $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)$ jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla $\mathbf{F}_i$, působící na i-tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element μ prostoru se středem v bodě $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}_i$ o velikosti $\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{v}_i$; v čase t obsahuje tento $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{v}_i$ částic i-tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase $t + \mathrm{d}t$ vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemovém elementu $\mathrm{d}\mathbf{r}$ kolem bodu $\mathbf{r} + \mathbf{v}_i\,\mathrm{d}t$ a v rychlostním elementu $\mathrm{d}\mathbf{v}_i$ kolem bodu $\mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m_i)\,\mathrm{d}t$ (předpokládáme, že síla $\mathbf{F}_i$ se téměř nezmění uvnitř $\mathrm{d}\mathbf{r}$ za $\mathrm{d}t$). Podle Liouvillova teorému tedy platí

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i\,\mathrm{d}t, \mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{v}_i = f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{v}_i$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

$$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{v}_i\,\mathrm{d}t \tag{3.32}$$

jako změnu počtu částic i-tého druhu v $\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{v}_i$ způsobenou srážkami za čas $\mathrm{d}t$, musí zřejmě platit

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i\,\mathrm{d}t, \mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m_i)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{v}_i - f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{v}_i\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.33}$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}}\,. \tag{3.34}$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen $(\delta_e f_i/\delta t)$, kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic i-tého druhu, které se dostanou do objemového elementu $\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{v}_i$ vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas $\mathrm{d}t$ (označí-

$$\frac{\mathrm{d}P_N}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0\,, \tag{1.15'}$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace je 1 a proto je

$\int \mathrm{d}\Gamma = \int \mathrm{d}r^N \mathrm{d}p^N = \text{const},$

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina… proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“

BBGKY equation application for s=1, s=2

Taylorova rada pre funkciu G

$$\boxed{G(\vec{A} + \vec{X}) = G(\vec{A}) + \vec{X} \cdot \nabla_A G}$$

Derivation of the Boltzmann Equation

3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému N částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce f_i jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování f_i, za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvillův teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1)$ a částice 2 v bodě $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2)$ jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla $\boldsymbol{F}_i$, působící na i-tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element μ prostoru se středem v bodě $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i$ o velikosti $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$; v čase t obsahuje tento $f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ částic i-tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase $t + \mathrm{d}t$ vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemo… …entu $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ kolem bodu $\boldsymbol{v}_i +$ … …nitř $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ za $\mathrm{d}t$).
Podle Lio…

$$\mathrm{G(A+X)-G(A)=X\Delta_A\Gamma}$$

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,.$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

$$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \tag{3.32}$$

jako změnu počtu částic i-tého druhu v $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ způsobenou srážkami za čas $\mathrm{d}t$, musí zřejmě platit

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.33}$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i\,.\,\nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\,.\,\nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}}\,. \tag{3.34}$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen $(\delta_e f_i/\delta t)$, kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic i-tého druhu, které se dostanou do objemového elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas $\mathrm{d}t$ (označí-

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P_N}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0\,,} \tag{1.15'}$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace je 1 a proto je

$\int \mathrm{d}\Gamma = \int \mathrm{d}r^N \mathrm{d}p^N = \mathrm{const}$,

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina… proto můžeme napsat „rovnici kontinuity"

BBGKY equations applied to na s=1, s=2

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V}\sum_{i=1}^{s}\int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1}\,, \tag{1.52}$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s = 1$ a $s = 2$. Pro $s = 1$ dostaneme

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{r_1} H_1\,.\,\nabla_{p_1} F_1 - \nabla_{p_1} H_1\,.\,\nabla_{r_1} F_1 + \frac{N-1}{V}\int (\nabla_{r_1}\Phi_{12}\,.\,\nabla_{p_1} F_2 - \nabla_{p_1}\Phi_{12}\,.\,\nabla_{r_1} F_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \tag{1.54}$$

a pro $s = 2$ dostaneme

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V}\int \sum_{i=1}^{2} [\Phi_{i3}; F_3]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\,. \tag{1.55}$$

Taylor series - for function G

$$\boxed{G(\vec{A} + \vec{X}) = G(\vec{A}) + \vec{X}.\nabla_A G}$$

Velký Kracík

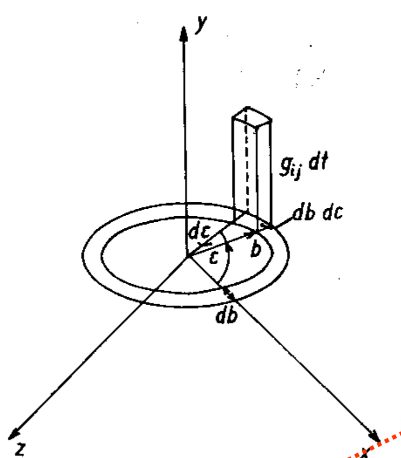
me $\sum_j A_{ij}^+ \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$), minus počet částic i-tého druhu, které tento objemový element opustí vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval dt (označíme $\sum_j A_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$). Symbolicky tedy můžeme psát

(3.35) $$\frac{\delta_e f_i}{\delta t} \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt = \sum_j \left(A_{ij}^+ - A_{ij}^- \right) d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt \,,$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu $A_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$. Nechť částice i-tého druhu je umístěna v bodě $\boldsymbol{r}$ a nechť se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu dt srazí s částicí j-tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic $\boldsymbol{g}_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$, srážkovým parametrem b a úhlem ε mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice i-tého druhu za čas dt s částicemi j-tého druhu, jejichž relativní rychlost je $\boldsymbol{g}_{ij}$, srážkový parametr je v mezích b, $b + db$ a úhel v mezích ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ potom bude roven počtu částic j-tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu

$$g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$



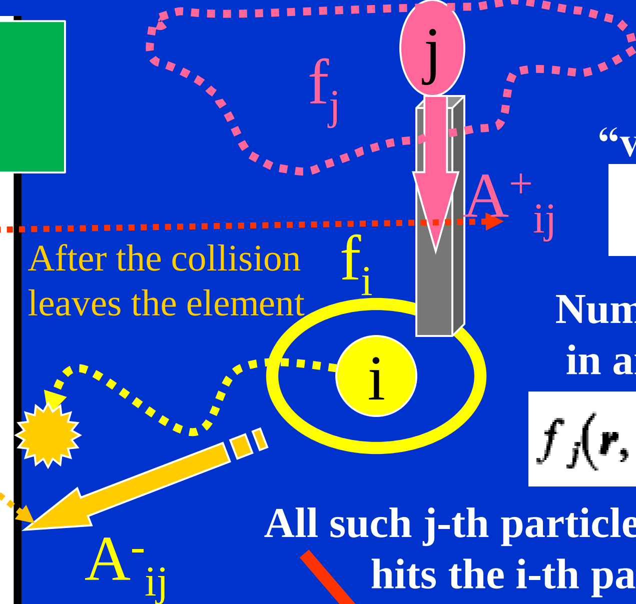
Obr. 3.1.

(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici $f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)$ je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt \,.$$

Celkový počet srážek částice i-tého druhu se všemi částicemi druhu j-tého za čas dt potom zřejmě bude

(3.36) $$\boxed{dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \,,}$$



“volume” element

$$g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$

Number of particles in an element

$$f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$

All such j-th particles hits the i-th particle at the origin

$$dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j$$

The i particles in the element is:

$$f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i .$$

$d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i$, je $A^-_{ij} \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$

Number of collisions
= the number of particles that leave the drdv$_i$ element is:

$$\boxed{A^-_{ij} \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt = d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \,.}$$

Velký Kracík

Volume element

$$g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$

Počet částic v elementu

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$

All such j-th particles

hits the i-th particle at the origin

$$dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\mathbf{v}_j$$

The i-th particle in the element is:

$$f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) \, d\mathbf{r} \, d\mathbf{v}_i.$$

$d\mathbf{r} \, d\mathbf{v}_i$, je $A_{ij}^{-} \, d\mathbf{r} \, d\mathbf{v}_i \, dt$

Number of precipitations

= the number of particles that leave the element $dr_i dv_i$ is :

$$A_{ij}^{-} \, d\mathbf{r} \, d\mathbf{v}_i \, dt = d\mathbf{r} \, d\mathbf{v}_i \, dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) \, f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\mathbf{v}_j$$

Similarly, for the number of particles, that enter into the element

Inverse Process

before collision

před srážkou jsou $\mathbf{v}_i'$ a $\mathbf{v}_j'$

v důsledku srážky nabývají tyto částice

právě rychlostí $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{v}_j$

after collision

$$A_{ij}^{+} \, d\mathbf{r} \, d\mathbf{v}_i \, dt = d\mathbf{r} \, d\mathbf{v}_i' \, dt \iiint f_j'(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j', t) \, f_i'(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i', t) \, g_{ij}' b' \, db' \, d\varepsilon' \, d\mathbf{v}_j'$$

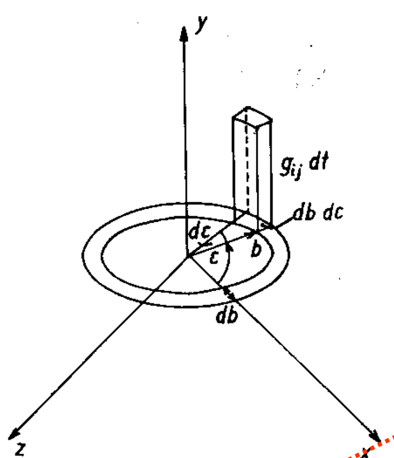
me $\sum_j A_{ij}^+ \, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}_i\, dt$), minus počet částic i-tého druhu, které tento objemový element opustí vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval dt (označíme $\sum_j A_{ij}^- \, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}_i\, dt$). Symbolicky tedy můžeme psát

(3.35) $$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}_i\, dt = \sum_j (A_{ij}^+ - A_{ij}^-)\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}_i\, dt\,,$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu $A_{ij}^- \, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}_i\, dt$. Nechť částice i-tého druhu je umístěna v bodě $\mathbf{r}$ a nechť se pohybuje rychlostí $\mathbf{v}_i$. Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu dt srazí s částicí j-tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic $g_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$, srážkovým parametrem b a úhlem ε mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice i-tého druhu za čas dt s částicemi j-tého druhu, jejichž relativní rychlost je g_{ij}, srážkový parametr je v mezích b, $b + db$ a úhel v mezích ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ potom bude roven počtu částic j-tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu

$$g_{ij} b \, db\, d\varepsilon\, dt$$



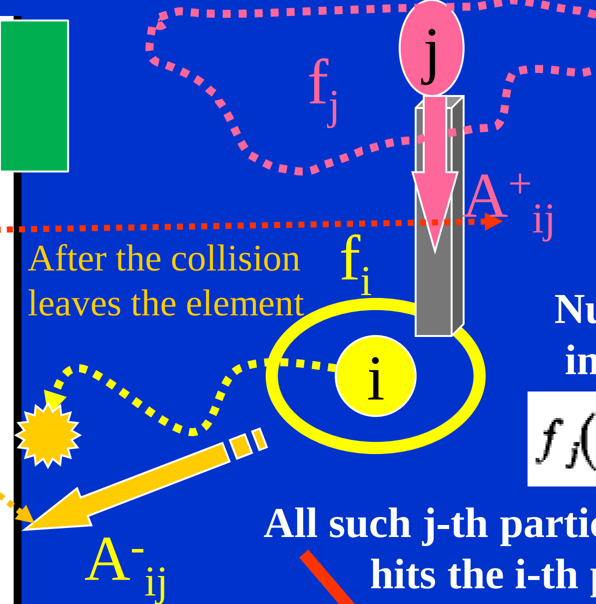
Obr. 3.1.

(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici $f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t)$ je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, dt\,.$$

Celkový počet srážek částice i-tého druhu se všemi částicemi druhu j-tého za čas dt potom zřejmě bude

(3.36) $$dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j\,,$$



“volume” element

$$g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, dt$$

Number of particles in an element

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, dt$$

All such j-th particles hits the i-th particle at the origin

$$dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j$$

The i particles in the element is:

$$f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}_i.$$

$d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}_i$, je $A_{ij}^-\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}_i\, dt$

Number of collisions
= the number of particles that leave the $d\mathbf{r}d\mathbf{v}_i$ element is:

$$A_{ij}^-\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}_i\, dt = d\mathbf{r}\, d\mathbf{v}_i\, dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t)\, f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j\,.$$

$$A_{ij}^{-}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \,.$$

$$A_{ij}^{+}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij}' b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'$$

Ze zákona zachování energie a impulsu (viz kapitolu 2) dále plyne, že

The Law of Conservation of Energy and Impulse

$$g_{ij} = g_{ij}', \quad b = b'$$

interakční potenciál částic je sféricky symetrický,

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

Protože částice neopustí během srážek objem $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}')$, dostáváme z platnosti Liouvillova teorému důležitý výsledek, že

From Liouvill theorem it folows →

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'$$

Full text

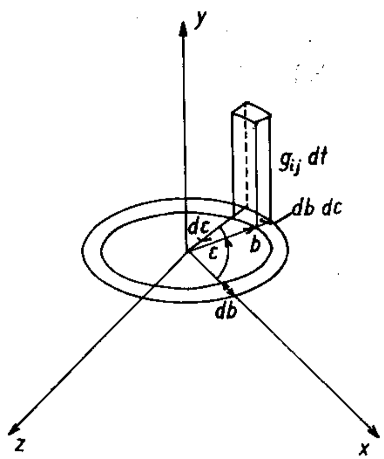
me $\sum_j A^+_{ij}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt$), minus počet částic i-tého druhu, které tento objemový element opustí vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval dt (označíme $\sum_j A^-_{ij}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt$). Symbolicky tedy můžeme psát

(3.35) $$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt = \sum_j (A^+_{ij} - A^-_{ij})\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt\,,$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu $A^-_{ij}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt$. Nechť částice i-tého druhu je umístěna v bodě $\boldsymbol{r}$ a nechť se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu dt srazí s částicí j-tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic $g_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$, srážkovým parametrem b a úhlem ε mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice i-tého druhu za čas dt s částicemi j-tého druhu, jejichž relativní rychlost je g_{ij}, srážkový parametr je v mezích b, $b + db$ a úhel v mezích ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ potom bude roven počtu částic j-tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu

$$g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, dt$$



Obr. 3.1.

(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici $f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)$ je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, dt\,.$$

Celkový počet srážek částice i-tého druhu se všemi částicemi druhu j-tého za čas dt potom zřejmě bude

(3.36) $$dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{v}_j\,,$$

kde se integrování provádí přes b, ε a $\boldsymbol{v}_j$. Abychom zachytili celkový počet srážek všech částic i-tého druhu v objemu $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$, je nutno (3.36) vynásobit počtem částic i-tého druhu, které se nacházejí v objemovém elementu $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$, tj. je nutno (3.36) vynásobit výrazem $f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$. Protože každá částice i-tého druhu, která se srazí s částicí j-tého druhu za dt, opustí námi uvažovaný element $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$, je $A^-_{ij}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt$ rovno počtu srážek, tj.

(3.37) $$A^-_{ij}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt = d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{v}_j\,.$$

Obdobným způsobem můžeme stanovit $A^+_j\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt$, tj. počet částic i-tého druhu, které se vlivem srážek s částicemi j-tého druhu dostanou za dt do námi uvažovaného objemu $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$. V tomto případě stačí uvažovat takové inverzní srážky mezi částicemi i-tého druhu a částicemi j-tého druhu, kdy rychlosti těchto částic před srážkou jsou $\boldsymbol{v}'_i$ a $\boldsymbol{v}'_j$ a kdy v důsledku srážky nabývají tyto částice právě rychlostí $\boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{v}_j$ (předpokládáme, že se srážkové podmínky oproti předcházejícímu případu nezmění). Potom úplně analogicky s (3.37) je počet takových srážek roven

(3.38) $$A^+_{ij}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt = d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}'_i\, dt \iiint f'_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'_j, t)\, f'_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'_i, t)\, g'_{ij} b'\, db'\, d\varepsilon'\, d\boldsymbol{v}'_j\,.$$

Ze zákona zachování energie a impulsu (viz kapitolu 2) dále plyne, že

(3.39) $$g_{ij} = g'_{ij}\,, \quad b = b'\,.$$

Budeme-li dále předpokládat, že interakční potenciál částic je sféricky symetrický, můžeme položit

(3.40) $$\varepsilon = \varepsilon'\,.$$

Protože částice neopustí během srážek objem $d\boldsymbol{r}$ ($= d\boldsymbol{r}'$), dostáváme z platnosti Liouvillova teorému důležitý výsledek, že

(3.41) $$d\boldsymbol{v}_i\, d\boldsymbol{v}_j = d\boldsymbol{v}'_i\, d\boldsymbol{v}'_j\,.$$

Dosadíme-li nyní (3.39), (3.40) a (3.41) do rovnice (3.38), dostaneme konečně, že

(3.42) $$A^+_{ij}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt = d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt \iiint f'_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'_j, t)\, f'_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'_i, t)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{v}_j\,.$$

Nyní již můžeme přistoupit k explicitnímu vyjádření rovnice (3.34). Po dosazení (3.37) a (3.42) do (3.34) za pomoci rovnice (3.35) dostaneme integrodiferenciální rovnici

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f'_i f'_j - f_i f_j)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic — Boltzmannovu rovnici.

(3.35) $$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \sum_j (A_{ij}^+ - A_{ij}^-)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{A_{ij}^-\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,.}$$

$$\boxed{A_{ij}^+\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij}' b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'}$$

$\boxed{g_{ij} = g_{ij}', \quad b = b'}$

$\boxed{\varepsilon = \varepsilon'}$

$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'}$

Dosadíme-li nyní (3.39), (3.40) a (3.41) do rovnice (3.38), dostaneme konečně, že

(3.42) $$A_{ij}^+\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,.$$

Nyní již můžeme přistoupit k explicitnímu vyjádření rovnice (3.34). Po dosazení (3.37) a (3.42) do (3.34) za pomoci rovnice (3.35) dostaneme integrodiferenciální rovnici

(3.43) $$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j}$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic — Boltzmannovu rovnici.

Collision term – a deterrent example (frightening)

- Some properties of the collision term
- Precipitation invariants

But the result…..

result

3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

(3.53)
$$n_i \delta \bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \, d\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_i d\boldsymbol{v}_i + \sum_{j \neq i} \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_j d\boldsymbol{v}_i =$$
$$= \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) \, g b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_i^{(1)} \, d\boldsymbol{v}_i +$$
$$+ \sum_{j \neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \, d\boldsymbol{v}_i \,.$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

(3.54)
$$\iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \, d\boldsymbol{v}_i \,.$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$, b a ε za $\boldsymbol{v}_i'$, $\boldsymbol{v}_j'$, b' a ε', dostaneme integrál

(3.55)
$$\iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j') \, g_{ij} b' \, db' \, d\varepsilon' \, d\boldsymbol{v}_j' \, d\boldsymbol{v}_i' \,,$$

kde $\Phi_i' = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{r}, t)$, který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

na základě platnosti (3.57). Provedeme-li nyní záměnu i za j, je pravá strana (3.61) rovna také výrazu

(3.62)
$$\tfrac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \iiiint (\Phi_j - \Phi_j') (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \, d\boldsymbol{v}_i \,,$$

který za pomoci (3.61) dává závěrečný vztah, že

(3.63)
$$\sum_i \sum_{j \neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \, d\boldsymbol{v}_i =$$
$$= \sum_i \sum_{j \neq i} \tfrac{1}{4} \iiiint (\Phi_i + \Phi_j - \Phi_i' - \Phi_j') (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \, d\boldsymbol{v}_i \,.$$

Vrátíme-li se nyní k některým úvahám, které se týkají teorie binárních elastických srážek (viz kapitolu 2), vidíme, že existuje jistý počet funkcí Φ_i, pro které platí

(3.64)
$$\delta \bar{\Phi}_i = 0 \,.$$

Tyto funkce se nazývají srážkové invarianty a budou zřejmě funkcemi hybnosti a energie částic, neboť tyto veličiny se během srážek zachovávají. Jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), můžeme přijmout $\Phi_i = 1$, což nám vlastně vyjadřuje podmínku, že během srážky částice neopouští objemový element $d\boldsymbol{r}$. Protože během binárních srážek platí zákon zachování hmoty, můžeme také jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), přijmout $\Phi_i = m_i$, což je v podstatě úplně ekvivalentní $\Phi_i = 1$.

Jestliže je systém tvořen stejnými částicemi, máme pět srážkových invariantů

Collisional invariants

(3.65)
$$\Psi = 1 \,, \qquad \Theta = m\boldsymbol{v} \,, \qquad \Sigma = \tfrac{1}{2} m v^2 \,,$$

které, vzhledem k platnosti (3.60), splňují (3.64).

Poněkud jiná situace nastane, jestliže systém bude tvořen několika druhy částic. Zde musíme rozlišovat dva případy:

a) Jestliže $\Psi_i = 1$, potom podle rovnice (3.57) platí, že

(3.66)
$$\iiiint \Psi_i (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \, d\boldsymbol{v}_i = 0$$

a tedy tento případ je úplně obdobný případu předchozímu.

b) Jestliže ale

(3.67)
$$\Theta_i = m_i \boldsymbol{v}_i \quad \text{a} \quad \Sigma_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 \,,$$

pak již není možno zobecnit (3.66) do té míry, že bychom nahradili Ψ_i funkcemi Θ_i

a Σ_i. Zde je nutno vzít v úvahu platnost rovnice (3.63), do které nyní za Φ_i dosadíme Θ_i a Σ_i. Potom dostaneme

(3.68)
$$\sum_i \sum_{j \neq i} \iiiint \Theta_i (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \, d\boldsymbol{v}_i = 0$$

a

(3.69)
$$\sum_i \sum_{j \neq i} \iiiint \Sigma_i (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \, d\boldsymbol{v}_i = 0 \,.$$

Obdobné výsledky získáme, přejdeme-li od proměnných $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{r}$, t k jejich ekvivalentům $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{r}$, t (respektive od $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{r}$, t k $\boldsymbol{V}_i$, $\boldsymbol{r}$, t). Forma srážkových invariantů (3.65) a (3.67) se nezmění, je nutná pouze ekvivalentní záměna $\boldsymbol{v}$ za $\boldsymbol{V}$ respektive $\boldsymbol{v}_i$ za $\boldsymbol{V}_i$.

Collision term – a deterrent example (frightening)

But the result…..

- Některé vlastnosti srážkového členu
- Srážkové invarianty

result

3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\mathbf{v}_i$, tj. určit

(3.53)
$$n_i \delta \bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\, d\mathbf{v}_i = \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_i d\mathbf{v}_i + \sum_{j \neq i} \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_j d\mathbf{v}_i =$$
$$= \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b \, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_i^{(1)}\, d\mathbf{v}_i +$$
$$+ \sum_{j \neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j\, d\mathbf{v}_i\,.$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

(3.54)
$$\iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j\, d\mathbf{v}_i\,.$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$, b a ε za $\mathbf{v}_i'$, $\mathbf{v}_j'$, b' a ε', dostaneme integrál

(3.55)
$$\iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b'\, db'\, d\varepsilon'\, d\mathbf{v}_j'\, d\mathbf{v}_i'\,,$$

kde $\Phi_i' = \Phi_i(\mathbf{v}_i', \mathbf{r}, t)$, který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

na základě platnosti (3.57). Provedeme-li nyní záměnu i za j, je pravá strana (3.61) rovna také výrazu

(3.62)
$$\tfrac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \iiiint (\Phi_j - \Phi_j')(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j\, d\mathbf{v}_i\,,$$

který za pomoci (3.61) dává závěrečný vztah, že

(3.63)
$$\sum_i \sum_{j \neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j\, d\mathbf{v}_i =$$
$$= \sum_i \sum_{j \neq i} \tfrac{1}{4} \iiiint (\Phi_i + \Phi_j - \Phi_i' - \Phi_j')(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j\, d\mathbf{v}_i\,.$$

Vrátíme-li se nyní k některým úvahám, které se týkají teorie binárních elastických srážek (viz kapitolu 2), vidíme, že existuje jistý počet funkcí Φ_i, pro které platí

(3.64)
$$\delta \bar{\Phi}_i = 0\,.$$

Tyto funkce se nazývají srážkové invarianty a budou zřejmě funkcemi hybnosti a energie částic, neboť tyto veličiny se během srážek zachovávají. Jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), můžeme přijmout $\Phi_i = 1$, což nám vlastně vyjadřuje podmínku, že během srážky částice neopouští objemový element $d\mathbf{r}$. Protože během binárních srážek platí zákon zachování hmoty, můžeme také jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), přijmout $\Phi_i = m_i$, což je v podstatě úplně ekvivalentní $\Phi_i = 1$.

Jestliže je systém tvořen stejnými částicemi, máme pět srážkových invariantů

Collisional invariants

(3.65)
$$\Psi = 1\,, \quad \Theta = m\mathbf{v}\,, \quad \Sigma = \tfrac{1}{2} m v^2\,,$$

které, vzhledem k platnosti (3.60), splňují (3.64).

Poněkud jiná situace nastane, jestliže systém bude tvořen několika druhy částic. Zde musíme rozlišovat dva případy:

a) Jestliže $\Psi_i = 1$, potom podle rovnice (3.57) platí, že

(3.66)
$$\iiiint \Psi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j\, d\mathbf{v}_i = 0$$

a tedy tento případ je úplně obdobný případu předchozímu.

b) Jestliže ale

(3.67)
$$\Theta_i = m_i \mathbf{v}_i \quad \text{a} \quad \Sigma_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2\,,$$

pak již není možno zobecnit (3.66) do té míry, že bychom nahradili Ψ_i funkcemi Θ_i

a Σ_i. Zde je nutno vzít v úvahu platnost rovnice (3.63), do které nyní za Φ_i dosadíme Θ_i a Σ_i. Potom dostaneme

(3.68)
$$\sum_i \sum_{j \neq i} \iiiint \Theta_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j\, d\mathbf{v}_i = 0$$

a

(3.69)
$$\sum_i \sum_{j \neq i} \iiiint \Sigma_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_j\, d\mathbf{v}_i = 0\,.$$

Obdobné výsledky získáme, přejdeme-li od proměnných $\mathbf{v}$, $\mathbf{r}$, t k jejich ekvivalentům $\mathbf{V}$, $\mathbf{r}$, t (respektive od $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{r}$, t k $\mathbf{V}_i$, $\mathbf{r}$, t). Forma srážkových invariantů (3.65) a (3.67) se nezmění, je nutná pouze ekvivalentní záměna $\mathbf{v}$ za $\mathbf{V}$ respektive $\mathbf{v}_i$ za $\mathbf{V}_i$.

Boltzmann's H-theorem special case

$$\nabla_r = 0, \quad \vec{F} = 0$$

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \cancel{\nabla_r f_i} + \cancel{\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic — Boltzmannovu rovnici.

3.4 Boltzmannův H-teorém

Na rozdíl od Liouvillovy rovnice vyhovuje Boltzmannova rovnice plně požadavku nevratnosti přírodních dějů; tj. entropie definovaná pomocí rozdělovací funkce, která je řešením Boltzmannovy rovnice (3.43), je rostoucí funkce času až do té doby, dokud systém nedosáhne rovnovážného stavu. Potom je entropie konstantní, na čase nezávislá.

Abychom si ukázali výše uvedenou vlastnost Boltzmannovy rovnice, uvažujme nejprve jednoduchý případ, kdy $\nabla_r = 0$, vnější síly jsou nulové a systém se skládá z jednoho druhu částic. Boltzmannova rovnice má nyní tvar

(3.70) $$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint (f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} .$$

Sestrojme dále funkcionál $H(t)$ podle definice

(3.71) $$H(t) = \int f(\boldsymbol{v}, t) \ln f(\boldsymbol{v}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} .$$

Potom

(3.72) $$\frac{\partial H}{\partial t} = \int (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \iiiint (1 + \ln f)(f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} .$$

(3.60) $$\iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$
$$= \tfrac{1}{4} \iiiint (\Phi_i + \Phi_i^{(1)} - \Phi_i' - \Phi_i'^{(1)})(f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$$

Tento výraz můžeme dále upravit podle (3.60); po kratších úpravách můžeme psát, že

(3.73) $$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{4} \iiiint \ln \left(\frac{f' f'^{(1)}}{f f^{(1)}} \right) (f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} .$$

Odtud již snadno vidíme, že integrand je vždy kladný a tedy $\partial H / \partial t$ je vždy záporné.

$$\delta H / \delta t \le 0$$

No paradox - entropy is increasing

1.3 Gibbs' H theorem

- entropy
- Reversibility and Irreversibility Procedure

$$S=-kH=-k\int P_N \ln P_N, \quad \text{kde } H = \int P_N \ln P_N$$

Using Liouville's theorem, we obtaine the expression

$$dH/dt=0 \longrightarrow dS/dt=0$$

This means that the system does not evolve over time.....
That is, an unequilibrium system can never reach a state of equilibrium.

Paradox - classical mechanics leads to a strictly reversible description, while nature behaves irreversibly. (?...) ...

Boltzmann's H-theorem special case

$$\delta H / \delta t \leq 0$$

$S=-kH$

Time evolution – entropion increases ...... System entropion increases, dS/dt>0

equilibrium → **Maxwel distribution function**

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint \left(f' f'^{(1)} - f f^{(1)}\right) g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)}$$

$$\Psi = 1\,, \qquad \Theta = m\boldsymbol{v}\,, \qquad \Sigma = \tfrac{1}{2}mv^2\,,$$

$$\delta H \Big/ \delta t = 0$$

Dále $\partial H/\partial t = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže

(3.74) $$f' f'^{(1)} = f f^{(1)}\,.$$

Podle rovnice (3.70) je pak ale $\partial f/\partial t = 0$, a proto podmínka (3.74) odpovídá rovnovážnému stavu.

Na základě rovnosti (3.74) můžeme nyní určit tvar rozdělovací funkce systému, který je v rovnováze. Podle (3.74) můžeme totiž psát

(3.75) $$\ln f' + \ln f'^{(1)} = \ln f + \ln f^{(1)}\,,$$

tj. logaritmus rovnovážné rozdělovací funkce je srážkovým invariantem našeho systému. Podle našich předchozích úvah (viz str. 80) musí tedy být $\ln f$ lineární kombinací srážkových invariantů (3.65), tj.

(3.76) $$\ln f = am + \boldsymbol{b} \,.\, m\boldsymbol{v} + c\,\tfrac{1}{2}mv^2\,,$$

kde konstanty a, $\boldsymbol{b}$ a c závisí na celkovém počtu částic, celkovém impulsu a celkové energii systému. Abychom určili tyto konstanty, přepišme (3.76) do tvaru

(3.77) $$\ln f = \ln a_0 - c\,\tfrac{1}{2}m[(v_x - b_x/c)^2 + (v_y - b_y/c)^2 + (v_z - b_z/c)^2]\,.$$

Položíme-li nyní

(3.78) $$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{b}}{c}\,,$$

dostaneme z (3.77), že

(3.79) $$f = a_0 \exp\left(-c\,\tfrac{1}{2}mV'^2\right).$$

Z normovací podmínky (3.4) dále máme

(3.80) $$n = \int f \,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = a_0 \int \exp\left(-\frac{c}{2}\,mV'^2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{V}' = a_0\left(\frac{2\pi}{mc}\right)^{3/2}.$$

Podobně

(3.81) $$n\boldsymbol{v}_0 = \int \boldsymbol{v} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int\left(\boldsymbol{V}' + \frac{\boldsymbol{b}}{c}\right) f \,\mathrm{d}\boldsymbol{V}' = n\,\frac{\boldsymbol{b}}{c}\,,$$

protože $\int \boldsymbol{V}' f \,\mathrm{d}\boldsymbol{V}' = 0$; můžeme tedy psát, že

(3.82) $$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{b}}{c}$$

a tedy

(3.83) $$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{V}\,.$$

(3.5) $$\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{n}\int \boldsymbol{v}\, f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,.$$

(3.6) $$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)\,.$$

Dále podle (3.80) a (3.83) platí

(3.84) $$\tfrac{1}{2}m\overline{V^2} = \frac{m}{2n}\int V^2 f \,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{m}{2n}\,a_0 \int V^2 \exp\left(-\frac{c}{2}\,mV^2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{V} = \tfrac{3}{2}c^{-1}\,.$$

S ohledem na definici $\boldsymbol{V}$ (3.6) je ale zřejmé, že

(3.85) $$\tfrac{1}{2}m\overline{V^2} = \tfrac{3}{2}kT$$

So we introduced T..?

a tedy

(3.86) $$c = \frac{1}{kT}\,,$$

kde k je Boltzmannova konstanta a T kinetická teplota plynu. Spojením předchozích výsledků dostáváme nyní rozdělovací funkci f ve tvaru

(3.87) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right).$$

$f\,\mathrm{d}\vec{v}$

Tato rozdělovací funkce se nazývá Maxwellovou rozdělovací funkcí a systém, jehož stav je takovouto funkcí popsán, se nazývá maxwellovský systém.

Podle obecné definice rozdělovací funkce je $f\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ počet částic v jednotkovém objemu, jejichž rychlosti leží v intervalu $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}$. V některých případech je ale vhodné znát počet částic v jednotce objemu, jejichž rychlosti leží v intervalu V, $V + \mathrm{d}V$, tj. zajímáme se pouze o absolutní hodnotu rychlosti a ne o směr. Zavedením sférických souřadnic (V, ϑ, φ) snadno získáme, že

(3.88) $$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{V} = V^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}V$$

a odtud integrací přes ϑ a φ pak dostaneme, že počet částic v jednotce objemu, jejichž rychlosti leží mezi V a $V + \mathrm{d}V$, je dán vztahem

(3.89) $$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} n \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} V^2 \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right)\mathrm{d}V\,.$$

Pomocí takto zapsaného rozdělení můžeme nyní snadno určit střední hodnotu nějaké fyzikální veličiny, která nezávisí na směru rychlosti.

Tak např.

(3.90) $$\overline{V} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty V^3\, \mathrm{e}^{-(mV^2/2kT)}\,\mathrm{d}V = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}$$

a podobně

(3.91) $$\overline{V^2} = \frac{3kT}{m}\,.$$

Maxwel distribution function

Potential field

$$\delta H / \delta t = 0$$

In equilibrium – that is terribly strong

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

v rovnovážném stavu, kdy $\delta_e f/\delta t = 0$, je potom

(3.99) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right),$$

kde $V = v - v_0$. Veličiny n, v_0 a T nyní nezávisí na v a t, ale závisí na r.

Tuto závislost si demonstrujme na jednoduchém případu, kdy $v_0 = 0$. Potom

(3.100) $$f = n(r)\left(\frac{m}{2\pi kT(r)}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT(r)}$$

a musí platit

(3.101) $$v \cdot \nabla_r f + \frac{F}{m} \cdot \nabla_v f = 0\,.$$

(3.43) $$\cancel{\frac{\partial f_i}{\partial t}} + \boxed{v_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{F_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i} = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dv_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

$=0$ $=0$

Dosadíme-li nyní do této rovnice rozdělovací funkci (3.100), dostaneme po kratších úpravách

(3.102) $$v \cdot \nabla_r\left(\ln\frac{n}{T^{3/2}}\right) + \frac{m}{2kT}\frac{v^2}{T} v \cdot \nabla_r T - \frac{F}{kT} \cdot v = 0\,.$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách v nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

(3.103) $$\boxed{\nabla_r T = 0}$$

This only shows that it does not have an internal contradiction balance... thermodynamic equilibrium ???

a

(3.104) $$\boxed{\nabla_r\left(\ln\frac{n}{T^{3/2}}\right) - \frac{F}{kT} = 0\,.}$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

(3.105) $$F = kT\,\nabla_r\left(\ln\frac{n}{T^{3/2}}\right).$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako Φ ($F = -\nabla_r \Phi$), pak

(3.106) $$\Phi = -kT \ln n + \text{konst}$$

a pro koncentraci dostáváme

(3.107) $$\boxed{n = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right),}$$

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

(3.108) $$f = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right)$$

All this in balance

It is necessary to understand this so that we can use it???

Maxwell's distribution function

- Magnetic field

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

Sledujme nyní, jak vypadá rovnovážný stav systému za přítomnosti magnetického pole. Jak jsme již uvedli, je síla, způsobená tímto polem, úměrná výrazu $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. V rovnici (3.96) je poslední člen na pravé straně nyní nutno nahradit členem

$$\iint \left\{ -\frac{\boldsymbol{F}}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) - \frac{q}{m} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} . \tag{3.109}$$

Jak snadno zjistíme, je však tento integrál nulový; vyskytuje se zde integrál typu

$$B_z \iiint v_y \frac{\partial}{\partial v_x} (f \ln f) \, \mathrm{d}v_x \, \mathrm{d}v_y \, \mathrm{d}v_z = B_z \iint v_y [f \ln f]_{v_x = -\infty}^{v_x = +\infty} \mathrm{d}v_y \, \mathrm{d}v_x = 0 \tag{3.110}$$

a tedy rovnice (3.98) a (3.99) se nemění. Protože dále platí $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0$, zůstává v platnosti i rovnice (3.102) a platí proto i další důsledky této rovnice.

Rozšíříme nyní naše úvahy na případ systému, který se skládá z několika druhů částic. Pro jednoduchost opět předpokládejme, že $\nabla_r = 0$ a vnější síly jsou nulové. Boltzmannova rovnice pro i-tý druh částic systému má pak tvar

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j . \tag{3.111}$$

i and j

H-funkce systému je nyní definována rovnicí

$$H(t) = \sum_i \int f_i(\boldsymbol{v}_i, t) \ln f_i(\boldsymbol{v}_i, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i . \tag{3.112}$$

Potom

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j} \iiiint (1 + \ln f_i)(f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i ; \tag{3.113}$$

tento výraz lze dále upravit za pomoci (3.63) tak, že

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4} \sum_{i,j} \iiiint \left(\ln \frac{f_i' f_j'}{f_i f_j} \right) (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \tag{3.114}$$

a tedy

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \leq 0 . \tag{3.115}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \tag{3.43}$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \iint (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}\boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \tag{3.96}$$

$$= \iint \left\{ (1 + \ln f) \frac{\delta_e f}{\delta t} - \boldsymbol{v} \cdot \nabla_r (f \ln f) - \frac{\boldsymbol{F}}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} .$$

Poslední dva členy pravé strany (3.96) při integraci vymizí (protože $\lim_{v \to \pm\infty} f \ln f = \lim f \ln f = 0$) a můžeme proto psát

$$\delta H / \delta t = 0$$

V rovnovážném stavu je $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$ a stejným způsobem jako v předchozích případech zjistíme, že

$$f_i = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_i V_i^2}{2kT_i} \right) , \tag{3.116}$$

kde $\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0$.

Maxwel distribution function

- Potential field

$$\delta H / \delta t = 0$$

Balance … that's terribly strong

(No macroscopic movement)

v rovnovážném stavu, kdy $\delta_e f/\delta t = 0$, je potom

(3.99) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right),$$

kde $V = v - v_0$. Veličiny n, v_0 a T nyní nezávisí na v a t, ale závisí na r.

Tuto závislost si demonstrujme na jednoduchém případu, kdy $v_0 = 0$. !!!
Potom

(3.100) $$f = n(r)\left(\frac{m}{2\pi kT(r)}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT(r)}$$

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

a musí platit

(3.101) $$v \cdot \nabla_r f + \frac{F}{m} \cdot \nabla_v f = 0 .$$

(3.43) $$\cancel{\frac{\partial f_i}{\partial t}} + \boxed{v_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{F_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i} = \sum_j \iiint \cancel{(f_i' f_j'} - f_i f_j)\, g_{ij} b\, db\, d\varepsilon\, dv_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

=0 =0

Dosadíme-li nyní do této rovnice rozdělovací funkci (3.100), dostaneme po kratších úpravách

(3.102) $$v \cdot \nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) + \frac{m}{2kT}\frac{v^2}{T} v \cdot \nabla_r T - \frac{F}{kT} \cdot v = 0 .$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách v nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

(3.103) $$\boxed{\nabla_r T = 0}$$

This only shows that it does not have an internal contradiction
balance... **thermodynamic equilibrium** ???

a

(3.104) $$\boxed{\nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) - \frac{F}{kT} = 0 .}$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

(3.105) $$F = kT\, \nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right).$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako Φ $(F = -\nabla_r \Phi)$, pak

(3.106) $$\Phi = -kT \ln n + \text{konst}$$

a pro koncentraci dostáváme

(3.107) $$\boxed{n = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right),}$$

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

(3.108) $$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right)$$

All this in balance

This must be understood in such a way that we can use it???

Maxwel distribution function

v rovnovážném stavu, kdy $\delta_e f/\delta t = 0$, je potom

$$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right), \tag{3.99}$$

$$\delta H \big/ \delta t = 0$$

kde $V = v - v_0$. Veličiny n, v_0 a T nyní nezávisí na v a t, ale závisí na r.

Tuto závislost si demonstrujme na jednoduchém případu, kdy $v_0 = 0$. Potom

$$f = n(r)\left(\frac{m}{2\pi kT(r)}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT(r)} \tag{3.100}$$

a musí platit

$$v \cdot \nabla_r f + \frac{F}{m} \cdot \nabla_v f = 0\,. \tag{3.101}$$

Dosadíme-li nyní do této rovnice rozdělovací funkci (3.100), dostaneme po kratších úpravách

$$v \cdot \nabla_r\left(\ln\frac{n}{T^{3/2}}\right) + \frac{m}{2kT}\frac{v^2}{T} v \cdot \nabla_r T - \frac{F}{kT} \cdot v = 0\,. \tag{3.102}$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách v nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

$$\boxed{\nabla_r T = 0} \tag{3.103}$$

a

$$\boxed{\nabla_r\left(\ln\frac{n}{T^{3/2}}\right) - \frac{F}{kT} = 0\,.} \tag{3.104}$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

$$F = kT\,\nabla_r\left(\ln\frac{n}{T^{3/2}}\right). \tag{3.105}$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako Φ $(F = -\nabla_r \Phi)$, pak

$$\Phi = -kT \ln n + \text{konst} \tag{3.106}$$

a pro koncentraci dostáváme

$$\boxed{n = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right),} \tag{3.107}$$

- Potential field

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

!!!!!!!!

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

$$f = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right) \tag{3.108}$$

- f is standardized to n !!!
- f was derived with assumption v_0=0!!!

(No macroscopic movement)

Maxwel distribution function

- Potential field

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

(3.108) $$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right) d\vec{v}$$

- f is standardized to n

f was derived under the assumption of $v_0=0$ ➔ no macroscopic motion

$$f = \underline{n_0} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \underline{\exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad d\vec{v}$$

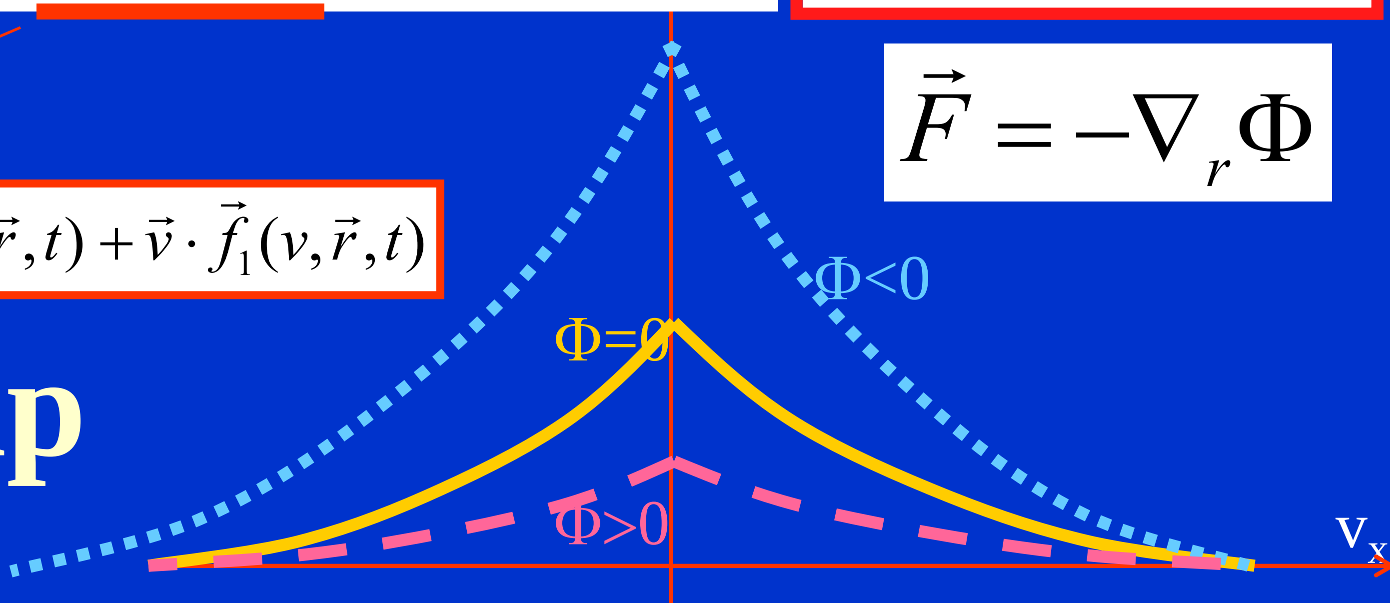
$$\boxed{n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)}$$

n(r)

$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$

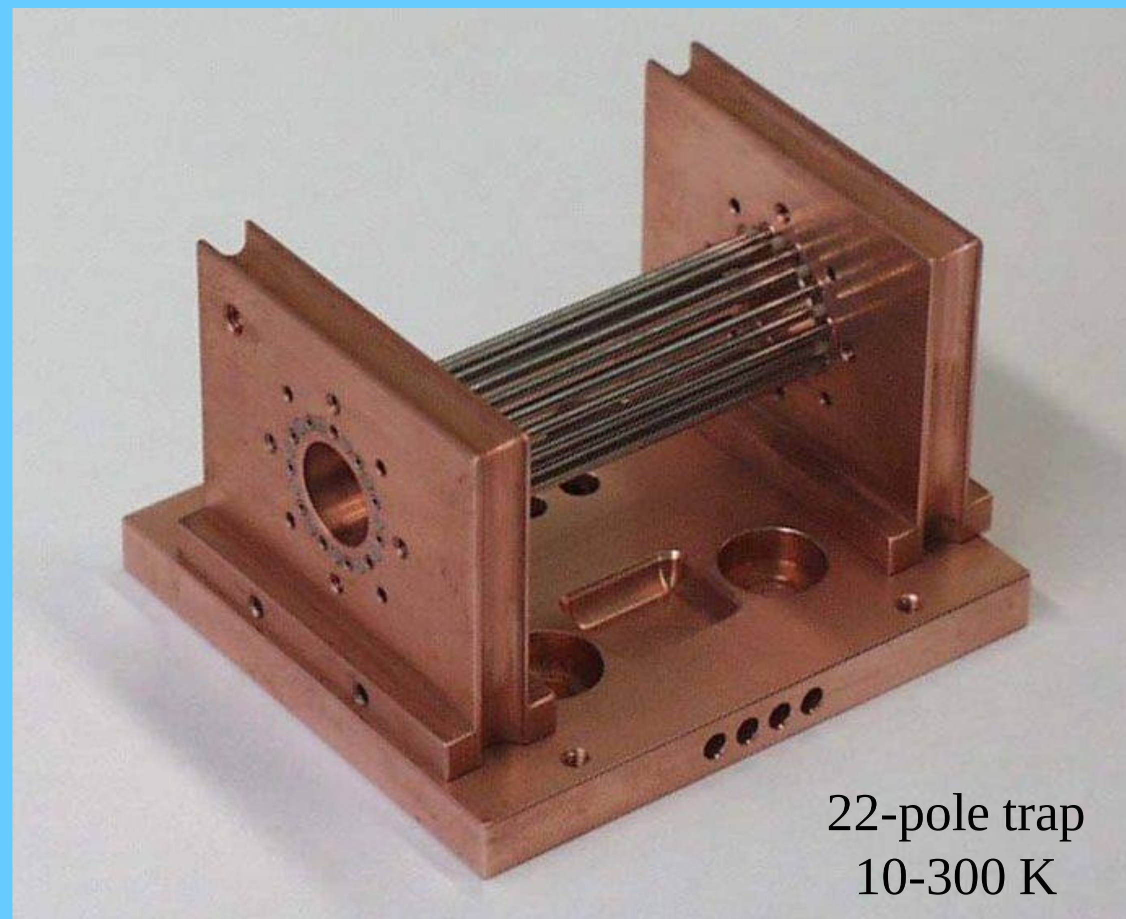
$$\boxed{f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)}$$

Ion trap



When we were still Barbarians

Keď my sme ešte boli Barbari



End of story
EVERYDAY REALITY

Maxwel distribution function

$$\delta H / \delta t = 0$$

v rovnovážném stavu, kdy $\delta_e f/\delta t = 0$, je potom

$$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right), \tag{3.99}$$

kde $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$. Veličiny n, $\mathbf{v}_0$ a T nyní nezávisí na $\mathbf{v}$ a t, ale závisí na $\mathbf{r}$.

Tuto závislost si demonstrujme na jednoduchém případu, kdy $\mathbf{v}_0 = 0$. Potom

$$f = n(\mathbf{r})\left(\frac{m}{2\pi kT(\mathbf{r})}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT(\mathbf{r})} \tag{3.100}$$

a musí platit

$$\mathbf{v}\,.\,\nabla_r f + \frac{\mathbf{F}}{m}\,.\,\nabla_v f = 0\,. \tag{3.101}$$

Dosadíme-li nyní do této rovnice rozdělovací funkci (3.100), dostaneme po kratších úpravách

$$\mathbf{v}\,.\,\nabla_r\left(\ln\frac{n}{T^{3/2}}\right) + \frac{m}{2kT}\frac{v^2}{T}\,\mathbf{v}\,.\,\nabla_r T - \frac{\mathbf{F}}{kT}\,.\,\mathbf{v} = 0\,. \tag{3.102}$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách v nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

$$\boxed{\nabla_r T = 0} \tag{3.103}$$

a

$$\boxed{\nabla_r\left(\ln\frac{n}{T^{3/2}}\right) - \frac{\mathbf{F}}{kT} = 0\,.} \tag{3.104}$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

$$\mathbf{F} = kT\,\nabla_r\left(\ln\frac{n}{T^{3/2}}\right). \tag{3.105}$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako Φ ($\mathbf{F} = -\nabla_r\Phi$), pak

$$\Phi = -kT\ln n + \text{konst} \tag{3.106}$$

a pro koncentraci dostáváme

$$\boxed{n = n_0\exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right),} \tag{3.107}$$

Potential field

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

!!!!!!!!

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

$$f = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right) \tag{3.108}$$

- f is normalised to n !!!!
- f was derived under assumption $v_0=0$!!!!

→ no macroscopic movement

Magnetic field

$\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Obdobným způsobem můžeme postupovat při $\mathbf{v}_0 \neq 0$. Zde je ale nutno použít Boltzmannovy rovnice (3.130) v proměnných $\mathbf{V}$, $\mathbf{r}$, t (viz str. 89).

$$f_i = n_i\left(\frac{m_i}{2\pi kT_i}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_iV_i^2}{2kT_i}\right), \tag{3.116}$$

kde $\mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0$.

continuation

Maxwell's distribution function

- Magnetic field

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

Sledujme nyní, jak vypadá rovnovážný stav systému za přítomnosti magnetického pole. Jak jsme již uvedli, je síla, způsobená tímto polem, úměrná výrazu $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. V rovnici (3.96) je poslední člen na pravé straně nyní nutno nahradit členem

$$\iint \left\{ -\frac{\boldsymbol{F}}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) - \frac{q}{m} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} . \tag{3.109}$$

Jak snadno zjistíme, je však tento integrál nulový; vyskytuje se zde integrál typu

$$B_z \iiint v_y \frac{\partial}{\partial v_x} (f \ln f) \, \mathrm{d}v_x \, \mathrm{d}v_y \, \mathrm{d}v_z = B_z \iint v_y [f \ln f]_{v_x = -\infty}^{v_x = +\infty} \mathrm{d}v_y \, \mathrm{d}v_x = 0 \tag{3.110}$$

a tedy rovnice (3.98) a (3.99) se nemění. Protože dále platí $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0$, zůstává v platnosti i rovnice (3.102) a platí proto i další důsledky této rovnice.

Rozšíříme nyní naše úvahy na případ systému, který se skládá z několika druhů částic. Pro jednoduchost opět předpokládejme, že $\nabla_r = 0$ a vnější síly jsou nulové. Boltzmannova rovnice pro i-tý druh částic systému má pak tvar

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j . \tag{3.111}$$

H-funkce systému je nyní definována rovnicí

$$H(t) = \sum_i \int f_i(\boldsymbol{v}_i, t) \ln f_i(\boldsymbol{v}_i, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i . \tag{3.112}$$

Potom

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j} \iiiint (1 + \ln f_i)(f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i ; \tag{3.113}$$

tento výraz lze dále upravit za pomoci (3.63) tak, že

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4} \sum_{i,j} \iiiint \left(\ln \frac{f_i' f_j'}{f_i f_j} \right) (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \tag{3.114}$$

a tedy

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \leq 0 . \tag{3.115}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j) \, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \tag{3.43}$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \iint (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}\boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \tag{3.96}$$

$$= \iint \left\{ (1 + \ln f) \frac{\delta_e f}{\delta t} - \boldsymbol{v} \cdot \nabla_r (f \ln f) - \frac{\boldsymbol{F}}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} .$$

Poslední dva členy pravé strany (3.96) při integraci vymizí (protože $\lim_{v \to \pm\infty} f \ln f = \lim f \ln f = 0$) a můžeme proto psát

$$\delta H / \delta t = 0$$

V rovnovážném stavu je $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$ a stejným způsobem jako v předchozích případech zjistíme, že

$$f_i = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_i V_i^2}{2kT_i} \right), \tag{3.116}$$

kde $\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0$.

Maxwel distribution function

v rovnovážném stavu, kdy $\delta_e f/\delta t = 0$, je potom

(3.99) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right),$$

$$\delta H / \delta t = 0$$

kde $V = v - v_0$. Veličiny n, v_0 a T nyní nezávisí na v a t, ale závisí na r.

Tuto závislost si demonstrujme na jednoduchém případu, kdy $v_0 = 0$. Potom

(3.100) $$f = n(r)\left(\frac{m}{2\pi kT(r)}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT(r)}$$

a musí platit

(3.101) $$v \cdot \nabla_r f + \frac{F}{m} \cdot \nabla_v f = 0\,.$$

Dosadíme-li nyní do této rovnice rozdělovací funkci (3.100), dostaneme po kratších úpravách

(3.102) $$v \cdot \nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) + \frac{m}{2kT}\frac{v^2}{T} v \cdot \nabla_r T - \frac{F}{kT} \cdot v = 0\,.$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách v nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

(3.103) $$\boxed{\nabla_r T = 0}$$

a

(3.104) $$\boxed{\nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) - \frac{F}{kT} = 0\,.}$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

(3.105) $$F = kT\,\nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right).$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako Φ ($F = -\nabla_r \Phi$), pak

(3.106) $$\Phi = -kT \ln n + \text{konst}$$

a pro koncentraci dostáváme

(3.107) $$\boxed{n = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right),}$$

- Potential field

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

!!!!!!!!

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

(3.108) $$f = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right)$$

- f is normalised to n !!!!

-f was derived under assumption v_0=0!!!!

→ no macroscopic movement

Force Field Potential

$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)$$

Maxwel distribution function

- Potential field

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

$$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right) d\vec{v} \tag{3.108}$$

- f je normovaná k n

-f byla odvozená za předpokladu v_0=0 ➔žádny makroskopický pohyb

$$f = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad d\vec{v}$$

n(r)

$$\boxed{n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)}$$

$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$

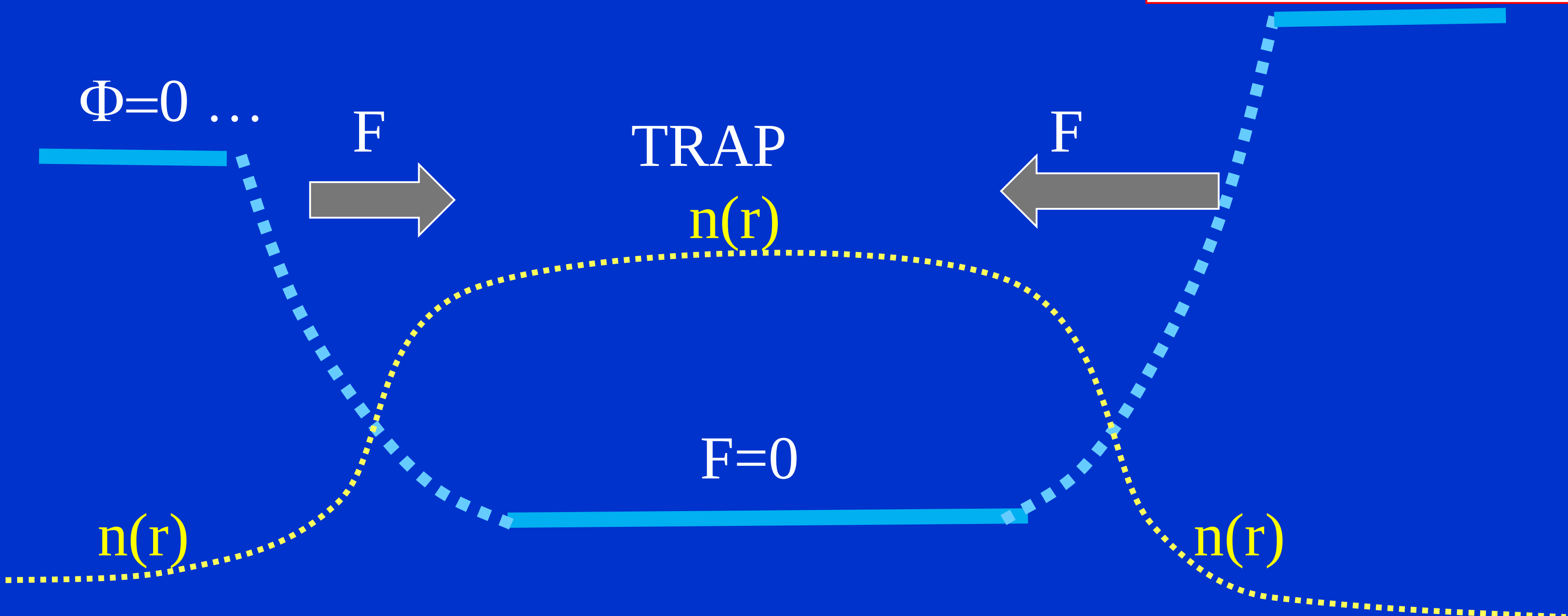
$$\boxed{f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)}$$

Maxwel distribution function

- Potential field

$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$

Force Field Potential



Density of trapped particles

$$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad d\vec{v}$$

n(r)

$$\boxed{n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)}$$

$$\boxed{f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)}$$

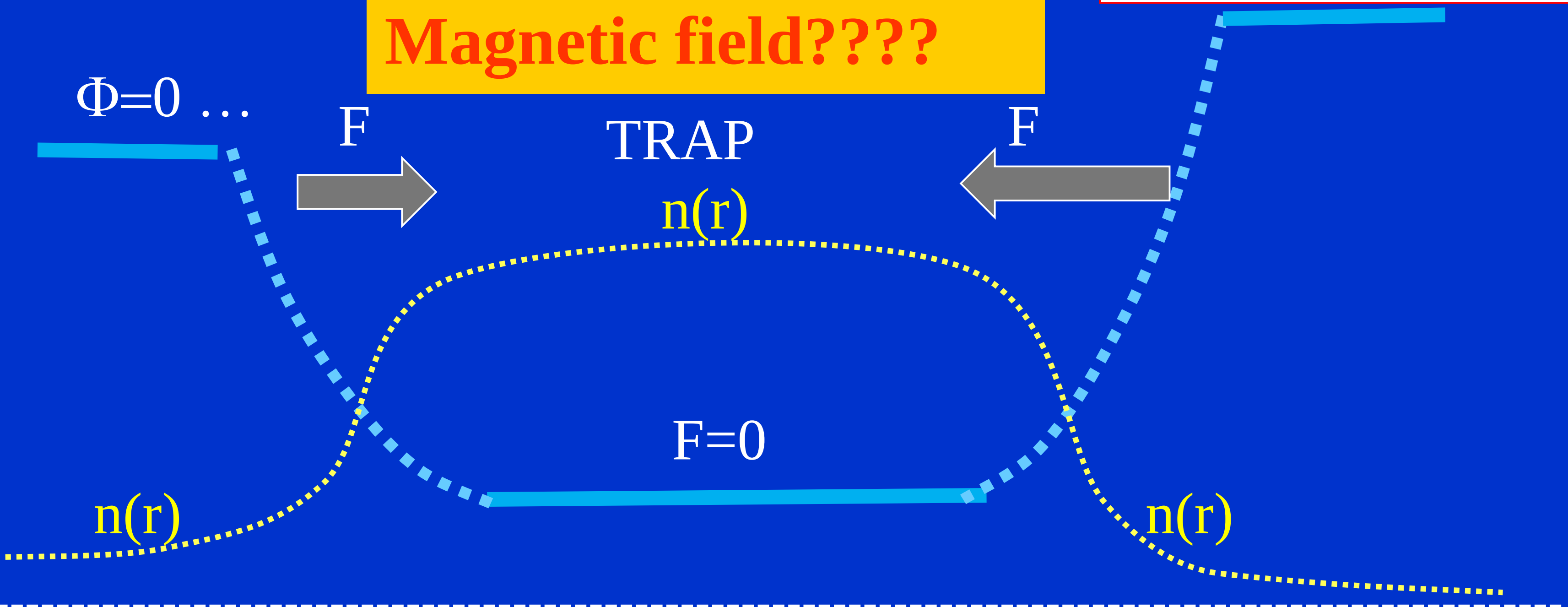
Maxwel distribution function

- Potential field

$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$

Force Field Potential

Magnetic field????



Density of trapped particles

$$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad d\vec{v}$$

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)$$

n(r)

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(v, \vec{r}, t) + \vec{v} \cdot \vec{f}_1(v, \vec{r}, t)$$

Quo vadis domine

Maxwell's Transport Equations – Transfer Equations

Maxwell's Transport Equations – Transfer Equations

- Integration of B. equation
- Relations between quantities

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \,\mathrm{d}b \,\mathrm{d}\varepsilon \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

3.5 Maxwellovy transportní rovnice (Rovnice přenosu)

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, jakým způsobem lze určit střední hodnoty některých fyzikálních veličin daného systému při znalosti rozdělovací funkce částic tohoto systému. Ukážeme si nyní, jakým způsobem je možno popsat makroskopické vlastnosti systému, aniž jsme nuceni znát rozdělovací funkce jednotlivých druhů částic tohoto systému.

Nechť funkce $\Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)$ charakterizuje nějakou vlastnost našeho systému (přesněji řečeno i-tého druhu částic). Vynásobíme-li nyní touto funkcí Boltzmannovu rovnici (3.43) a dále provedeme-li integraci takto získané rovnice přes rychlostní prostor i-té částice, dostaneme

- Multiplication of Boltzman equation by function Φ_i and integration over v_i

(3.117) $$\boxed{\int \left\{ \Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i \right) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \,.}$$

Levou stranu této rovnice můžeme dále upravit. Pro první člen můžeme psát

(3.118) $$\int \Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \frac{\partial f_i}{\partial t} \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_i f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i} - \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\partial}{\partial t} (n_i \bar{\Phi}_i) - n_i \left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}} \right),$$

finta

druhý člen je možno rozepsat, tj.

(3.119) $$\int \Phi_i \boldsymbol{v} \cdot \nabla_r f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \nabla_r \cdot \int \Phi_i \boldsymbol{v} f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int (\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i) f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \nabla_r \cdot (n_i \overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i (\overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i})$$

etc.

Maxwell's Transport Equations – Transfer Equations

- Integration of B. equation
- Relations between quantities

3.5 Maxwellovy transportní rovnice (Rovnice přenosu)

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, jakým způsobem lze určit střední hodnoty některých fyzikálních veličin daného systému při znalosti rozdělovací funkce částic tohoto systému. Ukážeme si nyní, jakým způsobem je možno popsat makroskopické vlastnosti systému, aniž jsme nuceni znát rozdělovací funkce jednotlivých druhů částic tohoto systému.

Nechť funkce $\Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)$ charakterizuje nějakou vlastnost našeho systému (přesněji řečeno i-tého druhu částic). Vynásobíme-li nyní touto funkcí Boltzmannovu rovnici (3.43) a dále provedeme-li integraci takto získané rovnice přes rychlostní prostor i-té částice, dostaneme

$$\int \left\{ \Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i \right) \right\} \mathrm{d}\mathbf{v}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \mathrm{d}\mathbf{v}_i . \tag{3.117}$$

Levou stranu této rovnice můžeme dále upravit. Pro první člen můžeme psát

$$\int \Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) \frac{\partial f_i}{\partial t} \mathrm{d}\mathbf{v}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_i f_i \, \mathrm{d}\mathbf{v}_i - \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \mathrm{d}\mathbf{v}_i = \tag{3.118}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(n_i \overline{\Phi}_i) - n_i \left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}} \right),$$

druhý člen je možno rozepsat, tj.

$$\int \Phi_i \mathbf{v} \cdot \nabla_r f_i \, \mathrm{d}\mathbf{v}_i = \nabla_r \cdot \int \Phi_i \mathbf{v} f_i \, \mathrm{d}\mathbf{v}_i - \int (v_i \cdot \nabla_r \Phi_i) f_i \, \mathrm{d}\mathbf{v}_i = \tag{3.119}$$

$$= \nabla_r \cdot (n_i \overline{\Phi_i \mathbf{v}_i}) - n_i (\overline{\mathbf{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i})$$

etc.

a konečně třetí člen je možno upravit zcela analogicky, tj.

$$\int \Phi_i \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i \, \mathrm{d}\mathbf{v}_i = \iint \frac{F_{ix}}{m_i} \int \Phi_i \frac{\partial f_i}{\partial v_{ix}} \mathrm{d}v_{ix} \, \mathrm{d}v_{iy} \, \mathrm{d}v_{iz} + \ldots = \tag{3.120}$$

$$= \iint \frac{F_{ix}}{m_i} \int \frac{\partial}{\partial v_{ix}} (\Phi_i f_i) \, \mathrm{d}v_{ix} \, \mathrm{d}v_{iy} \, \mathrm{d}v_{iz} - \iint \frac{F_{ix}}{m_i} \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial v_{ix}} \mathrm{d}v_{ix} \, \mathrm{d}v_{iy} \, \mathrm{d}v_{iz} + \ldots ;$$

protože $\lim_{v_i \to \pm\infty} (\Phi_i f_i) = 0$, je možno dále psát

$$\int \Phi_i \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i \, \mathrm{d}\mathbf{v}_i = -\int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i f_i \, \mathrm{d}\mathbf{v}_i = -n_i \left(\overline{\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i} \right). \tag{3.121}$$

~~Jestliže $\mathbf{F}_i$ nezávisí na rychlosti, je možno $\mathbf{F}_i/m_i$~~ vyjmout před integrál a (3.121) má pak tvar

$$\int \Phi_i \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i \, \mathrm{d}\mathbf{v}_i = -n_i \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot (\overline{\nabla_v \Phi_i}) . \tag{3.122}$$

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$\frac{\partial (n_i \overline{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i \overline{\Phi_i \mathbf{v}_i}) - n_i \left[\left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}} \right) + \overline{\mathbf{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i} + \overline{\frac{\mathbf{F}_i(\mathbf{v}_i)}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i} + \delta \overline{\Phi}_i \right] = 0 . \tag{3.123}$$

Rovnice (3.123) je obecnou rovnicí přenosu pro danou veličinu Φ_i, nazývá se Maxwellovou transportní rovnicí. Sumací (3.123) přes všechny druhy částic daného systému pak dostaneme rovnici přenosu pro veličinu Φ celého systému.

- Equation is general equation for Φ_i and it is named Maxwell transport equation

Maxwell's Transport Equations – Conservation Laws

$$(3.123)\quad \frac{\partial(n_i\bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r\cdot(n_i\overline{\Phi_i v_i}) - n_i\left[\left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}\right) + \overline{v_i\cdot\nabla_r\Phi_i} + \overline{\frac{F_i(v_i)}{m_i}\cdot\nabla_v\Phi_i} + \delta\bar{\Phi}_i\right] = 0\,.$$

Rovnice (3.123) je obecnou rovnicí přenosu pro danou veličinu Φ_i, nazývá se Maxwellovou transportní rovnicí. Sumací (3.123) přes všechny druhy částic daného systému pak dostaneme rovnici přenosu pro veličinu Φ celého systému.

- Integration of B. equation
- Relations between quantities

Uvažujme pro jednoduchost neutrální jednočásticový systém*) a nechť funkce Φ je rovna postupně srážkovým invariantům (3.65).

For

a) $\boxed{\Phi = \Psi = 1.}$

Potom $\bar{\Psi} = 1$, $\overline{\Psi V} = \mathrm{D}\Psi/\mathrm{D}t = \nabla_r\Psi = \nabla_V\Psi = \delta\bar{\Psi} = 0$ a z (3.129) dostaneme

$$(3.131)\quad \frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} + n\,\nabla_r\cdot v_0 = 0\,.$$

For constants are the derivatives equal to zero

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123)\quad \frac{\partial(n_i\bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r\cdot(n_i\overline{\Phi_i v_i}) - \boxed{n_i\left[\cancel{\left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}\right)} + \cancel{\overline{v_i\cdot\nabla_r\Phi_i}} + \cancel{\overline{\frac{F_i(v_i)}{m_i}\cdot\nabla_v\Phi_i}} + \cancel{\delta\bar{\Phi}_i}\right]} = 0\,.$$

and we obtaine

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r\cdot(n v_0) = 0\,,}$$

For i-th particles

Maxwell's Transport Equations – Conservation Laws

- Integration of B. equation
- Relations between quantities

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123)\quad \frac{\partial(n_i\bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i\overline{\Phi_i v_i}) - n_i\left[\cancel{\left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}\right)} + \cancel{\overline{v_i \cdot \nabla_r \Phi_i}} + \cancel{\overline{\frac{F_i(v_i)}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i}} + \cancel{\delta\bar{\Phi}_i}\right] = 0\,.$$

Uvažujme pro jednoduchost neutrální jednočásticový systém*) a nechť funkce Φ je rovna postupně srážkovým invariantům (3.65).

a) $\boxed{\Phi = \Psi = 1.}$

Potom $\bar{\Psi} = 1$, $\overline{\Psi V} = \mathrm{D}\Psi/\mathrm{D}t = \nabla_r\Psi = \nabla_V\Psi = \delta\bar{\Psi} = 0$ a z (3.129) dostaneme

$$(3.131)\quad \frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} + n\,\nabla_r \cdot v_0 = 0\,.$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n v_0) = 0\,,$$

For i-th particles

The law of conservation of number of particles

Maxwell's Transport Equations – Conservation Laws

- Integration of B. equation
- Relations between quantities

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$\frac{\partial(n_i\bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i\overline{\Phi_i v_i}) - n_i\left[\left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}\right) + \overline{v_i \cdot \nabla_r \Phi_i} + \overline{\frac{F_i(v_i)}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i} + \delta\bar{\Phi}_i\right] = 0 . \tag{3.123}$$

Položíme-li dále

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla_r \tag{3.127}$$

Uvažujme pro jednoduchost neutrální jednočásticový systém*) a nechť funkce Φ je rovna postupně srážkovým invariantům (3.65).

a) $\Phi = \Psi = 1.$

Potom $\bar{\Psi} = 1$, $\overline{\Psi V} = \mathrm{D}\Psi/\mathrm{D}t = \nabla_r \Psi = \nabla_V \Psi = \delta\bar{\Psi} = 0$ a z (3.129) dostaneme

$$\frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} + n\,\nabla_r \cdot v_0 = 0 . \tag{3.131}$$

S použitím (3.127) můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n v_0) = 0 , \tag{3.132}$$

The law of conservation of number of particles

což je zákon zachování počtu částic. Položíme-li $\Psi = m$, dostaneme z (3.132) známou rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_r \cdot (\varrho v_0) = 0 . \tag{3.133}$$

For b) $\Phi = \Theta = mV.$

Potom $\bar{\Theta} = \delta\bar{\Theta} = \nabla_r \Theta = \mathrm{D}\Theta/\mathrm{D}t = 0$, $n\overline{\Theta V} = \mathbf{p}$, $\nabla_V \Theta = m\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ je jednotkový tenzor); rovnice (3.127) dává

$$\frac{\mathrm{D}v_0}{\mathrm{D}t} = n\bar{F} - \nabla_r \cdot \mathbf{p} , \quad = \frac{\partial v_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla_r \vec{v}_0 \tag{3.134}$$

The law of conservation of momentum

což je zákon zachování hybnosti.

For c) $\Phi = \Sigma = \frac{1}{2}mV^2.$

Potom $\mathrm{D}\Sigma/\mathrm{D}t = \nabla_r \Sigma = \delta\bar{\Sigma} = 0$, $\nabla_V \Sigma = mV$, $n\overline{(\nabla_V \Sigma)\, V} = p$, podle (3.16) $n\overline{\Sigma V} = q$; rovnici (3.129) lze nyní upravit na tvar

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(n\bar{\Sigma}) + n\bar{\Sigma}\,\nabla_r \cdot v_0 + \nabla_r \cdot q + \mathbf{p} : \nabla_r v_0 - n\overline{FV} = 0 . \tag{3.135}$$

Uvážíme-li nyní, že

$$\overline{F(V)\, V} = 0 \tag{3.136}$$

platí i pro případ vnější síly typu (3.49), můžeme dále (s použitím rovnice kontinuity (3.131) přepsat rovnici (3.135) do tvaru

$$n\,\frac{\mathrm{D}\bar{\Sigma}}{\mathrm{D}t} = -\,(\mathbf{p} : \nabla_r v_0 + \nabla_r \cdot q) , \tag{3.137}$$

The law of conservation of energy

což je zákon zachování energie.

Transport equations for plasma

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$\boxed{\frac{\partial(n_i\overline{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r\,.\,(n_i\overline{\Phi_i v_i}) - n_i\left[\overline{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\right)} + \overline{v_i\,.\,\nabla_r \Phi_i} + \overline{\frac{F_i(v_i)}{m_i}\,.\,\nabla_v \Phi_i} + \delta\overline{\Phi}_i\right] = 0} \tag{3.123}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r\,.\,(n v_0) = 0\,,$$

p~nkT

Plazma, assumptions

3.7 Úprava transportních rovnic pro plazma

Rovnice (3.188), (3.189), (3.191) a (3.192) platí obecně pro vícesložkové plazma. Jsou však velmi složité, a proto se k praktickému řešení konkrétních úloh příliš nehodí. Upravíme proto tyto rovnice na základě některých předpokladů na přijatelnější a známější tvar. Předpokládejme, že*):

a) Plazma je kvasineutrální, tj.

$$\boxed{\sigma_e \sim 0 \quad \text{a} \quad J \sim j\,.} \tag{3.194}$$

Prostorový náboj σ_e můžeme zanedbat v pohybové rovnici (3.187) resp. (3.188) a v rovnici pro proudovou hustotu j (3.189). σ_e však není možno zanedbat v Poissonově rovnici.

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i}\nabla_r\,.\,(\varrho v_0) + \frac{1}{e}\nabla_r\,.\,j = 0\,. \tag{3.203}$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

$$\nabla_r\,.\,(\varrho v_0) = 0\,; \tag{3.204}$$

potom můžeme psát

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla_r\,.\,j = 0\,. \tag{3.203'}$$

for electrons

b) Hmotnost elektronů m_e je mnohem menší ve srovnání s hmotností iontů m_i, tj.

$$\boxed{\frac{m_e}{m_i} \ll 1 \quad \text{a také} \quad \frac{Z_i m_e}{m_i} \ll 1\,.} \tag{3.195}$$

c) Plazma je téměř izotropní a v_0 je dostatečně malé, tj. elektrický proud j, v_0 a tlakové gradienty jsou poruchy prvního řádu a proto členy, obsahující tyto veličiny ve druhé mocnině, stejně tak jako gradienty j a v_0 můžeme zanedbat.

d) Plazma není daleko od termodynamické rovnováhy, tj. parciální tlaky elektronů $\mathbf{p}_e$ a iontů $\mathbf{p}_i$ jsou téhož řádu; podle b) pak také platí

????

$$\frac{Z_i m_e}{m_i}\mathbf{p}_i \ll \mathbf{p}_e\,, \tag{3.196}$$

což znamená, že elektrokinetický tenzor iontů je zanedbatelný ve srovnání s elektrokinetickým tenzorem elektronů.

e) Tenzor $\mathbf{p}$ nahradíme skalárním tlakem $p = p_e + p_i$.

f) Plazma je dvousložkové; je tvořeno elektrony a ionty.

Na základě těchto předpokladů můžeme dále psát, že

$$n_i Z_i \cong n_e = n \tag{3.197}$$

$$\varrho = m_e n_e + m_i n_i \sim \varrho_i\,, \tag{3.198}$$

$$v_0 = \frac{1}{\varrho}(\varrho_i \bar{v}_i + \varrho_e \bar{v}_e) \cong \bar{v}_i\,. \tag{3.199}$$

doesn't apply to discharges??

Dále

$$j = Z_i e n_i \overline{V_i} - e n_e \overline{V_e} \cong Z_i e n_i \bar{v}_i - e n_e \bar{v}_e\,; \tag{3.200}$$

potom

$$n_e \bar{v}_e = Z_i n_i \bar{v}_i - \frac{j}{e} \cong \frac{Z_i}{m_i}\varrho v_0 - \frac{j}{e}\,. \tag{3.201}$$

Na základě výše uvedených předpokladů můžeme psát:

a) Pro jednotlivé složky plazmatu:

1) Rovnici kontinuity

$$\boxed{\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{m_i}\nabla_r\,.\,(\varrho v_0) = 0\,,} \tag{3.202}$$

Continuity equation for ionts

Transport equations for plasma

Plazma, assumptions

(3.203) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i}\nabla_r . (\varrho v_0) + \frac{1}{e}\nabla_r . j = 0 .$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

(3.204) $$\nabla_r . (\varrho v_0) = 0 ;$$

potom můžeme psát

(3.203′) $$\boxed{\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla_r . j = 0 .}$$

for electrons

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

(3.123) $$\frac{\partial (n_i \bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r . (n_i \overline{\Phi_i v_i}) - n_i \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right) + \overline{v_i . \nabla_r \Phi_i} + \frac{\overline{F_i(v_i)}}{m_i} . \nabla_v \Phi_i + \delta \bar{\Phi}_i \right] = 0 .$$

$$\Phi_i = m_i V_i .$$

2) Pohybové rovnice (na základě (3.161))

(3.205) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = n_i\, \delta_e(m_i \bar{V}_i) ,$$

(3.206) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + v_e \times B) - n_e F_e = n_e\, \delta_i(m_e \bar{V}_e) .$$

(3.158) $$\sum_i n_i\, \delta(\bar{\Phi}_i) = \sum_i n_i \sum_{j \neq i} \delta_j(\bar{\Phi}_i) = 0 .$$

Na pravé straně těchto rovnic vystupuje člen $n_i\, \delta_e(m_i \bar{V}_i)$, resp. $n_e\, \delta_i(m_e V_e)$. Podle (3.158) ale platí

(3.207) $$n_i\, \delta_e(m_i \bar{V}_i) + n_e\, \delta_i(m_e \bar{V}_e) = 0 , \quad \text{tj.}$$
$$n_e\, \delta_i(m_e \bar{V}_e) = - n_i\, \delta_e(m_i \bar{V}_i)$$

The sum of momentum in the centroid,

Just e and i

a tedy rovnice (3.205) a (3.206) jsou vzájemně spolu svázány.

Zmena hybnosti při zrážke ~ hybnost el.

V některých případech je možno předpokládat, že*)

(3.208) $$n_e\, \delta_i(m_e \bar{V}_e) = - n_i\, \delta_e(m_i \bar{V}_i) = \frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{V}_e - \bar{V}_i) = - \frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

Light ball changes "relative speed"

kde τ_e je střední doba mezi srážkami mezi elektrony a ionty resp. mezi částicemi různých druhů; $\tau_e^{-1} = \nu$ je pak srážková frekvence. Pohybové rovnice (3.205) a (3.206) můžeme za pomoci (3.208) psát ve tvaru

(3.205′) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = \frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

(3.206′) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + \bar{v}_e \times B) - n_e F_e = - \frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i) .$$

Transport equations for plasma

- Plazma, assumptions

(3.203) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i}\nabla_r \cdot (\varrho v_0) + \frac{1}{e}\nabla_r \cdot j = 0\,.$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

(3.204) $$\nabla_r \cdot (\varrho v_0) = 0\,;$$

potom můžeme psát

(3.203′) $$\boxed{\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla_r \cdot j = 0\,.}$$

Extreme caution must be exercised
In terms of confusion ← → ion-neutral particle

(3.158) $$\sum_i n_i\,\delta(\bar{\Phi}_i) = \sum_i n_i \sum_{j\neq i} \delta_j(\bar{\Phi}_i) = 0\,.$$

The sum of momentum in the centroid, only e and i

Change of momentum during collision
~ momentum of el.

Light ball changes "relative speed"

Change when switching to a neutral gas of different concentrations.... But equality in the change of momentum will remain... It's not trivial

It is for mean speed values

We could understand this as particles of the ith kind of conservation equation... would apply

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

(3.123) $$\frac{\partial(n_i\bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i\overline{\Phi_i v_i}) - n_i\left[\left(\overline{\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}}\right) + \overline{v_i \cdot \nabla_r\Phi_i} + \overline{\frac{F_i(v_i)}{m_i} \cdot \nabla_v\Phi_i} + \delta\bar{\Phi}_i\right] = 0\,.$$

$$\boxed{\Phi_i = m_i V_i.}$$

2) Pohybové rovnice (na základě (3.161))

(3.205) $$\varrho_i\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = n_i\,\delta_e(m_i\bar{V}_i)\,,$$

(3.206) $$\varrho_e\frac{\partial\bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + v_e \times B) - n_e F_e = n_e\,\delta_i(m_e\bar{V}_e)\,.$$

Na pravé straně těchto rovnic vystupuje člen $n_i\,\delta_e(m_i\bar{V}_i)$, resp. $n_e\,\delta_i(m_e V_e)$. Podle (3.158) ale platí

(3.207) $$\boxed{n_i\,\delta_e(m_i\bar{V}_i) + n_e\,\delta_i(m_e\bar{V}_e) = 0}$$ tj.

$$n_e\,\delta_i(m_e\bar{V}_e) = -n_i\,\delta_e(m_i\bar{V}_i)$$

a tedy rovnice (3.205) a (3.206) jsou vzájemně spolu svázány.

V některých případech je možno předpokládat, že*)

(3.208) $$n_e\,\delta_i(m_e\bar{V}_e) = -n_i\,\delta_e(m_i\bar{V}_i) = \frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{V}_e - \bar{V}_i) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i)\,,$$

kde τ_e je střední doba mezi srážkami mezi elektrony a ionty resp. mezi částicemi různých druhů; $\tau_e^{-1} = \nu$ je pak srážková frekvence. Pohybové rovnice (3.205) a (3.206) můžeme za pomoci (3.208) psát ve tvaru

Tu je chyba

(3.205′) $$\varrho_i\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = \frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i)\,,$$

(3.206′) $$\varrho_e\frac{\partial\bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + \bar{v}_e \times B) - n_e F_e = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i)\,.$$

Interpretation of the transport equation for plasma

- Movement of electrons in an electric field

$$(3.205')\quad \cancel{\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = \frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i)},$$

$$(3.206')\quad \cancel{\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t}} + \cancel{\nabla_r p_e} + \overset{n_e}{en}(E + \cancel{\bar{v}_e \times B}) - \cancel{n_e F_e} = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \cancel{\bar{v}_i}).$$

$$en_eE = n_em_e\boxed{\underline{v}_e}/\tau_e$$

Neglected ion velocity

τ_e=1/(collisional frequency)

Electron-ion

$$J_e = en_e\underline{v}_e = \underbrace{(e^2 n_e \tau_e/m_e)}_{\text{conductivity}} \cdot E$$

Electron/ion plasma

Electron/ion/neutral plasma

The important thing was that one is heavy and electrons are light.

Extreme caution must be exercised
In terms of confusion, ion-neutral particle

Transport equations for plasma

- A more consistent

$$\varrho_i \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(\boldsymbol{E} + \bar{\boldsymbol{v}}_i \times \boldsymbol{B}) - n_i \boldsymbol{F}_i = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{\boldsymbol{v}}_e - \bar{\boldsymbol{v}}_i) , \tag{3.205'}$$

$$\varrho_e \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(\boldsymbol{E} + \bar{\boldsymbol{v}}_e \times \boldsymbol{B}) - n_e \boldsymbol{F}_e = -\frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{\boldsymbol{v}}_e - \bar{\boldsymbol{v}}_i) . \tag{3.206'}$$

Currents would be preferable

b) Pro systém nabitých částic (plazma jako celek):

1) Rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_r . (\varrho \boldsymbol{v}_0) = 0 ,$$

zákon zachování náboje

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} + \nabla_r . \boldsymbol{j} = 0 . \tag{3.210}$$

2) Pohybovou rovnici (zákon zachování impulsu)

$$\varrho \frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t} = -\nabla_r p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} + \sum_k n_k \boldsymbol{F}_k . \tag{3.211}$$

$$e n_e \mathbf{E} = n_e m_e \underline{\mathbf{v}}_e / \tau_e$$

Transport equations for plasma – conductivity – generalized Ohm's law

b) Pro systém nabitých částic (plazma jako celek):

1) Rovnici kontinuity

(3.209) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_r \cdot (\varrho \boldsymbol{v}_0) = 0\,,$$

zákon zachování náboje

(3.210) $$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} + \nabla_r \cdot \boldsymbol{j} = 0\,.$$

2) Pohybovou rovnici (zákon zachování impulsu)

(3.211) $$\varrho \frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t} = -\nabla_r p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} + \sum_k n_k \boldsymbol{F}_k\,.$$

3) Rovnici pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$

(3.212) $$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{e^2 n_e}{m_e}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \frac{e}{m_e}\nabla_r p_e - \sum_k \frac{Z_k e}{m_k} n_k \boldsymbol{F}_k = \frac{Z_i e n_i}{m_i}\,\delta_e(m_i \overline{\boldsymbol{V}}_i) - \frac{e n_e}{m_e}\,\delta_i(m_e \overline{\boldsymbol{V}}_e)\,,$$

protože podle (3.199) a (3.201) platí

(3.213) $$\sum_k \frac{Z_k^2 e^2 n_k}{m_k}\,\bar{\boldsymbol{v}}_k = \frac{e^2}{m_e}\left[n_e \bar{\boldsymbol{v}}_e + \frac{Z_i^2 n_i m_e}{m_i}\,\bar{\boldsymbol{v}}_i\right] \cong \frac{e^2}{m_e}\left[-\frac{\boldsymbol{j}}{e} + \boldsymbol{v}_0 Z_i n_i\left(1 + \frac{Z_i m_e}{m_i}\right)\right] \cong \frac{e^2}{m_e}\left(n_e \boldsymbol{v}_0 - \frac{\boldsymbol{j}}{e}\right).$$

Pravou stranu (3.212) můžeme ještě dále upravit, protože (3.208) můžeme psát jako

(3.214) $$n_e\,\delta_i(m_e \overline{\boldsymbol{V}}_e) = -n_i\,\delta_e(m_i \overline{\boldsymbol{V}}_i) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\overline{\boldsymbol{V}}_e - \overline{\boldsymbol{V}}_i) \cong +\frac{m_e}{\tau_e e}\,\boldsymbol{j}\,.$$

Potom ale můžeme psát, že

(3.215) $$\frac{Z_i e n_i}{m_i}\,\delta_e(m_i \overline{\boldsymbol{V}}_i) - \frac{e n_e}{m_e}\,\delta_i(m_e \overline{\boldsymbol{V}}_e) = -\frac{e n_e}{m_e}\left(1 + \frac{Z_i m_e}{m_i}\right)\delta_i(m_e \overline{\boldsymbol{V}}_e) \cong -\frac{e n_e}{m_e}\,\delta_i(m_e \overline{\boldsymbol{V}}_e) \cong -\frac{\boldsymbol{j}}{\tau_e}$$

a rovnice pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$ (zobecněný Ohmův zákon) má nyní tvar

(3.216) $$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{e^2 n_e}{m_e}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \frac{e}{m_e}\nabla_r p_e - \sum_{(k)} \frac{Z_k^2 e^2 n_k}{m_k}\boldsymbol{F}_k = -\frac{\boldsymbol{j}}{\tau_e}\,.}$$

Zde je ovšem nutno poznamenat, že zobecněný Ohmův zákon (3.216) je použitelný pro plně ionizované plazma opět pouze v prvním přiblížení. Obecně totiž může pravá strana této rovnice záviset na magnetickém poli uvnitř plazmatu a gradientu teploty elektronů. Jestliže zanedbáme $\nabla_r T_e$, pak je pravá strana (3.216) stále ještě složena ze dvou členů; jestliže systém není daleko rovnováhy, pak přesnější tvar pravé strany rovnice (3.216) je

(3.217) **In a magnetic field** $$-\frac{1}{\tau_e}\left(\frac{\boldsymbol{j}_\parallel}{1{,}96} + \boldsymbol{j}_\perp\right),$$

kde $\boldsymbol{j}_\parallel$ je složka proudové hustoty ve směru magnetického pole a $\boldsymbol{j}_\perp$ je složka proudové hustoty ve směru kolmém na magnetické pole.

Rozdíl mezi (3.217) a (3.215) resp. pravou stranou (3.216), si ukážeme názorně na příkladu. Předpokládejme stacionární stav, tj. $\partial \boldsymbol{j}/\partial t = 0$ a nechť $\boldsymbol{F}_k = 0$. Z rovnice (3.216) pak dostaneme

(3.218) $$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \frac{1}{n_e e}\,\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}\,,$$

kde

(3.219) $$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{n_e e}\nabla_r p_e$$

a

(3.220) $$\boxed{\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}}$$ plasma CONDUCTIVITY

je vodivost plazmatu. Vyjádříme-li z (3.218) $\boldsymbol{j}$, dostaneme po menších úpravách, že

(3.221) $$\boxed{\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}'_\parallel + \frac{\sigma}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_e^2}\{\boldsymbol{E}'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{E}')\}\,,}$$

kde

(3.222) $$\boxed{\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{B}}{B} \quad \text{a} \quad \omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}}$$ Elec. Cyklotrone frequency

je elektronová cyklotronová frekvence.

CONDUCTIVITY in mag. field

Transport equation for plasma - conductivity

a rovnice pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$ (zobecněný Ohmův zákon) má nyní tvar

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{e^2 n_e}{m_e}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \frac{e}{m_e}\nabla_r p_e - \sum_{(k)} \frac{Z_k^2 e^2 n_k}{m_k}\boldsymbol{F}_k = -\frac{\boldsymbol{j}}{\tau_e}. \tag{3.216}$$

Zde je ovšem nutno poznamenat, že zobecněný Ohmův zákon (3.216) je použitelný pro plně ionizované plazma opět pouze v prvním přiblížení. Obecně totiž může pravá strana této rovnice záviset na magnetickém poli uvnitř plazmatu a gradientu teploty elektronů. Jestliže zanedbáme $\nabla_r T_e$, pak je pravá strana (3.216) stále ještě složena ze dvou členů; jestliže systém není daleko rovnováhy, pak přesnější tvar pravé strany rovnice (3.216) je

$$-\frac{1}{\tau_e}\left(\frac{\boldsymbol{j}_\parallel}{1{,}96} + \boldsymbol{j}_\perp\right), \tag{3.217}$$

kde $\boldsymbol{j}_\parallel$ je složka proudové hustoty ve směru magnetického pole a $\boldsymbol{j}_\perp$ je složka proudové hustoty ve směru kolmém na magnetické pole.

Rozdíl mezi (3.217) a (3.215) resp. pravou stranou (3.216), si ukážeme názorně na příkladu. Předpokládejme stacionární stav, tj. $\partial \boldsymbol{j}/\partial t = 0$ a nechť $\boldsymbol{F}_k = 0$. Z rovnice (3.216) pak dostaneme

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \frac{1}{n_e e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}, \tag{3.218}$$

kde

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{n_e e}\nabla_r p_e \tag{3.219}$$

a

$$\boxed{\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}} \tag{3.220}$$

je vodivost plazmatu. Vyjádříme-li z (3.218) $\boldsymbol{j}$, dostaneme po menších úpravách, že

$$\boxed{\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}'_\parallel + \frac{\sigma}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_e^2}\{\boldsymbol{E}'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{E}')\}}, \tag{3.221}$$

kde

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{B}}{B} \quad \text{a} \quad \omega_{ce} = \frac{eB}{m_e} \tag{3.222}$$

je elektronová cyklotronová frekvence.

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}$$

conductivity

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}$$

cyclotron frequency,
It is characterising B

Jestliže nyní použijeme na pravé straně (3.216) výrazu (3.217), dostaneme, že

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{j}_\parallel}{\sigma_\parallel} + \frac{\boldsymbol{j}_\perp}{\sigma_\perp} + \frac{1}{n_e e}(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}), \tag{3.223}$$

kde

$$\boxed{\sigma_\parallel = 1{,}96\sigma \quad \text{a} \quad \sigma_\perp = \sigma\,;} \tag{3.224}$$

vyloučením $\boldsymbol{j}$ pak dostaneme

$$\boxed{\boldsymbol{j} = \sigma_\parallel \boldsymbol{E}'_\parallel + \frac{\sigma_\perp}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_e^2}\{\boldsymbol{E}'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{E}')\}}. \tag{3.225}$$

Odtud již vidíme, že i v tak jednoduchém případě, kdy $\nabla_r T_e = 0$ a systém je blízko rovnováhy, je vodivost plazmatu závislá na směru magnetického pole.

V obecném případě má vodivost plazmatu tenzorový charakter.*)

Conductivity and we don't even know EEDF..? Is it possible in general...? And what σ(v) ??

I don't believe it.... But those conditions are probably different than the plasma in our lab....

And what about σ(v) ??

Transport equation for plasma - conductivity

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}$$

conductivity

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}$$

cyclotron frequency

collisions and cyclotron frequency

$$(3.208) \quad n_e\, \delta_i(m_e \overline{V}_e) = -\, n_i\, \delta_e(m_i \overline{V}_i) = \frac{n_e m_e}{\tau_e}(\overline{V}_e - \overline{V}_i) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i)\,,$$

kde τ_e je střední doba mezi srážkami mezi elektrony a ionty resp. mezi částicemi různých druhů; $\tau_e^{-1} = \nu$ je pak srážková frekvence.

$e n_e E = n_e m_e \mathbf{v}_e / \tau_e$

Equation for Drift

??????

$$\vec{\overline{v}} = -\frac{e}{m \nu_1}\vec{E} = \mu \vec{E}$$

$$\nu_1 = 2\pi N v \int_0^\pi (1 - \cos\chi)\, \sigma(\chi, v) \sin\chi \, d\chi$$

Jestliže nyní použijeme na pravé straně (3.216) výrazu (3.217), dostaneme, že

$$(3.223) \qquad E' = \frac{j_\parallel}{\sigma_\parallel} + \frac{j_\perp}{\sigma_\perp} + \frac{1}{n_e e}(j \times B)\,,$$

kde

$$(3.224) \qquad \boxed{\sigma_\parallel = 1{,}96\sigma \quad \text{a} \quad \sigma_\perp = \sigma\,;}$$

vyloučením j pak dostaneme

$$(3.225) \qquad \boxed{j = \sigma_\parallel E'_\parallel + \frac{\sigma_\perp}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_e^2}\{E'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(h \times E')\}\,.}$$

Odtud již vidíme, že i v tak jednoduchém případě, kdy $\nabla_r T_e = 0$ a systém je blízko rovnováhy, je vodivost plazmatu závislá na směru magnetického pole.

V obecném případě má vodivost plazmatu tenzorový charakter.*)

Extreme caution must be exercised
In terms of confusion, ion ← → neutral particle

And what about σ(v) ??

Transport equation for plasma - conductivity

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}$$

cyclotron frequency

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}$$

conductivity

collisions and cyclotron frequency

$e n_e E = n_e m_e \mathbf{v}_e / \tau_e$

Equation for Drift

??????

$$\bar{\vec{v}} = -\frac{e}{m v_1}\vec{E} = \mu \vec{E}$$

$$\nu_1 = 2\pi N v \int_0^{\pi} (1 - \cos\chi)\, \sigma(\chi, v) \sin\chi \, d\chi$$

Extreme caution must be exercised
In terms of confusion, ion ← → neutral particle

The end of a fairy tale

Malý Kracík.

Solution of B. equation

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$f(\boxed{\vec{v}}, \boxed{\vec{r}}, t)$$

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(v, \vec{r}, t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v, \vec{r}, t)$$

Solution of B. equation

- Malý a Velký Kracík.

Lorentz approximation for a two-component system consisting of neutral particles

and system of particles that have an electric charge....

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+\vec{v}_i\cdot\nabla_r f_i+\frac{\vec{F}_i}{m_i}\cdot\nabla_{v_i} f_i=\frac{\delta f_i}{\delta t}$$

We are looking for a solution in the form of

$$f(\vec{v},\vec{r},t)=f_0(v,\vec{r},t)+\frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)$$

to express particle flows

$$\frac{\partial\left(f_0(v,\vec{r},t)+\frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i\right)}{\partial t}+\vec{v}_i\cdot\nabla_r\left(f_0(v,\vec{r},t)+\frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)\right)+\frac{\vec{F}_i}{m_i}\cdot\nabla_{v_i}\left(f_0(v,\vec{r},t)+\frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)\right)=\frac{\delta f_i}{\delta t}$$

Solution of B. equation

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

- We are looking for a shape suitable for transport solutions....

$$\boxed{f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)}$$

$$\frac{\partial\left(f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i\right)}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r \left(f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)\right) + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} \left(f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)\right) = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

We're going to look for integrals like ....

$$\boxed{\bullet \int_\omega d\omega}$$

$$\frac{\partial\left(f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i\right)}{\partial t} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$\int_\omega \frac{\partial\left(f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i\right)}{\partial t} d\omega + \ldots\ldots\ldots\ldots = \int_\omega \frac{\delta f_i}{\delta t} d\omega$$

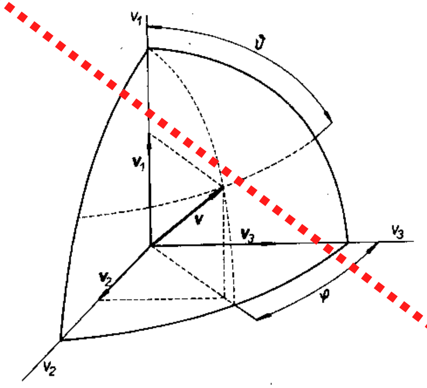
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \left(f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i\right) d\omega = \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega f_0(v,\vec{r},t) d\omega \quad + \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i d\omega = \frac{\partial}{\partial t} f_0 \int_\omega d\omega \quad + \quad \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \vec{f} \int_\omega \vec{v}/v \, d\omega} = \quad 4\pi \frac{\partial}{\partial t} f_0$$

We will show, for example, that..... ....

$$\int_\omega \frac{\vec{v}}{v} d\omega = 0$$

MATHEMATICS will be omitted

- Only mathematics.



Obr. 51,1. Poměry v rychlostním prostoru rychlosti **v**.

může úhel φ měnit od 0 do 2π, úhel ϑ od 0 do π a jelikož $(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{f}_i^{(1)}/c) \equiv (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{f}_i^{(1)}/v) = f_i^{(1)} \cos\vartheta$, vystihne $f_i^{(1)}$ směr unášivé rychlosti a určitým způsobem i její velikost. Podle obr. 51,1 pak platí

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_1}{v} &= \cos\vartheta\,, \\ \frac{v_2}{v} &= \cos(90-\vartheta)\cos(90-\varphi) = \sin\vartheta\sin\varphi\,, \\ \frac{v_3}{v} &= \cos(90-\vartheta)\cos\varphi = \sin\vartheta\cos\varphi\,. \end{aligned}\right\} \qquad (51,7)$$

Podle oddílu 33 element prostorového úhlu

$$d\omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

a element rychlostního prostoru

$$dv_1\, dv_2\, dv_3 = v^2\, dv\, d\omega\,.$$

Zavedeme-li ještě jednotkové vektory $\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0$ pro **c** ve směrech os *1*, *2* a *3*, dostaneme při (51,7):

$$\int_{(\omega)} d\omega = \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi\,, \qquad (51,8a)$$

$$\begin{aligned} \int_{(\omega)} \frac{\mathbf{v}}{v}\, d\omega &= \int_{(\omega)} \left(\frac{v_1}{v}\mathbf{e}_1^0 + \frac{v_2}{v}\mathbf{e}_2^0 + \frac{v_3}{v}\mathbf{e}_3^0\right) d\omega = \\ &= \mathbf{e}_1^0 2\pi \int_0^{\pi} \cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta + \mathbf{e}_2^0 \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi + \\ &+ \mathbf{e}_3^0 \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0\,, \end{aligned} \qquad (51,8b)$$

(51,8b)

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 d\omega = 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{4\pi}{3}\,, \qquad (51,8c)$$

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{v_2}{v}\right)^2 d\omega = \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{4\pi}{3}\,, \qquad (51,8d)$$

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{v_3}{v}\right)^2 d\omega = \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{4\pi}{3}\,. \qquad (51,8e)$$

Stejným způsobem vytvoříme průměry přes všechny směry v rychlostním prostoru z dalších výrazů:

$$\int_{(\omega)} \frac{v_1}{v}\frac{v_2}{v}\, d\omega = \int_{(\omega)} \frac{v_1}{v}\frac{v_3}{v}\, d\omega = \int_{(\omega)} \frac{v_2}{v}\frac{v_3}{v}\, d\omega = 0\,, \qquad (51,8f)$$

$$\begin{aligned} \int_{(\omega)} \left(\frac{v_1}{v}\right)^3 d\omega &= 2\pi \int_0^{\pi} \cos^3\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} (\cos 3\vartheta + 3\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \\ &= \int_{(\omega)} \left(\frac{v_2}{v}\right)^3 d\omega = \int_{(\omega)} \left(\frac{v_3}{v}\right)^3 d\omega = 0\,, \end{aligned} \qquad (51,8g)$$

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 \frac{v_2}{v}\, d\omega = \int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0\,,$$

stejně i

$$\begin{aligned} \int_{(\omega)} \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 \frac{v_3}{v}\, d\omega &= \int_{(\omega)} \left(\frac{v_2}{v}\right)^2 \frac{v_1}{v}\, d\omega = \int_{(\omega)} \left(\frac{v_2}{v}\right)^2 \frac{v_3}{v}\, d\omega = \\ &= \int_{(\omega)} \left(\frac{v_3}{v}\right)^2 \frac{v_1}{v}\, d\omega = \int_{(\omega)} \left(\frac{v_3}{v}\right)^2 \frac{v_2}{v}\, d\omega = 0\,, \end{aligned} \qquad (51,8h)$$

Solution of B. equation

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

- We are looking for a shape suitable for transport solutions....

$$\boxed{f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)}$$

$$\frac{\partial (f_0(v,\vec{r},t) + {}^{\vec{v}}\!/\!_{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i)}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r (f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)) + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} (f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)) = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$\frac{\partial (f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i)}{\partial t} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\delta f_i}{\delta t} \qquad \boxed{\bullet \int_\omega d\omega}$$

(51,8b)

$$\int_\omega \frac{\vec{v}}{v} d\omega = 0$$

$$\int_\omega \frac{\partial (f_0(v,\vec{r},t) + {}^{\vec{v}}\!/\!_{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i)}{\partial t} d\omega + \ldots\ldots\ldots\ldots = \int_\omega \frac{\delta f_i}{\delta t} d\omega$$

=0

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega (f_0(v,\vec{r},t) + {}^{\vec{v}}\!/\!_{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i) d\omega = \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega f_0(v,\vec{r},t) d\omega \quad + \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega {}^{\vec{v}}\!/\!_{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i d\omega = \frac{\partial}{\partial t} f_0 \int_\omega d\omega \quad + \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{f} \int_\omega {}^{\vec{v}}\!/\!_{v} \cdot d\omega = \quad 4\pi \frac{\partial}{\partial t} f_0$$

Attention, it was achieved according to Malý Kracík, the next is the equation according to Velký Kracík

(5.88) $$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \operatorname{div}_r \boldsymbol{f}_1 + \frac{v}{3} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial v} + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{f}_1 = J_{\text{I.L.}}(f_0),$$

což můžeme ještě upravit na

Equation A $\boxed{\bullet \int_\omega d\omega}$

(5.89) $$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \operatorname{div}_r \boldsymbol{f}_1 + \frac{1}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{f}_1) = J_{\text{I.L.}}(f_0).$$

Solution B. Decomposition into two equations

- Velký Kracík **VK**
- equations (A) a (B)

tak, že budou symetrické a irreducibilní.*) Tyto výpočty jsou však poměrně složité, a proto je zde nebudeme uvádět.**)

Shrneme-li předchozí výsledky, můžeme psát, že

$$f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}, t) = f_0(v, \boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_1(v, \boldsymbol{r}, t) + (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})^0 : \mathbf{f}_2(v, \boldsymbol{r}, t) + \dots . \tag{5.87}$$

Rovnici pro f_0 stanovíme celkem snadno z (5.50) s uvážením rovnic (5.67) a (5.74). Dostaneme

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \operatorname{div}_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{f}_1 + \frac{v}{3} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial v} + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{f}_1 = J_{\mathrm{I.L.}}(f_0)\,, \tag{5.88}$$

A

což můžeme ještě upravit na

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \operatorname{div}_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{f}_1 + \frac{1}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{f}_1) = J_{\mathrm{I.L.}}(f_0)\,. \tag{5.89}$$

A*

Attention, VK has a differently defined function f of vectors and scalars... from V

Solution B. Second equation

- Looking for f_0 a f_1

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+\vec{v}_i\cdot\nabla_r f_i+\frac{\vec{F}_i}{m_i}\cdot\nabla_{v_i} f_i=\frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$f(\vec{v},\vec{r},t)=f_0(v,\vec{r},t)+\frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial\left(f_0(v,\vec{r},t)+\vec{v}/v\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i\right)}{\partial t}+\vec{v}_i\cdot\nabla_r\left(f_0(v,\vec{r},t)+\frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)\right)+\frac{\vec{F}_i}{m_i}\cdot\nabla_{v_i}\left(f_0(v,\vec{r},t)+\frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)\right)=\frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$\frac{\partial\left(f_0(v,\vec{r},t)+\vec{v}/v\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)\right)}{\partial t}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{\delta f}{\delta t}$$

$$\bullet\int_\omega \vec{v}\,d\omega$$

$$\int_\omega \frac{\partial\left(f_0(v,\vec{r},t)+\vec{v}/v\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)\right)}{\partial t}\vec{v}\,d\omega+\ldots\ldots\ldots\ldots=\int_\omega\frac{\delta f}{\delta t}\vec{v}\,d\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega\left(f_0(v,\vec{r},t)+\vec{v}/v\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i\right)\vec{v}\,d\omega=\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega f_0\vec{v}\,d\omega\quad+\quad\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \vec{v}/v\cdot\vec{f}_1\vec{v}\,d\omega=\frac{\partial}{\partial t}f_0\int_\omega\vec{v}\,d\omega\quad+\quad\frac{\partial}{\partial t}\vec{f}\int_\omega\vec{v}/v\cdot\vec{f}_1\,\vec{v}\,d\omega=\frac{4}{3}\pi v\frac{\partial}{\partial t}f_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1+\ldots\ldots\sim\int_\omega\frac{\delta f}{\delta t}\vec{v}\,d\omega$$

Equation B

$$\bullet\int_\omega \vec{v}\,d\omega$$

Collision term - beyond the reach of our approximation

$$\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \cong \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{kT_k}{m_k}\frac{v^3}{\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k \lambda_i} f_i^{(0)}\right) - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_i^{(1)}}{\lambda_i}\,; \quad \boxed{m_i \ll m_k} \qquad (52{,}22)$$

$\boxed{\text{Dalším omezením je } n_i \ll n_k}$ ze stejných důvodů jako u rovnice (52,12). Poslední vyjádření $[\delta f_i/\delta t]$ tak velmi dobře pro pružné srážky částic i-tého druhu s částicemi k-tého druhu nahrazuje integrální vyjádření (31,25). Vystihuje tepelný neuspořádaný pohyb částic k-tého druhu a pro statistickou rovnováhu udává $f_i^{(0)}$ Maxwellovou rozdělovací funkcí.

Známe-li diferenciální vyjádření srážkového členu pro částice i-tého druhu s funkcemi $f_i^{(0)}$ a $\mathbf{f}_i^{(1)}$, můžeme odvodit výrazy $(1/4\pi)\int_{(\omega)}[\delta f_i/\delta t]\,d\omega$ z rovnice (51,18) a $(3/4\pi)(1/v)\int_{(\omega)}[\delta f_i/\delta t]\,\mathbf{v}\,d\omega$ z rovnice (51,23). Dosadíme do nich za $[\delta f_i/\delta t]$ ze vzorce (52,22) a provedeme naznačené úkony:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(\omega)}\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]d\omega = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v^3 kT_k}{m_k\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k\lambda_i} f_i^{(0)}\right)\int_{(\omega)} d\omega - \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{f}_i^{(1)}}{\lambda_i}\cdot\int_{(\omega)}\mathbf{v}\,d\omega\,.$$

Podle (51,8a) a (51,8b) dostáváme

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(\omega)}\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]d\omega = \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v^3 kT_k}{m_k\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k\lambda_i} f_i^{(0)}\right) \quad \boxed{m_i \ll m_k\,,\ n_i \ll n_k\,.} \qquad (52{,}23)$$

Stejně upravíme druhý potřebný výraz:

$$\frac{3}{4\pi}\frac{1}{v}\int_{(\omega)}\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]\mathbf{v}\,d\omega = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{v^3}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v^3 kT_k}{m_k\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k\lambda_i} f_i^{(0)}\right)\int_{(\omega)}\mathbf{v}\,d\omega - $$
$$- \frac{3}{4\pi}\frac{1}{v\lambda_i}\int_{(\omega)}\sum_\beta v_\beta \mathbf{e}_\beta^0 \sum_\alpha f_{i\alpha}^{(1)} v_\alpha\,d\omega\,.$$

Podle (51,8b) je první člen opět nulový, druhý člen podle vzorců (51,8c) až (51,8f) má smysl pouze pro $\alpha = \beta$, tj.

$$-\frac{3}{4\pi}\frac{v}{\lambda_i}\sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha^0 f_{i\alpha}^{(1)}\int_{(\omega)}\frac{v_\alpha^2}{v^2}\,d\omega = -\frac{v}{\lambda_i}\mathbf{f}_i^{(1)}\,.$$

- Search f_0 a f_1
- Integration of collision term

- Malý Kracík.

Solution B. Decomposition into two equations

- Velký Kracík
- Rovnice (A) a (B)

(5.14) $$v_1 = 2\pi N v \int_0^{\pi} (1 - \cos\chi)\, \sigma(\chi, v) \sin\chi \, d\chi$$

Držíme se Velkého Kracíka proto:

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(v, \vec{r}, t) + \vec{v} \cdot \vec{f}_1(v, \vec{r}, t)$$

Veličinu $v_l(v)$ definovanou rovnicí (5.11) resp. (5.12) můžeme interpretovat jako relaxační frekvenci l-tého řádu pro různé anisotropie plynu lehkých částic. Speciálně

(5.14) $$v_1 = 2\pi N v \int_0^{\pi} (1 - \cos\chi)\, \sigma(\chi, v) \sin\chi \, d\chi$$

N

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{Ze}{m}\boldsymbol{E}\,, \quad \boldsymbol{\omega}_c = -\frac{Ze}{m}\boldsymbol{B}\,,$$

Elec. Cyklotrone frequency

(5.95) $$\mathbf{f}_{(k)} = 0 \quad \text{pro} \quad k \geqq 2\,,$$

redukuje se rozklad (5.55) resp. (5.55′) na

(5.96) $$f(v, \boldsymbol{r}, t) = f_0(v, \boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_1(v, \boldsymbol{r}, t)$$

a rovnice pro funkce f_0 a $\boldsymbol{f}_1$ mají tvar

(5.97′) $$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \nabla_r \cdot \boldsymbol{f}_1 + \frac{1}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{f}_1) = J_{\text{I.L.}}(f_0)\,,$$

nebo rozepíšeme-li pravou stranu podle (5.40)

(5.97) $$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \nabla_r \cdot \boldsymbol{f}_1 + \frac{1}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{f}_1) = \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{2m}{M} v_1 v^3 \left(f_0 + \frac{2kT}{m} \frac{\partial f_0}{\partial (v^2)} \right) \right]$$ A

a

(5.98) $$\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial t} + \nabla_r f_0 + \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} - (\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{f}_1) = -v_1 \boldsymbol{f}_1\,.$$ B

Conservation Laws

- Vector mean values
- Scalar mean values

Všimněme si nyní trochu podrobněji posledních dvou rovnic, prot převážně těchto budeme v dalším textu používat. Z tvaru rozdělovací funkce $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ (5.96) je zřejmé, že funkce f_0 a f_1 musí nutně souviset s některými parametry ná ui uvažovaného systému částic.

V kapitole 3 jsme si definovali, že střední hodnota nějaké funkce $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ je dána výrazem

(5.99) $$\boxed{\bar{\varphi} = \frac{1}{n} \int \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \, d\mathbf{v} ,}$$

kde

(5.100) pre $\boxed{\varphi = 1}$ $$n = \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \, d\mathbf{v} .$$

$$\boxed{f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(v, \vec{r}, t) + \vec{v} \cdot \vec{f}_1(v, \vec{r}, t)}$$

Uvážíme-li nyní rozvoj (5.96), můžeme psát

(5.101) $$n = \int f_0 \, d\mathbf{v} + \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1 \, d\mathbf{v} .$$

$\vartheta \ (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$\varphi \ (0-2\pi)$

Protože ale $d\mathbf{v} = v^2 \, dv \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$, je

(5.102) $$\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1(v_1, \mathbf{r}, t) \, d\mathbf{v} =$$

$$= \int_0^\infty v^3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sin\vartheta \cos\varphi f_{1x} + \sin\vartheta \sin\varphi f_{1y} + \cos\vartheta f_{1z}) \, dv \, d\vartheta \, d\varphi = 0$$

viz 51.7 (KK)

a tedy

(5.103) $$\boxed{n = \int f_0 \, d\mathbf{v} = 4\pi \int_0^\infty v^2 f_0 \, dv .}$$

Podobným způsobem bychom celkem snadno zjistili, že bude-li φ skalární funkce v, $\mathbf{r}$ a t, je

(5.104) $$\boxed{\bar{\varphi} = \frac{4\pi}{n} \int_0^\infty v^2 f_0 \varphi \, dv .}$$

iba na f_0

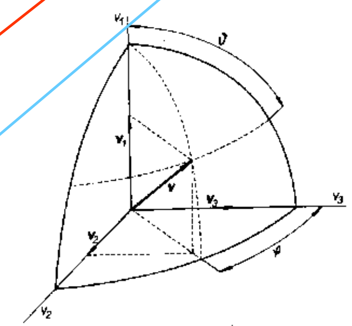
Nechť dále $\vec{\varphi}$ je vektorová funkce rychlosti $\mathbf{v}$, tj. nechť pre určitý tvar funkce

(5.105) $$\vec{\varphi} = \mathbf{v} \varphi'(v, \mathbf{r}, t)$$

Potom

(5.106) $$\bar{\vec{\varphi}} = \frac{1}{n} \int (f_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1) \, \mathbf{v}\varphi' \, d\mathbf{v} = \frac{1}{n} \int (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1) \, \mathbf{v}\varphi' \, d\mathbf{v} = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{n} \int_0^\infty v^4 f_1 \varphi' \, dv ,$$

o čemž je možno celkem snadno se přesvědčit integrací. iba na f_1



Obr. 51,1. Poměry v rychlostním prostoru rychlosti $\mathbf{v}$.

může úhel φ měnit od 0 do 2π, úhel ϑ od 0 do π a jelikož $(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{f}_i^{(1)}/c) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{f}_i^{(1)}/v) = f_i^{(1)} \cos\vartheta$, vystihne $f_i^{(1)}$ směr unášivé rychlosti a určitým způsobem i její velikost. Podle obr. 51,1 pak platí

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_1}{v} &= \cos\vartheta , \\ \frac{v_2}{v} &= \cos(90 - \vartheta)\cos(90 - \varphi) = \sin\vartheta \sin\varphi , \\ \frac{v_3}{v} &= \cos(90 - \vartheta)\cos\varphi = \sin\vartheta\cos\varphi . \end{aligned}\right\} \qquad (51,7)$$

Podle oddílu 33 element prostorového úhlu

$$d\omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

a element rychlostního prostoru

$$dv_1 \, dv_2 \, dv_3 = v^2 \, dv \, d\omega .$$

interpretation

kde (viz (5.106), kde $\varphi' = 1$)

(5.109) $$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{n} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^4 f_1 \, dv .$$

The end of a fairy tale

REALITY of everyday life