

# Boltzmann equation 2 PFP (FP II) Lecture 3A - 03. 03.2025

I am sorry for English, Czech and Slovak language ... , 😊, 😊, 😞, ....

## Advanced Plasma Physics

### Literatura:

#### Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu

„Velký Kracík“

J.Kracík, B. Šesták a L. Aubrecht

Academia Praha 1974

#### Fyzika plazmatu

J.Kracík, J. Tobiáš

Academia, Praha 1966

„Malý Kracík“

# Phase space

- We move from an exact description to a description using probabilities.
- Distribution functions

**N interacting particles, ---- each obeys the laws of classical dynamics.**

**Vectors:  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$**

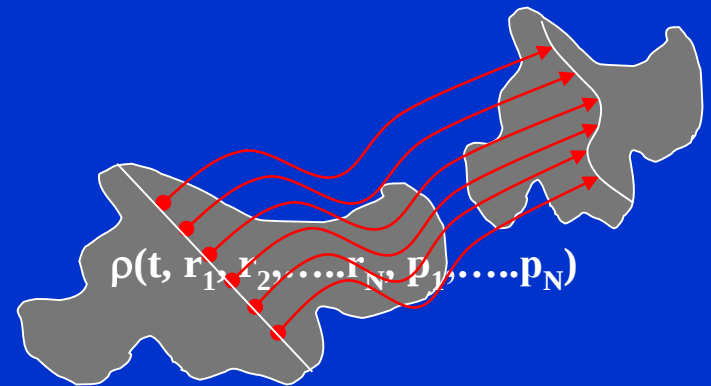
Coordinate, impulse

The element  $d\Gamma$  in  $\Gamma$  space as:  $d\Gamma = d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N = d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N$

The system file represents a "cloud" with a density of  $\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$

**A "cloud" with density**

$\rho$



# Phase space 6N dimensional space

We introduce several new functions

**N** interacting particles, ---- each obeys the laws of classical dynamics.

Element  $d\Gamma$  in  $\Gamma$  space as:  $d\Gamma = dr_1 dr_2 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N = dr^N dp^N$

The system file represents a "cloud" with a density of  $\rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$   
the ensemble of files

The total number of phases in the file is

$$\int \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^N dp^N = W$$

Probability density .

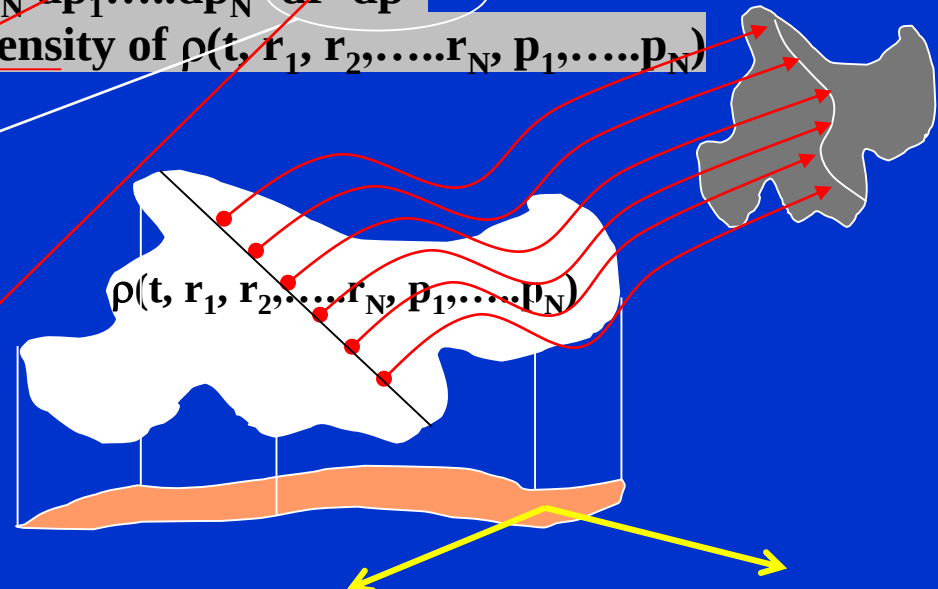
..density of probability

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

By integrating  $P$  over a subset of variables, we obtain a "projection" independent of  $r^{N-q} p^{N-q}$

$$P_q(t, r_{\alpha 1}, p_{\alpha q}) = \int P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^{N-q} dp^{N-q}$$

coordinate      impulse



file  $\longrightarrow$  ensemble .... file

# We introduce several new functions

N interacting particles ----

point (phase) in 6N dimensional space  $\Gamma$

point in  $\Gamma$  has coordinates  $r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N$

Element  $d\Gamma$  in  $\Gamma$  space as:  $d\Gamma = dr_1 dr_2 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N = dr^N dp^N$

Phase space

Probability density

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

## 1.1 Základní definice

Rovnice mechaniky nejsou při velkém počtu  $N$  částic zvládnutelné. Lze však na jejich základě a při statistických představách dojít k zákonitostem, které chování velkého makroskopického systému částic vystihnou.

Nechť pro makroskopický systém, který má objem  $V$ , je známa mikroskopická struktura; systém je tvořen  $N$  interagujícími částicemi a nechť každá z těchto částic se řídí zákony klasické dynamiky. Pro jednoduchost předpokládejme, že částice nemají vnitřní stupně volnosti. Mikroskopický stav systému je určen bodem (fází) v  $6N$  rozměrném fázovém prostoru  $\Gamma$ , který má souřadnice  $r_1, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N$ , kde  $r_i, p_i$  jsou polohové vektory  $i$ -té částice v prostoru souřadnic, respektive v prostoru impulsů. Definujme dále objemový element  $d\Gamma$  v  $\Gamma$  prostoru jako

$$d\Gamma = dr_1 dr_2 \dots dr_N dp_1 dp_2 \dots dp_N = dr^N dp^N.$$

Protože každý systém je reprezentován fází v  $\Gamma$  prostoru, soubor velkého počtu  $W$  systémů bude reprezentován „oblakem“  $W$  fází v  $\Gamma$ . Označíme-li hustotu tohoto oblaku (fázovou hustotu) v  $\Gamma$  prostoru v čase  $t$  jako  $\varrho(t; r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N)$ , je potom počet fází (fázových bodů), obsažených v  $d\Gamma$  kolem bodu  $(r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N)$  v čase  $t$ , roven

$$\varrho(t; r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N) dr^N dp^N$$

The system file represents a "cloud" with a density of  $\rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$

a

$$(1.1) \quad \int \varrho(t; r_1, \dots, r_N; p_N) dr^N dp^N = W.$$

Fázovou hustotu  $P_N(t; r_1, \dots, r_N, p_N)$ , odpovídající jednomu systému, tj.

$$(1.2) \quad P_N = \frac{\varrho(t; r_1, \dots, r_N, p_N)}{W}$$

nazveme hustotou pravděpodobnosti ve fázovém prostoru. Potom z předchozích úvah a z fyzikálního významu  $P_N(t; r_1, \dots, r_N, p_N)$  je zřejmé, že

$$(1.3) \quad \int P_N(t; r_1, \dots, r_N, p_N) dr^N dp^N = 1.$$

# Phase space

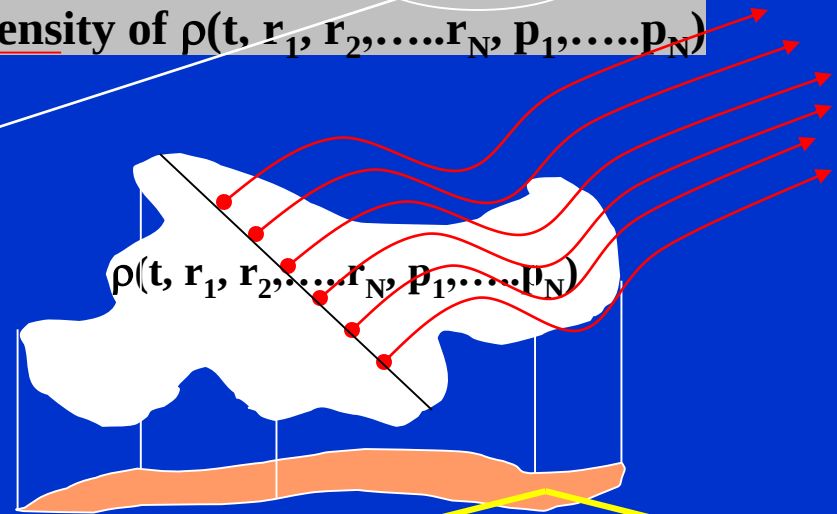
**N interacting particles, ---- each obeys the laws of classical dynamics.**

Element  $d\Gamma$  in  $\Gamma$  space as:  $d\Gamma = dr_1 dr_2 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N = dr^N dp^N$   
 The system file represents a "cloud" with a density of  $\rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$   
 has coordinates

The total number of phases in the file is  
 $\int \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^N dp^N = W$

Probability density

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$



By integrating  $P$  over a subset of variables, we obtain a "projection" independent of coordinates  $r^{N-q} p^{N-q}$

$$P_q(t, r_{\alpha 1}, p_{\alpha q}) = \int P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^{N-q} dp^{N-q}$$

If we integrate through impulses, we get the probability that the system has a certain configuration of distribution in space

$$P_N(t, r_1, \dots, r_N) = \int P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dp^N$$

If we integrate through impulses, we get the probability that the system has a certain configuration of distribution in space

$$P_N(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \int P_N(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{p}^N$$

Dále můžeme definovat hustotu pravděpodobnosti (pravděpodobnost)  $P_q(t; \mathbf{r}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{r}_{\alpha_q}; \mathbf{p}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{p}_{\alpha_q})$ , což je pravděpodobnost nalézt v souboru celkem náhodně určenou skupinu  $q$  částic  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  s polohovými vektory  $\mathbf{r}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{r}_{\alpha_q}$  a impulsy  $\mathbf{p}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{p}_{\alpha_q}$ , bez ohledu na to, v jakém stavu je zbývajících  $(N - q)$  částic;

$$(1.4) \quad P_q(t; \mathbf{r}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{p}_{\alpha_q}) = \int P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^{N-q} d\mathbf{p}^{N-q}$$

a podobně je možné nalézt pravděpodobnost, že systém částic má danou konfiguraci  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  jako

$$(1.5) \quad P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \int P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{p}^N.$$

# Liouvillův teorém

- Hamiltonian N Particles
- Generalized coordinates

We follow the time evolution of the set of N particles...  
each particle moves in accordance with Hamilton's equations:



!!!!!!!!!!!!

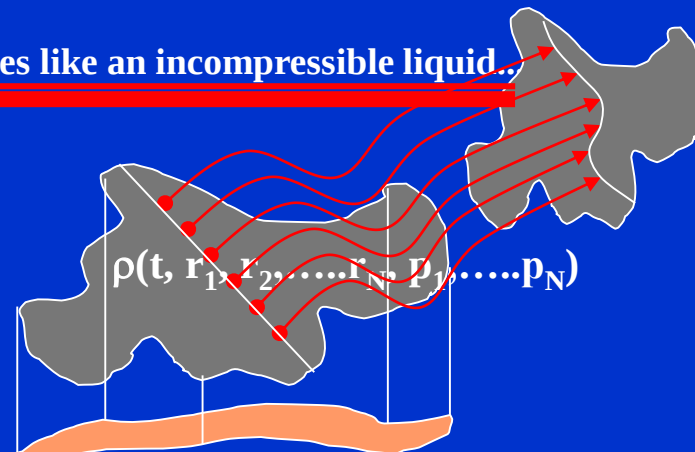
$$(1.9) \quad \begin{aligned} \dot{p}_{i_\alpha} &= - \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial r_{i_\alpha}} \\ \dot{r}_{i_\alpha} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial p_{i_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

The motion of the particles of the system can be viewed as canonical transformations of the Jacobian transformation  $J=1$  and therefore the

$$\int d\Gamma = \int d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = \text{const}, \quad (1.10)$$

The phase volume does not change. The phase volume moves like an incompressible liquid...

Therefore, we can write a "continuity equation"



**J=1**

1.1 Základní definice

Rovnice mechaniky nejsou při velkém počtu  $N$  částic zvládnutelné. Lze však na jejich základě a při statistických představách dojít k zákonitostem, které chování velkého makroskopického systému částic vystihnou.

Nechť pro makroskopický systém, který má objem  $V$ , je známa mikroskopická struktura; systém je tvořen  $N$  interagujícími částicemi a nechť každá z těchto částic se řídí zákony klasické dynamiky. Pro jednoduchost předpokládejme, že částice nemají vnitřní stupně volnosti. Mikroskopický stav systému je určen bodem (fází) v  $6N$  rozměrném fázovém prostoru  $\Gamma$ , který má souřadnice  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ , kde  $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i$  jsou polohové vektory  $i$ -té částice v prostoru souřadnic, respektive v prostoru impulsů. Definujme dále objemový element  $d\Gamma$  v  $\Gamma$  prostoru jako

$$d\Gamma = d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N = d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N.$$

Protože každý systém je reprezentován fází v  $\Gamma$  prostoru, soubor velkého počtu  $W$  systémů bude reprezentován „oblakem“  $W$  fází v  $\Gamma$ . Označíme-li hustotu tohoto oblaku (fázovou hustotu) v  $\Gamma$  prostoru v čase  $t$  jako  $q(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ , je potom počet fází (fázových bodů), obsažených v  $d\Gamma$  kolem bodu  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  v čase  $t$ , roven

$$q(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N$$

a

(1.1) 
$$\int q(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = W.$$

Fázovou hustotu  $P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ , odpovídající jednomu systému, tj.

(1.2) 
$$P_N = \frac{q(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{W}$$

nazveme hustotou pravděpodobnosti ve fázovém prostoru. Potom z předchozích úvah a z fyzikálního významu  $P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  je zřejmé, že

(1.3) 
$$\int P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = 1.$$

$$\int d\Gamma = \int d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = \text{const}$$

The phase volume does not change.

The phase volume moves like an incompressible liquid...

Therefore, we can write a "continuity equation"

# Liouvillův teorém

1.2 Liouvillův teorém

Sledujme dále časový vývoj souboru  $N$  částic systému. Z mechaniky je známo, že pohyb každé částice se děje ve shodě s Hamiltonovými rovnicemi daného problému; fázový bod v  $\Gamma$  prostoru se bude pohybovat opět podle Hamiltonových rovnic, které – zapsány pro  $i$ -tou částici – jsou

(1.9) 
$$\begin{aligned} \dot{p}_{i\alpha} &= - \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial r_{i\alpha}} \\ \dot{r}_{i\alpha} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial p_{i\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

kde  $H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  je hamiltonián částice daného systému.

Z klasické mechaniky je známo\*), že na časovou změnu veličin  $p_{i\alpha}$  a  $r_{i\alpha}$  při pohybu částic systému je možno hledět jako na kanonické transformace. Dále je známo, že fázový objem, tj.  $\int d\Gamma = \int d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N$  je invariantní vzhledem ke kanonickým transformacím. Odtud dostáváme důležitý závěr: Každý bod fázového prostoru se pohybuje ve shodě s Hamiltonovými rovnicemi daného systému, stejným způsobem se pohybuje i oblak fázových bodů a navíc objem tohoto oblaku (fázový objem) se nemění, tj.

(1.10) 
$$\int d\Gamma = \text{konst},$$

\*) Viz např. L. D. Landau, E. M. Lifšič: Mechanika. Moskva (1965), s. 183.

i když se může měnit tvar tohoto objemu a tedy plocha, kterou je tento objem uzavřen.

Rovnice (1.10) je vlastně matematický zápis Liouvillova teorému a říká, že fázový objem se pohybuje tak, jako kdyby byl nestlačitelná kapalina. Pro takovéto kapaliny však platí rovnice kontinuity (v  $\Gamma$  prostoru)

(1.11) 
$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(qV) = 0$$

# Introduction

$$(1.11) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(\varrho V) = 0$$

nebo, což je totéž

$$(1.12) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \text{div} V + V \cdot \text{grad} \varrho = 0,$$

kde  $V$  je „rychlost“ v  $\Gamma$  prostoru (o složkách  $\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N$ ), která splňuje rovnici

$$(1.13) \quad \text{div} V = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial \dot{r}_{i\alpha}}{\partial r_{i\alpha}} + \frac{\partial \dot{p}_{i\alpha}}{\partial p_{i\alpha}} \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r_{i\alpha} \partial p_{i\alpha}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_{i\alpha} \partial r_{i\alpha}} \right) = 0,$$

jako důsledek platnosti Hamiltonových rovnic (1.9). Rovnice (1.12) má potom tvar

$$(1.14) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + V \cdot \text{grad} \varrho = 0,$$

nebo

$$(1.15) \quad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + [\varrho; H] = 0,$$

Pořadí  
deriivací

- Forms of Liouvil's theorem
- External and internal forces

$$\dot{p}_{i\alpha} = - \frac{\partial H(r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N)}{\partial r_{i\alpha}}$$

$$\dot{r}_{i\alpha} = \frac{\partial H(r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N)}{\partial p_{i\alpha}},$$

$$\rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$$

Collisions

což můžeme psát jako

$$(1.16) \quad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{r_i} \varrho + \sum_{i=1}^N (X_i + F_i) \cdot \nabla_{p_i} \varrho = 0,$$

kde  $[\varrho; H]$  jsou Poissonovy závorky,  $v_i$  je rychlost  $i$ -té částice,  $X_i$  je vektor vnější síly, působící na  $i$ -tou částici, a  $F_i$  je vektor vnitřní síly působící na  $i$ -tou částici, která pochází od  $(N - 1)$  zbývajících částic.

Po vydělení rovnic (1.14), (1.15) a (1.16) počtem  $W$  systémů dostáváme rovnice pro  $P_N$

$$(1.14') \quad \frac{\partial P_N}{\partial t} + V \cdot \text{grad} P_N = 0,$$

$$(1.15') \quad \frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0,$$

$$(1.16') \quad \frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{r_i} P_N + \sum_{i=1}^N (X_i + F_i) \cdot \nabla_{p_i} P_N = 0.$$

If we integrate through impulses ...

$$P_N(t, r_1, \dots, r_N) = \int P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dp^N$$

Dependence on time and position

Probability density

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

# 1.3 Gibbs' H theorem

- entropy
- Reversibility and Irreversibility of the processes

Všimněme si nyní alespoň částečně časového vývoje systému  $N$  částic, a to z hlediska vratnosti či nevratnosti procesů, které v tomto systému probíhají. Ze zkušenosti je známo, že většina procesů, které probíhají v přírodě, jsou procesy nevratné. To znamená, že entropie takového systému roste s časem; v rovnováze je potom entropie konstantní. Ve statistické fyzice je entropie úzce spjata s takzvanou  $H$ -funkcí a to vztahem

density of the probability

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

$$= 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\partial P_N}{\partial t} (\ln P_N + 1) d\Gamma.$$

Using Liouville's theorem, we obtain the expression

$$S = -kH = -k \int P_N \ln P_N d\Gamma, \quad \text{kde } H = \int P_N \ln P_N d\Gamma$$

Uvážíme-li nyní platnost Liouvillovovy rovnice (1.15'), můžeme psát, že

$$(1.22) \quad \int \frac{\partial P_N}{\partial t} \ln P_N d\Gamma = - \int [H; P_N] \ln P_N d\Gamma = \int P_N [H; \ln P_N] d\Gamma = \\ = \int [H; P_N] d\Gamma = - \int \frac{\partial P_N}{\partial t} d\Gamma.$$

$$dH/dt = 0 \quad \longrightarrow \quad dS/dt = 0$$

$$(1.15') \quad \frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0,$$

$$(1.10) \quad \int d\Gamma = \text{konst},$$

Rovnice (1.10) je vlastně matematický zápis Liouvillova teorému a říká, že fázový objem se pohybuje tak, jako kdyby byl nestlačitelná kapalina. Pro takovéto kapaliny však platí rovnice kontinuity (v  $\Gamma$  prostoru)

This means that the system does not evolve over time....

...that is, an unequilibrium system can never reach a state of equilibrium.

Paradox - classical mechanics leads to a strictly reversible description, while nature behaves irreversibly ...

- Time development – entropy increases
- System entropy increases,  $dS/dt > 0$

Or our approximations are inaccurate....

# 1.3 Gibbs' H theorem

- entropy
- Reversibility and Irreversibility of processes

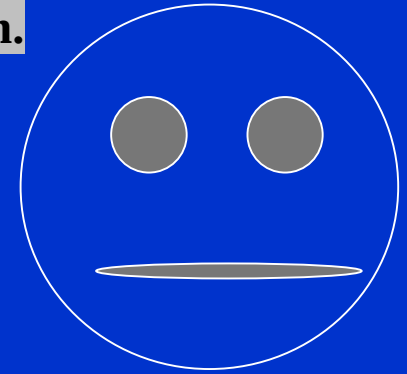
$$S = -kH = -k \int P_N \ln P_N, \quad \text{where } H = \int P_N \ln P_N$$

Using Liouville's theorem, we obtain the expression

$$dH/dt = 0 \quad \longrightarrow \quad dS/dt = 0$$

**This means that the system does not evolve over time....**

**That is, an unequilibrium system can never reach a state of equilibrium.**



**Paradox - classical mechanics leads to a strictly reversible description, while nature behaves irreversibly. (?...) ...**

Time evolution – entropy increases ..... System entropy increases,  $dS/dt > 0$

**Or our approximations are inaccurate....**

# 1.4 BBGKY equation

(Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon)

## 1.4 BBGKY equation

The function  $P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$  has certain properties resulting from its relationship to particles...

Using this feature we can determine some macroscopic quantities characterizing a given set of particles at point  $r$

$$J(t, r) = \int J(r) P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^N dp^N \quad (1.27)$$

where  $J(r)$  is the current density operator

$$J(r) = \sum p_i \delta(r - r_i) \quad (1.28)$$

Probability density

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

$$\hat{j}(r) = \sum e/\mu * p_i \delta(r - r_i)$$

Current Density (Charge Flow) Operator

Koncentrace částic  $n(r; t)$  v místě  $r$  je

$$(1.29) \quad n(r; t) = \int \hat{n}(r) P_N(t; r_1, \dots, p_N) dr^N dp^N,$$

kde  $\hat{n}(r)$  je operátor polohy

$$(1.30) \quad \hat{n}(r) = \sum_{i=1}^N \delta(r - r_i).$$

Hustota kinetické energie  $E(t; r)$  v místě  $r$  je rovna

$$(1.31) \quad E(t; r) = \int \hat{E}(r) P_N(t; r_1, \dots, p_N) dr^N dp^N,$$

kde  $\hat{E}(r)$  je operátor kinetické energie

$$(1.32) \quad \hat{E}(r) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} \delta(r - r_i)$$

a  $m_i$  je hmotnost  $i$ -té částice.

Pro nabité částice je dále možno zavést proudovou hustotu  $j(t; r)$  v bodě  $r$  (hustotu toku náboje) vztahem

$$(1.33) \quad j(t; r) = \int \hat{j}(r) P_N(t; r_1, \dots, p_N) dr^N dp^N,$$

kde  $\hat{j}(r)$  je operátor hustoty proudu (toku náboje)

# Introduction to BBGKY

(Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon)

Z výše uvedených úvah plyne, že je vhodné zavést takové funkce a rovnice pro tyto funkce, které budou určovat chování s částic souboru ( $s \ll N$ ). Definujme tedy pro  $s \ll N$  funkci  $F_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$  tímto způsobem:

$$(1.38) \quad F_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s) = V^s P_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_s) = \\ = V^s \int \dots \int P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{r}_N, d\mathbf{p}_{s+1} \dots d\mathbf{p}_N$$

pro  $s = 1, 2, 3, \dots$

Z normovací podmínky

$$(1.39) \quad \frac{1}{V^s} \int \dots \int F_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_s d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_s = 1$$

**$V^{-s}F_s(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$**  is the probability that the group of S particles from the set of N particles will be in time t in the element  $d\mathbf{r}_1, \dots, d\mathbf{r}_s, d\mathbf{p}_1, \dots, d\mathbf{p}_s$  regardless of the state of the remaining (N-s) particles.

# For interacting particles ■ Let's narrow down the generality of the Hamiltonian a bit

(1.42)

$$\frac{\partial P_N}{\partial t} - [H; P_N] = 0.$$

Probability density

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

Hamiltonovu funkci  $H$  pro  $N$  vzájemně interagujících částic můžeme zapsat ve tvaru

$$(1.43) \quad H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2m_i} + U_i(r_i) \right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \Phi_{ij} = \sum_{i=1}^N H_i(r_i, p_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \Phi_{ij},$$

kde  $H_i(r_i, p_i)$  je hamiltonián samotné  $i$ -té částice a  $U_i(r_i)$  je potenciál, který je způsobený efekty na stěnách a vnějšími silami.  $\Phi_{ij} = \Phi(|r_i - r_j|)$  je interakční potenciál mezi  $i$ -tou a  $j$ -tou částicí.

Použitím rovnice (1.43) můžeme Liouvillovu rovnici (1.42) přepsat do tvaru

$$(1.44) \quad \frac{\partial P_N}{\partial t} - \sum_{i=1}^N [H_i; P_N] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N [\Phi_{ij}; P_N] = 0.$$

Budeme-li dále násobit (1.44)  $V^s$  a integrovat s ohledem na  $dr_{s+1} \dots dr_N dp_{s+1} \dots dp_N$  (přes fázový prostor  $(N - s)$  částic), dostaneme

$$(1.45) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = \sum_{i=1}^N V^s \int \dots \int [H_i; P_N] dr_{s+1} \dots dr_N dp_{s+1} \dots dp_N + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N V^s \int \dots \int [\Phi_{ij}; P_N] dr_{s+1} \dots dr_N dp_{s+1} \dots dp_N,$$

$V^s F_s(t, r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s)$  is the probability that the group of  $S$  particles from the set of  $N$  particles will be located at time  $t$  in the element  $dr_1, \dots, dr_s, dp_1, \dots, dp_s$  regardless of the state of the remaining  $(N-s)$  particles.

# BBGKY Equation

- After many modifications ....
- After many restrictions
- After many simplifications

In the limit...

Budeme-li dále předpokládat, že pro  $|r_i| \rightarrow \infty$  je  $(\partial P_N / \partial r_i) \rightarrow 0$  a pro  $|p_j| \rightarrow \infty$  je  $(\partial P_N / \partial p_j) \rightarrow 0$ , dostaneme integraci per partes relace

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro  $F_s$  ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] dr_{s+1} dp_{s+1},$$

kde

$$(1.53) \quad H_s = \sum_{i=1}^s H_i(r_i, p_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^s \Phi_{ij}$$

je Hamiltonova funkce uzavřeného systému s částic.

S+1

$\Phi_{ij}$  is interaction potential between particles i and j

$F_s$  is a function of  $F_{s+1}$  → system of equations

We are where we were!!

# BBGKY equation of application at $s=1, s=2$

- After many modifications ....
- After many restrictions
- After many simplifications

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro  $F_s$  ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1}.$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro  $s = 1$  a  $s = 2$ . Pro  $s = 1$  dostaneme

$$(1.54) \quad \boxed{S=1} \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{r}_1} H_1 \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} F_1 - \nabla_{\mathbf{p}_1} H_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} F_1 + \\ + \frac{N-1}{V} \int (\nabla_{\mathbf{r}_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} F_2 - \nabla_{\mathbf{p}_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} F_2) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2$$

a pro  $s = 2$  dostaneme

$$(1.55) \quad \boxed{S=2} \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V} \int \sum_{i=1}^2 [\Phi_{i3}; F_3] d\mathbf{r}_3 d\mathbf{p}_3.$$

$\Phi_{ij}$  is interaction potential between particles  $i$  and  $j$

$F_s$  is a function of  $F_{s+1}$

system of equations

# Derivation of the Boltzmann equation

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro  $F_s$  ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] dr_{s+1} dp_{s+1}.$$

$$\lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{V}{N} = v, \quad 0 < v < \infty;$$

$v$  je potom převrácená hodnota koncentrace  $n$ ,  $v = 1/n$ . Rovnice (1.52) má potom tvar\*)

$$(1.56) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] dr_{s+1} dp_{s+1}.$$

# Finding solutions to B. equation

■ In the shape of a row

$v$  je potom převrácená hodnota koncentrace  $n$ ,  $v = 1/n$ . Rovnice (1.52) má potom tvar\*)

$$(1.56) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1}.$$

$$v = 1/n$$

$$nr_0^3 \ll 1$$

Sledujme tedy model klasického zředěného plynu, kdy  $r_0^3/v \ll 1$ , tj. interakční potenciál je krátkého dosahu a koncentrace částic je nízká. Naším dalším úkolem je výpočet funkce  $F_s$ . K tomuto účelu rozložíme  $F_s$  do řady podle malého parametru  $r_0^3/v$ . Z rovnic (1.56) a (1.57) je zřejmé, že z formálního hlediska můžeme místo parametru  $r_0^3/v$  přijmout parametr  $1/v$ , aniž se změní obecnost daného postupu. Položme proto

$$(1.58) \quad F_s = F_s^{(0)} + \frac{1}{v} F_s^{(1)} + \frac{1}{v^2} F_s^{(2)} + \dots$$

Dosadíme-li nyní daný rozklad do rovnice (1.56) a porovnáme-li členy obsahující stejné mocniny  $1/v$ , dostaneme...

$$(1.59) \quad \frac{\partial F_s^{(0)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(0)}], \quad \rightarrow F_s^{(0)}$$

$$(1.60) \quad \frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(1)}] + \int \left[ \sum_{i=1}^s \Phi_{i,s+1}; F_{s+1}^{(0)} \right] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1} \rightarrow F_s^{(1)}$$

atd.  $\rightarrow F_s^{(2)}$

Máme tedy rovnice typu

$$(1.61) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_s) = [H_s; \Phi(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_s)] + f(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_s).$$

## 2. Mutual Interaction of particles

We already have the equations

- We will analyze elastic collisions
- Collisions e- neutral, e- ion, e-e.....

(1.59)

$$\frac{\partial F_s^{(0)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(0)}],$$

$$F_s^{(0)}$$

(1.60)

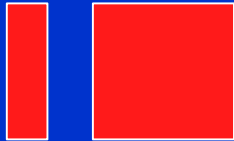
$$\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(1)}] + \int [\sum_{l=1}^s \Phi_{l,s+1}; F_{s+1}^{(0)}] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1}$$

$$F_s^{(1)}$$

atd.

.... What we need is the knowledge of particle interaction ....  
Elementary Processes in a Different Concept

$\Phi_{ij}$  is the interaction potential between the particle i and particle j  
 $F_s$  is a function of  $F_{s+1}$  system of equations



$V^s F_s(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$  is the probability that the group s of particles from the set of N particles will be at time t located in the element  $d\mathbf{r}_1, \dots, d\mathbf{r}_s, d\mathbf{p}_1, \dots, d\mathbf{p}_s$  regardless of the state of the remaining (N-s) particles.

# Interaction of particles

- We will analyze elastic collisions
- Collisions e- neutral, e- ion, e-e.....

Conservation Laws

The force exerted by particle 2 on particle 1 is  $F_{12}$

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

We will assume that the forces decrease fast enough with  $r$

## Laboratory and centrum of gravity of system

Pohyb každé z těchto částic je ve shodě s Newtonovými rovnicemi, tj.

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}.$$

Těžiště systému dvou částic  $\mathbf{r}_c$  je nyní určeno rovnicí

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2,$$

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1.$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$$

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \text{konst} = \mathbf{v}_c.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1(t) &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c, \\ \mathbf{q}_2(t) &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c. \end{aligned}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu, \quad [\text{kg}]$$

different  
Definitions  
of  $\mu$

Attention  $\mu_1$  and  $\mu_2$  are dimensionless

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \mu_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \mu_2 \dot{\mathbf{r}}_2.$$

The center of mass of a two-particle system moves at a constant speed throughout the collision process

# Relative velocity during a collision

Relative velocity  $\mathbf{g}_{12} = \dot{\mathbf{r}}_{12}$

- Maintaining Relative Velocity
- Movement around the power center

The laws of conservation of energy imply

$$g_{21}^2 = g_{21}'^2$$

Označíme-li  $|\mathbf{g}_{21}| = g$  a  $|\mathbf{g}_{21}'| = g'$  máme pak, že

$$g = g'$$

The absolute value of the relative velocities is conserved during a collision, only their direction can change

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} = \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \mathbf{F}_{21} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{21}$$

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}_{21}}{dt} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{21}$$

????..is ok...

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu$$

To však ale znamená, že naše úloha se redukuje na pohyb fiktivní redukované hmotnosti  $\mu$ , která se pohybuje kolem silového centra ve vzdálenosti  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Silové centrum je nyní totožné s polohou částice 1.

# Motion of a fictitious particle

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}_{21}}{dt} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{21}.$$

- Motion in a plane

To však ale znamená, že naše úloha se redukuje na pohyb fiktivní redukované hmotnosti  $\mu$ , která se pohybuje kolem silového centra ve vzdálenosti  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Silové centrum je nyní totožné s polohou částice 1. With the position of the center of mass ???

Ukážeme si dále, že daný pohyb je pohybem rovinným. K tomuto účelu násobíme (2.25) vektorově vektorem  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Dostáváme

$$(2.26) \quad (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \frac{d^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{dt^2} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{21} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad \text{Parallel Vectors}$$

Protože ale vzájemné působící síly jsou centrální, je pravá strana (2.26) rovna nule. Po kratších úpravách je potom možno (2.26) přepsat do tvaru

$$(2.27) \quad \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 0,$$

odkud dostáváme, že

$$(2.28) \quad \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{k},$$

kde  $\mathbf{k}$  je konstantní vektor (je určen z počátečních podmínek našeho problému). To ale znamená, že vektor  $\mathbf{r}$  i vzájemná rychlost částic leží stále v jedné rovině a tedy námi vyšetřovaný vzájemný pohyb částic je skutečně rovinný.

# Derivation of the Boltzmann equation

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro  $F_s$  ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] dr_{s+1} dp_{s+1}.$$

$$\lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{V}{N} = v, \quad 0 < v < \infty;$$

$v$  je potom převrácená hodnota koncentrace  $n$ ,  $v = 1/n$ . Rovnice (1.52) má potom tvar\*)

$$(1.56) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] dr_{s+1} dp_{s+1}.$$

## 2. Interaction of particles

We already have the equations

- We will analyze elastic collisions
- Collisions e- neutral, e- ion, e-e.....

$$(1.59) \quad \frac{\partial F_s^{(0)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(0)}],$$

$$(1.60) \quad \frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(1)}] + \int \left[ \sum_{l=1}^s \Phi_{l,s+1}; F_{s+1}^{(0)} \right] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1}$$

atd.

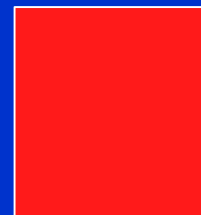
.... What we need is knowledge of the interaction of particles....

## Elementary Processes in a Different Concept

### 3.1 Základní úvahy

Předpokládejme pro jednoduchost, že máme systém  $N$  identických částic, z nichž žádná nemá vnitřní stupeň volnosti. Mechanický stav jedné částice bude potom charakterizován třemi prostorovými souřadnicemi  $\mathbf{r}$  a třemi složkami rychlosti  $\mathbf{v}$ ; tedy bodem v šesti-rozměrném  $\mu$  prostoru. Definujeme nyní rozdělovací funkci  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  následujícím způsobem:  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$  nechť je pravděpodobný počet částic, které se nacházejí v objemovém elementu  $\mu$  prostoru  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$  v okolí bodu  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$  v čase  $t$ , nebo jinými slovy, pravděpodobný počet částic, které se v čase  $t$  nacházejí v intervalu  $(\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$  a  $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$ . Z definice  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  je ihned zřejmé, že celkový počet částic bude dán výrazem

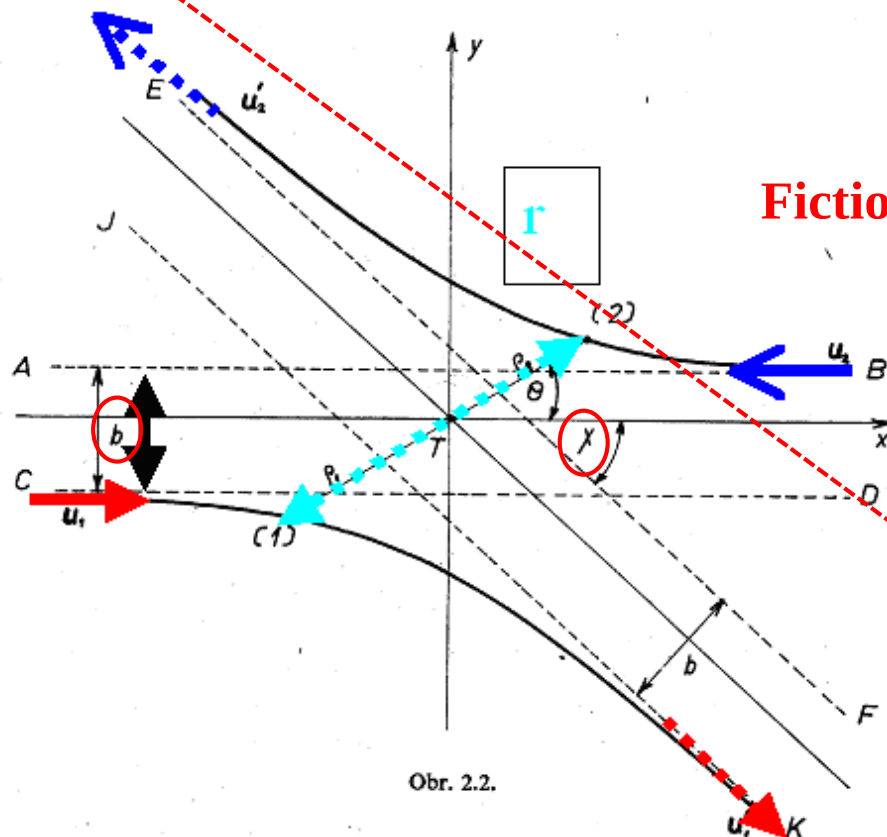
$$(3.1) \quad N = \iint f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} ,$$



## Center of mass system

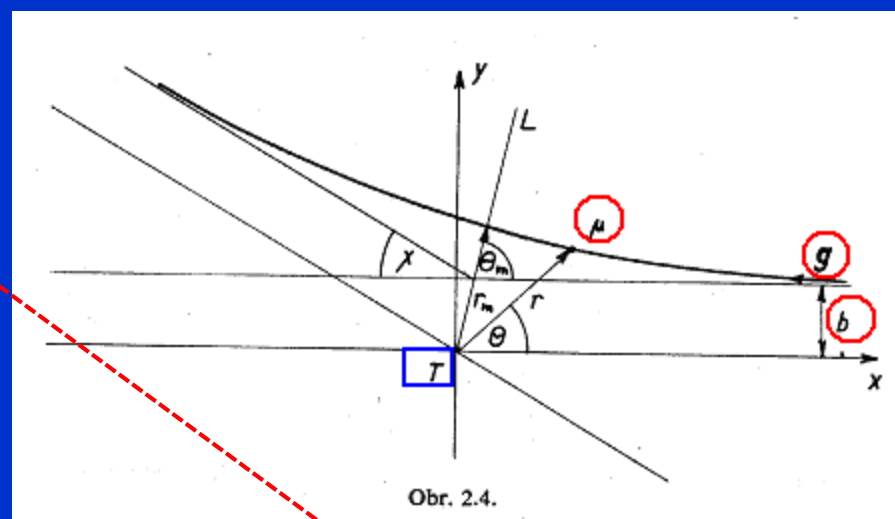
(2.30)

$$\begin{aligned}x_1 &= -\mu_2 r \cos \theta, & x_2 &= \mu_1 r \cos \theta, \\y_1 &= -\mu_2 r \sin \theta, & y_2 &= \mu_1 r \sin \theta.\end{aligned}$$



Обр. 2.2.

## Fiction of the motion of a particle in a force field



Obr. 2.4.

K popisu takovéhoto pohybu plně postačí výše uvedené integrály pohybu (2.33) a (2.34). Tyto rovnice nám společně s rovnicemi (2.36) a (2.38) tvoří soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$(2.39)$$

$$\mu b g = \mu r^2 \theta$$

(2.40)

$$\frac{1}{2} \mu \dot{g}^2 = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r)$$

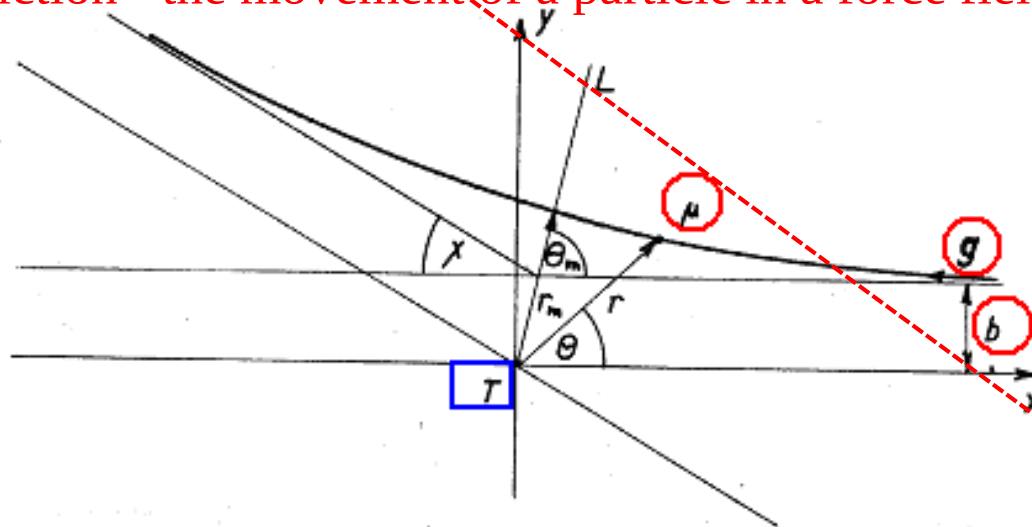
pro dvě neznámé  $r$  a  $\theta$ .

# Motion in the Field of Central Forces

- Collision parameter
- Dispersion angle

To však ale znamená, že naše úloha se redukuje na pohyb fiktivní redukované hmotnosti  $\mu$ , která se pohybuje kolem silového centra ve vzdálenosti  $r = r_2 - r_1$ . Silové centrum je nyní totožné s polohou částice 1.

Fiction - the movement of a particle in a force field



Obr. 2.4.

Derivation

K popisu takového pohybu plně postačí výše uvedené integrály pohybu (2.33) a (2.34). Tyto rovnice nám společně s rovnicemi (2.36) a (2.38) tvoří soustavu dvou diferenciálních rovnic.

(2.39)

$$\mu b g = \mu r^2 \dot{\theta}$$

(2.40)

$$\frac{1}{2} \mu g^2 = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r)$$

pro dvě neznámé  $r$  a  $\theta$ .

$$\frac{1}{2} \mu g^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \dot{r}^2 + \frac{b^2 g^2}{r^2} \right) + U(r),$$

$$\dot{r}^2 = g^2 \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{U(r)}{\frac{1}{2} \mu g^2} \right)$$

Úhel odklonu  $\chi$  je nyní podle (2.42)

$$(2.49) \quad \chi = \pi - 2\theta_m = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \left[ \frac{r^4}{b^2} - r^2 - \frac{2r^4 U(r)}{\mu g^2 b^2} \right]^{-1/2} dr.$$

# Elementary consequences

The laws of conservation of energy imply

- Energy transfer in a collision
- A large difference in masses
- Equal masses

$$v_1^2 \text{ before} - v_1^2 \text{ after} = \frac{m_1}{m_2} v_1'^2.$$

What Leads to a Relationship

$$\eta = m_2/m_1$$

$$v_1^2 \text{ before} - v_1^2 \text{ after} = \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_1'^2 (1 - \cos \chi),$$

Jestliže  $m_2 = m_1$ , pak  $\eta = 1$

$$(2.72) \quad \theta_2 \sim \frac{\chi}{2}, \quad \theta_1 \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}$$

a funkce  $\bar{A}$  je maximální

$$(2.73) \quad \bar{A} \cong \frac{1}{2}.$$

Jestliže  $m_2 \gg m_1$ , pak  $\eta \gg 1$

$$(2.74) \quad \theta_2 \sim \frac{m_1}{m_2} \sin \chi, \quad \theta_1 \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}$$

a

$$(2.75) \quad \bar{A} \sim \frac{2m_1}{m_2}.$$

Ar<sup>+</sup> with Ar

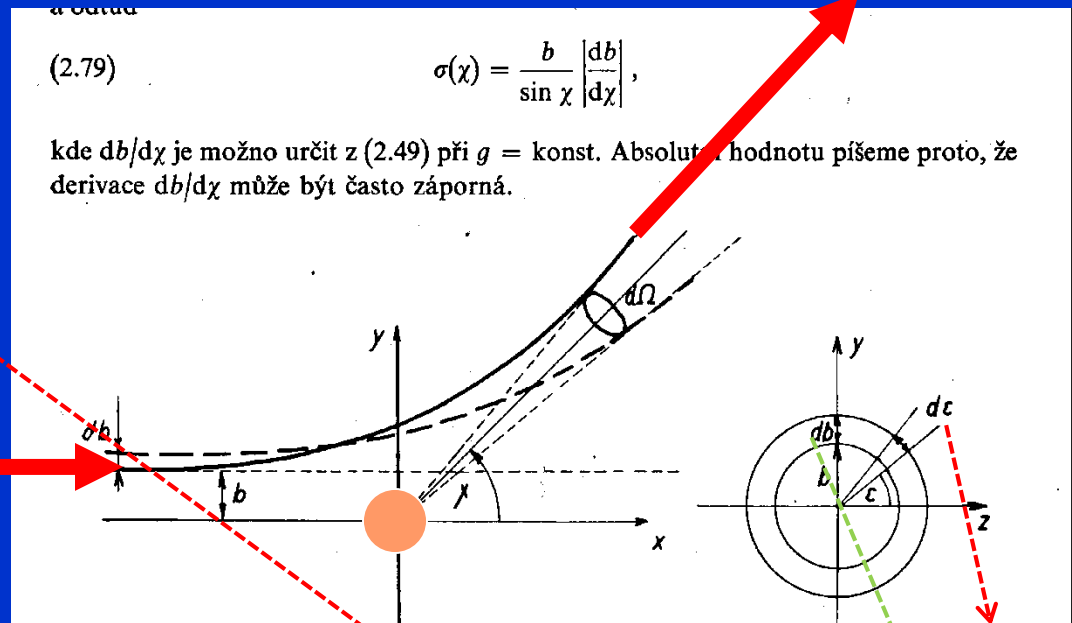
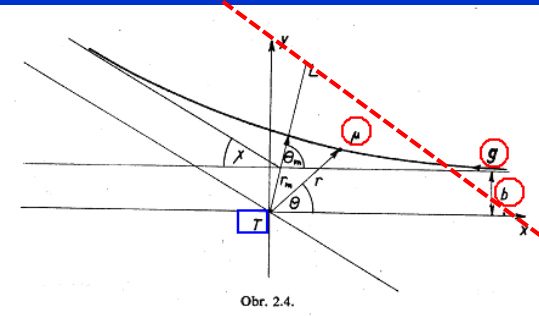
$$\Delta \sim 1/2$$

e<sup>-</sup> with Ar

$$\Delta \sim 2(1/2000)/40 = 1/40\,000$$

# Differential cross-section.

- Elastic collisions.
- Differential cross-section.



N

N particles per second

$$dn = N b db d(\epsilon)$$

$$dn = \sigma(\chi) N d\Omega$$

*Differential cross-section of elastic collision*

$$dn = N b db d(\epsilon) = \sigma(\chi) N d\Omega = N \sigma(\chi) \sin \chi d\chi d(\epsilon)$$

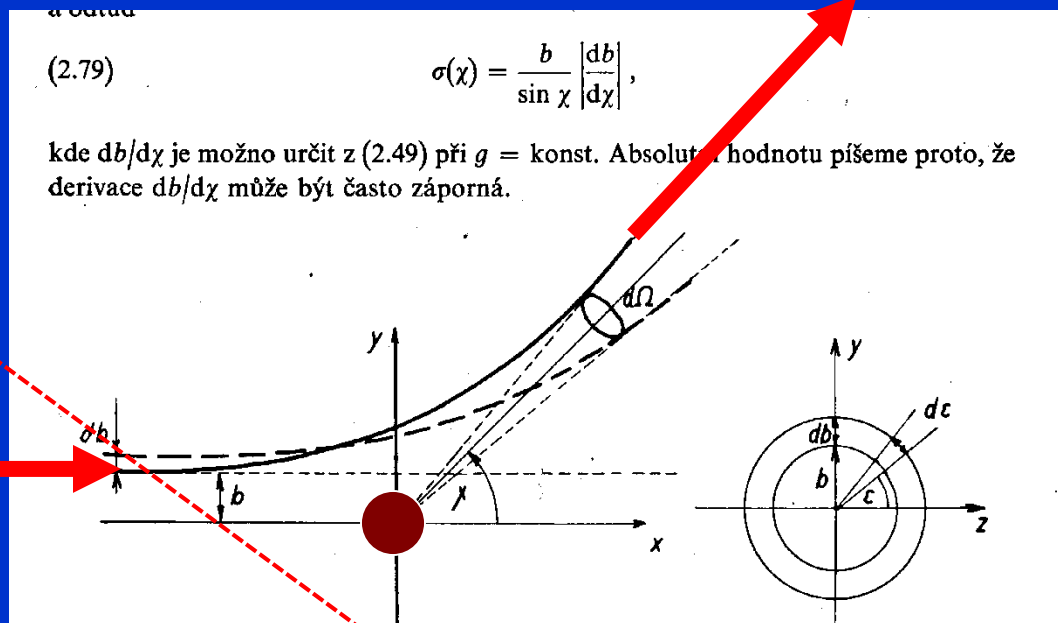
$$\sigma(\chi) = (b/\sin \chi) \cdot db / d\chi$$

*Differential cross-section of elastic collision*

# Total effective cross-section

- Total effective cross-section
- The Problem with the Experiment

$N(\mathbf{v})$



$$dn = N b db d(\epsilon)$$

$$dn = \sigma(\chi) N d\Omega$$

Total cross-section of elastic collision

$$\sigma(\chi) = b db / d\chi \sin \chi$$

$$\sigma_c(\mathbf{v}) = \int \sigma(\chi) d\Omega = 2\pi \int \sigma(\chi) \sin \chi d\chi = \boxed{2\pi \int b db}$$

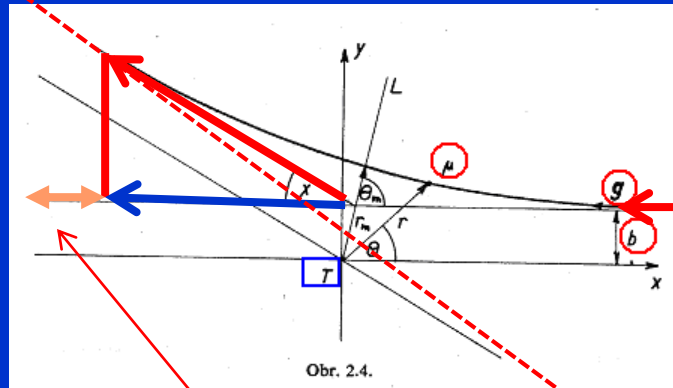
$\chi \dots 0-\pi$

$b \dots 0\text{-infinity}$

Divergent integral ????

$\sigma_c(\mathbf{v}) = \pi D^2$  for the collision of two perfectly flexible spheres

# Transport cross-section



$(1 - \cos \chi)$

Transport cross-section

Deflection cross-section

- Transport cross-section.
- cross-section of deflection

Jak jsme si ukázali, celkový účinný průřez  $\sigma_e$  z hlediska klasické mechaniky diverguje, a proto je pro naše další úvahy nepoužitelný. V kinetické teorii proto zavádíme veličiny typu

$$(2.90) \quad Q^{(l)} = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\chi) (1 - \cos^l \chi) \sin \chi \, d\chi = \\ = 2\pi \int_0^\infty (1 - \cos^l \chi) b \, db, \quad l = 1, 2, \dots,$$

které již mohou být v některých případech konečné a mají tedy jistý fyzikální smysl. Nejčastěji se vyskytují veličiny  $Q^{(1)}$  a  $Q^{(2)}$ . Veličinu

$$(2.91) \quad Q^{(1)} = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\chi) (1 - \cos \chi) \sin \chi \, d\chi$$

nazveme transportním průřezem, protože faktor  $(1 - \cos \chi) \mu g$  určuje snížení impulsu částice v daném směru (viz obr. 2.4).

Veličinu

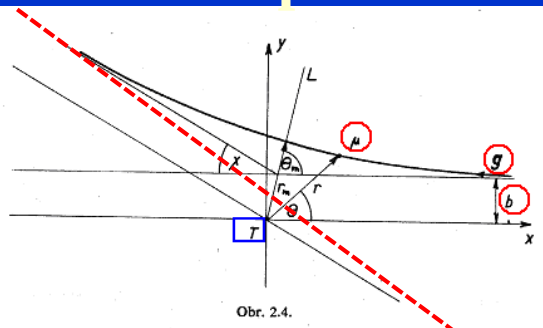
$$(2.92) \quad Q^{(2)} = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\chi) (1 - \cos^2 \chi) \sin \chi \, d\chi$$

nazveme průřezem odklonu, protože faktor

$$(2.93) \quad \frac{\mu g^2}{2} (1 - \cos^2 \chi) = \frac{\mu g^2}{2} \sin^2 \chi$$

charakterizuje přírůstek kinetické energie ve směru kolmém na směr původní;  
charakterizuje nám tedy jistým způsobem odklon částice od původního směru.

# Coulomb particle scattering



- Coulomb particle scattering
- Rutherford's formula

Úhel odklonu  $\chi$  je nyní podle (2.42)

$$(2.49) \quad \chi = \pi - 2\theta_m = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \left[ \frac{r^4}{b^2} - r^2 - \frac{2r^4 U(r)}{\mu g^2 b^2} \right]^{-1/2} dr.$$

$U(r) = Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 r$ .. Interaction potential

Úhel  $\theta_m$  je nyní podle (2.48) dán vztahem

$$(2.95) \quad \theta_m = \int_{r_m}^{\infty} \frac{1}{r} \left[ \frac{r^2}{b^2} - 1 - \frac{Z_1 Z_2 e^2 r}{(4\pi\epsilon_0) \frac{1}{2} \mu g^2 b^2} \right]^{-1/2} dr,$$

kde  $r_m$  je nezáporný kořen rovnice

$$(2.96) \quad 1 - \frac{b^2}{r_m^2} - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{(4\pi\epsilon_0) \frac{1}{2} \mu g^2 r_m} = 0.$$

Zavedeme-li nyní parametr

$$(2.97) \quad U(r) = \mu g^2 b_0 / r \quad b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu g^2}$$

a novou proměnnou  $u = b/r$ , je možno (2.95) upravit na

$$(2.98) \quad \theta_m = \int_0^{u_m} \frac{du}{\left( 1 - 2 \frac{b_0}{b} u - u^2 \right)^{1/2}},$$

kde  $u_m$  je nyní kladný kořen rovnice

$$(2.99) \quad 1 - 2 \frac{b_0}{b} u_m - u_m^2 = 0;$$

$$(2.100) \quad u_m = -\frac{b_0}{b} + \sqrt{\left( \frac{b_0}{b} \right)^2 + 1}.$$

We gett  $g(\chi/2) = b_0/b$ , which is the relation  $\chi$ ,  $b_0$  a  $b$

Věnujme se nyní výpočtu diferenciálního srážkového průřezu  $\sigma(\chi)$  pro případ coulombovských sil. Ukázali jsme si, že obecný výraz pro  $\sigma(\chi)$  je dán vztahem (2.79), tj.

$$(2.113) \quad \sigma(\chi) = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|.$$

Z rovnice (2.106) je ale zřejmé, že

$$(2.114) \quad \left| \frac{db}{d\chi} \right| = \frac{1}{2} \frac{b^2}{b_0} \frac{1}{\cos^2 \frac{\chi}{2}}$$

a

$$(2.115) \quad b = b_0 \cotg \frac{\chi}{2}.$$

Dosadíme-li nyní (2.114) a (2.115) do (2.113), dostáváme téměř okamžitě požadovaný výraz pro  $\sigma(\chi)$  ve tvaru

$$(2.116) \quad \sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu^2 g^4} \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\chi}{2}}.$$

Toto je ale takzvaná Rutherfordova formule, kterou je možno získat ve stejném tvaru i na základě úvah kvantové mechaniky.\*)

Z (2.116) je zřejmé, že  $\sigma(\chi)$  nezávisí na znaménku náboje částic; platí tedy jak pro případ sil odpuzivých, tak i pro případ sil přitažlivých. Z úvah, které se týkaly

\*) Podrobněji o tom viz L. D. Landau, E. M. Lifšic: Kvantovaja mechanika. op. cit.

Coulomb particle scattering

Dropped b

# Rutherford's formula

- Rutherford's formula
- Experiment.

Věnujme se nyní výpočtu diferenciálního srážkového průřezu  $\sigma(\chi)$  pro případ coulombovských sil. Ukázali jsme si, že obecný výraz pro  $\sigma(\chi)$  je dán vztahem (2.79), tj.

$$(2.113) \quad \sigma(\chi) = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|.$$

Z rovnice (2.106) je ale zřejmé, že

$$(2.114) \quad \left| \frac{db}{d\chi} \right| = \frac{1}{2} \frac{b^2}{b_0} \frac{1}{\cos^2 \frac{\chi}{2}}$$

a

$$(2.115) \quad b = b_0 \cotg \frac{\chi}{2}.$$

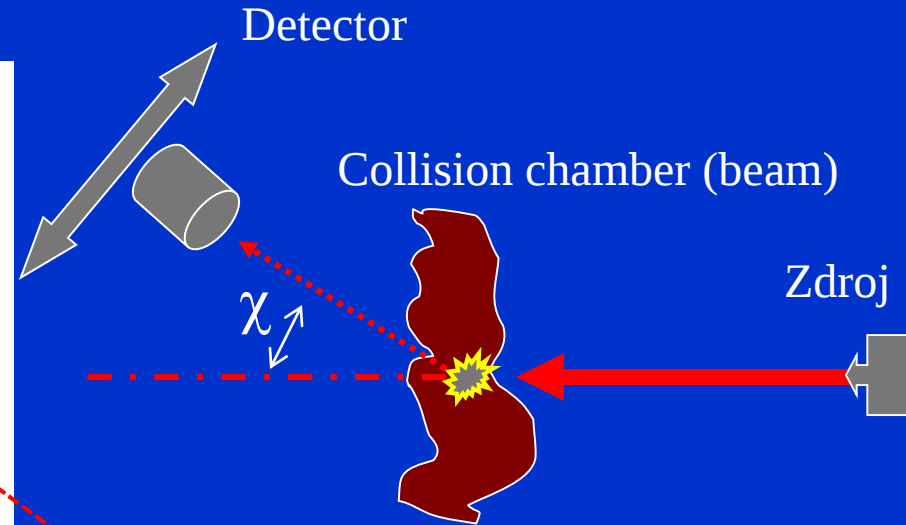
Dosadíme-li nyní (2.114) a (2.115) do (2.113), dostáváme téměř okamžitě požadovaný výraz pro  $\sigma(\chi)$  ve tvaru

$$(2.116) \quad \sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu^2 g^4} \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\chi}{2}}.$$

Toto je ale takzvaná Rutherfordova formule, kterou je možno získat ve stejném tvaru i na základě úvah kvantové mechaniky.\*)

Z (2.116) je zřejmé, že  $\sigma(\chi)$  nezávisí na znaménku náboje částic; platí tedy jak pro případ sil odpuzivých, tak i pro případ sil přitažlivých. Z úvah, které se týkaly

\*) Podrobněji o tom viz L. D. Landau, E. M. Lifšic: Kvantová mechanika. op. cit.



The problem is with the determination of  $\sigma_c$   
The problem of long-range collisions

$$\sigma_c(v) = \int \sigma(\chi) d\Omega = 2\pi \int \sigma(\chi) \sin \chi d\chi = 2\pi \int b db$$

# Distribution functions

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

The number of particles with a coordinates  $\vec{r}, \vec{v}, t$  in  $d\vec{r}d\vec{v}$

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}$$

$$f d\vec{r} d\vec{v}$$

Particle concentration

$$n(\vec{r}, t)$$

Mean particle velocity

$$v_0(\vec{r}, t)$$

Flow of quantity  $\psi$  through unit area moving with velocity  $v_0$

$$\Psi = \bar{\psi} = \int \psi(\vec{V}) \vec{V} f d\vec{V}$$

kde integraci se miní integrace přes celý rychlostní prostor a přes objem, ve kterém je daný systém uzavřen. Potom střední hodnota funkce  $g(\vec{r}, \vec{v})$  je dána výrazem

$$(3.2) \quad \bar{g} = \frac{1}{N} \int g(\vec{r}, \vec{v}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}.$$

Podobně pro lokální střední hodnotu (střední hodnotu, která se může obecně měnit v prostoru od bodu k bodu) funkce  $g(\vec{r}, \vec{v})$  dostáváme

$$(3.3) \quad \bar{g}(\vec{r}, t) = \frac{1}{n} \int g(\vec{r}, \vec{v}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v},$$

kde

$$(3.4) \quad n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

je koncentrace částic v místě  $\vec{r}$ ;  $n(\vec{r}, t) d\vec{r}$  je potom počet částic v objemu  $d\vec{r}$  kolem bodu  $\vec{r}$ .\*)

Pomocí definice (3.3) můžeme nyní zavést některé důležité veličiny, které budou pro nás v dalším textu nepostradatelné.

Tak například střední rychlost částic v bodě  $(\vec{r}, t)$   $v_0(\vec{r}, t)$  bude podle (3.3) dána vztahem

$$(3.5) \quad \bar{v}_0(\vec{r}, t) = \frac{1}{n} \int \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}.$$

Velmi často bývá výhodné vztahovat rychlost částic ke střední rychlosti  $v_0(\vec{r}, t)$ ; zavedeme tedy pojem relativní rychlosti  $\vec{V}$  vzhledem ke střední rychlosti  $v_0(\vec{r}, t)$  vztahem

$$(3.6) \quad \vec{V} = \vec{v} - v_0(\vec{r}, t).$$

Potom s ohledem na definici  $v_0(\vec{r}, t)$  (3.5) je zřejmé, že

$$(3.7) \quad \bar{\vec{V}} = \bar{\vec{v}} - v_0(\vec{r}, t) = 0.$$

V systému, který není v rovnovážném stavu, existuje jistý počet gradientů, jako například koncentrace, relativní rychlosti, teploty atd., které způsobují přenos hmotnosti, impulsu, teploty a dalších veličin, jež charakterizují vlastnosti částic daného systému. Označíme-li tyto veličiny jako  $\psi(\vec{v})$ , pak tok veličiny  $\psi$  jednotkovou plochou, která se pohybuje rychlostí  $v_0$ \*\*) za jednotku času bude zřejmě roven

$$(3.8) \quad \Psi = \bar{\Psi} = \int \psi(\vec{V}) \vec{V} f d\vec{V}.$$

\*) Pro jednoduchost zápisu budeme místo „v  $d\vec{r}$  kolem bodu  $\vec{r}$ “ říkat „v bodě  $\vec{r}$ “.

\*\*) V dalším textu budeme vždy uvažovat tok plochou, která je v klidu vzhledem ke střední rychlosti částic systému.

## Derivation of the Boltzmann equation

## 3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému  $N$  částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce  $f_i$  jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování  $f_i$ , za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvilleův teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$  a částice 2 v bodě  $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)$  jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla  $\mathbf{F}_i$ , působící na  $i$ -tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element  $\mu$  prostoru se středem v bodě  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ , o velikosti  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ ; v čase  $t$  obsahuje tento  $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$  částic  $i$ -tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase  $t + dt$  vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemovém elementu  $d\mathbf{r}$  kolem bodu  $\mathbf{r} + \mathbf{v} dt$  a v rychlostním elementu  $d\mathbf{v}$  kolem bodu  $\mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m_i) dt$  (předpokládáme, že síla  $\mathbf{F}_i$  se téměř nezmění uvnitř  $d\mathbf{r}$  za  $dt$ ). Podle Liouvilleova teorému tedy platí

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m_i) dt, t + dt) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i = f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i.$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

$$(3.32) \quad \frac{\delta_e f_i}{\delta t} d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt$$

jako změnu počtu částic  $i$ -tého druhu v  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i$  způsobenou srážkami za čas  $dt$ , musí zřejmě platit

$$(3.33) \quad f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m_i) dt, t + dt) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i - f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t} d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt.$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

$$(3.34) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}.$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen  $(\delta_e f_i/\delta t)$ , kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic  $i$ -tého druhu, které se dostanou do objemového elementu  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i$  vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas  $dt$  (označi-

(1.15')

$$\frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0,$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace je 1 a proto je

$$\int d\Gamma = \int d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = \text{const},$$

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina... proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“

BBGKY equations applied for  $s=1, s=2$

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro  $F_s$  ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1},$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro  $s=1$  a  $s=2$ . Pro  $s=1$  dostaneme

$$(1.54) \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{r}_1} H_1 \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} F_1 - \nabla_{\mathbf{p}_1} H_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} F_1 + \frac{N-1}{V} \int (\nabla_{\mathbf{r}_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} F_2 - \nabla_{\mathbf{p}_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} F_2) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2$$

a pro  $s=2$  dostaneme

$$(1.55) \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V} \sum_{i=1}^2 \int [\Phi_{i3}; F_3] d\mathbf{r}_3 d\mathbf{p}_3.$$

Taylor function for G

$$G(\vec{A} + \vec{X}) = G(\vec{A}) + \vec{X} \cdot \nabla_A G$$

## 3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému  $N$  částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce  $f_i$  jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování  $f_i$ , za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvilleův teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$  a částice 2 v bodě  $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)$  jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla  $\mathbf{F}_i$ , působící na  $i$ -tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element  $\mu$  prostoru se středem v bodě  $\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$  o velikosti  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i$ ; v čase  $t$  obsahuje tento  $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i$  částic  $i$ -tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase  $t + dt$  vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemu  $\mu$  (tj. v  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i$  kolem bodu  $\mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i dt, \mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m_i) dt, t + dt$ ). Podle Liouvilleova teorému platí:

$$G(\mathbf{A} + \mathbf{X}) - G(\mathbf{A}) = \mathbf{X} \cdot \nabla_{\mathbf{A}} G$$

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i dt, \mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m_i) dt, t + dt) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i = f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

$$(3.32) \quad \frac{\delta_e f_i}{\delta t} d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt$$

jako změnu počtu částic  $i$ -tého druhu v  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i$  způsobenou srážkami za čas  $dt$ , musí zřejmě platit

$$(3.33) \quad f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i dt, \mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m_i) dt, t + dt) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i - f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t} d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

$$(3.34) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen  $(\delta_e f_i / \delta t)$ , kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic  $i$ -tého druhu, které se dostanou do objemového elementu  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i$  vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas  $dt$  (označí-

(1.15')

$$\frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0,$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace je 1 a proto je

$$\int d\Gamma = \int d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = \text{const},$$

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina... proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“

## BBGKY equations applied for $s=1, s=2$

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro  $F_s$  ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1},$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro  $s=1$  a  $s=2$ . Pro  $s=1$  dostaneme

$$(1.54) \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{r}_1} H_1 \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} F_1 - \nabla_{\mathbf{p}_1} H_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} F_1 + \frac{N-1}{V} \int (\nabla_{\mathbf{r}_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} F_2 - \nabla_{\mathbf{p}_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} F_2) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2$$

a pro  $s=2$  dostaneme

$$(1.55) \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V} \sum_{i=1}^2 \int [\Phi_{i3}; F_3] d\mathbf{r}_3 d\mathbf{p}_3$$

## Taylor series - for function G

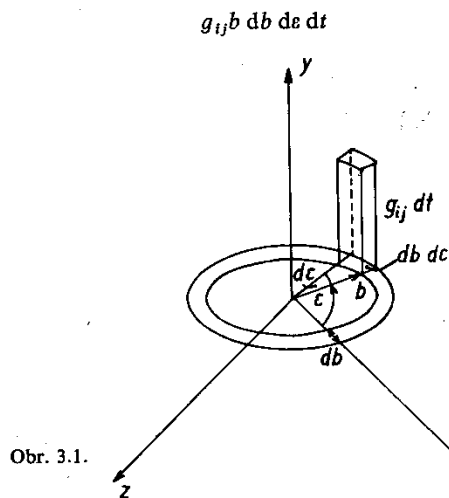
$$G(\vec{A} + \vec{X}) = G(\vec{A}) + \vec{X} \cdot \nabla_{\vec{A}} G$$

me  $\sum_j A_{ij}^+ dr dv_i dt$ ), minus počet částic  $i$ -tého druhu, které tento objemový element opustí vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval  $dt$  (označíme  $\sum_j A_{ij}^- dr dv_i dt$ ). Symbolicky, tedy můžeme psát

$$(3.35) \quad \frac{\delta_e f_i}{\delta t} dr dv_i dt = \sum_j (A_{ij}^+ - A_{ij}^-) dr dv_i dt,$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu  $A_{ij}^- dr dv_i dt$ . Nechť částice  $i$ -tého druhu je umístěna v bodě  $\mathbf{r}$  a nechť se pohybuje rychlostí  $\mathbf{v}_i$ . Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu  $dt$  sráží s částicí  $j$ -tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic  $g_{ij} = |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|$ , srážkovým parametrem  $b$  a úhlem  $\epsilon$  mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice  $i$ -tého druhu za čas  $dt$  s částicemi  $j$ -tého druhu, jejichž relativní rychlost je  $g_{ij}$ , srážkový parametr je v mezích  $b, b + db$  a úhel v mezích  $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$  potom bude roven počtu částic  $j$ -tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu



Obr. 3.1.

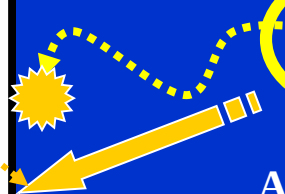
(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici  $f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t)$  je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dt.$$

Celkový počet srážek částice  $i$ -tého druhu se všemi částicemi druhu  $j$ -tého za čas  $dt$  potom zřejmě bude

$$(3.36) \quad dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j,$$

After the collision  
leaves the element



All such  $j$ -th particles  
hits the  $i$ -th particle at the origin

$$dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j$$

The  $i$  particles in the element is:

$$f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) dr dv_i.$$

$$dr dv_i, \text{ je } A_{ij}^- dr dv_i dt$$

Number of collisions

= the number of particles that leave the  $dr dv_i$  element is:

$$A_{ij}^- dr dv_i dt = dr dv_i dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j.$$

“volume” element

$$g_{ij} b db d\epsilon dt$$

Number of particles  
in an element

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dt$$

# Velký Kracík



Volume element

$$g_{ij} b \, db \, d\epsilon \, dt$$

Počet částic v elementu

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) g_{ij} b \, db \, d\epsilon \, dt$$

All such j-th particles  
hits the i-th particle at the origin

$$dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) g_{ij} b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_j$$

The i-th particle in the element is:

$$f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i.$$

$$d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i, \text{ je } A_{ij}^- d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt$$

Number of precipitations

= the number of particles that leave the element  $d\mathbf{r}_i d\mathbf{v}_i$  is :

$$A_{ij}^- d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt = d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) g_{ij} b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_j$$

Similarly, for the number of particles,  
that enter into the element

## Inverse Process

před srážkou jsou  $\mathbf{v}'_i$  a  $\mathbf{v}'_j$

v důsledku srážky nabývají tyto částice

právě rychlostí  $\mathbf{v}_i$  a  $\mathbf{v}_j$

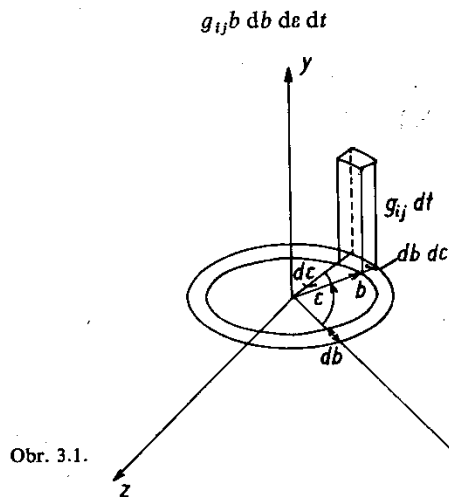
$$A_{ij}^+ d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt = d\mathbf{r} d\mathbf{v}'_i dt \iiint f'_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_j, t) f'_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_i, t) g'_{ij} b' \, db' \, d\epsilon' \, d\mathbf{v}'_j$$

me  $\sum_j A_{ij}^+ dr dv_i dt$ ), minus počet částic  $i$ -tého druhu, které tento objemový element opouští vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval  $dt$  (označíme  $\sum_j A_{ij}^- dr dv_i dt$ ). Symbolicky tedy můžeme psát

$$(3.35) \quad \frac{\delta_e f_i}{\delta t} dr dv_i dt = \sum_j (A_{ij}^+ - A_{ij}^-) dr dv_i dt,$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu  $A_{ij}^- dr dv_i dt$ . Nechť částice  $i$ -tého druhu je umístěna v bodě  $r$  a nechť se pohybuje rychlostí  $v_i$ . Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu  $dt$  sráží s částicí  $j$ -tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic  $g_{ij} = |v_i - v_j|$ , srážkovým parametrem  $b$  a úhlem  $\epsilon$  mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice  $i$ -tého druhu za čas  $dt$  s částicemi  $j$ -tého druhu, jejichž relativní rychlost je  $g_{ij}$ , srážkový parametr je v mezích  $b, b + db$  a úhel v mezích  $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$  potom bude roven počtu částic  $j$ -tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu



Obr. 3.1.

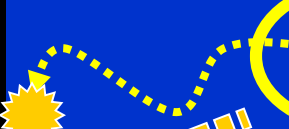
(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici  $f_j(r, v_j, t)$  je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(r, v_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dt.$$

Celkový počet srážek částice  $i$ -tého druhu se všemi částicemi druhu  $j$ -tého za čas  $dt$  potom zřejmě bude

$$(3.36) \quad dt \iiint f_j(r, v_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j,$$

After the collision  
leaves the element



$$A_{ij}^-$$

All such  $j$ -th particles  
hits the  $i$ -th particle at the origin

$$dt \iiint f_j(r, v_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j$$

The  $i$  particles in the element is:

$$f_i(r, v_i, t) dr dv_i.$$

$$dr dv_i, \text{ je } A_{ij}^- dr dv_i dt$$

Number of collisions

= the number of particles that leave the  $dr dv_i$  element is:

$$A_{ij}^- dr dv_i dt = dr dv_i dt \iiint f_j(r, v_j, t) f_i(r, v_i, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j.$$

“volume” element

$$g_{ij} b db d\epsilon dt$$

Number of particles  
in an element

$$f_j(r, v_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dt$$

$$A_{ij}^- d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt = d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) g_{ij} b d\epsilon d\mathbf{v}_j.$$

$$A_{ij}^+ d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt = d\mathbf{r} d\mathbf{v}'_i dt \iiint f'_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_j, t) f'_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_i, t) g'_{ij} b' db' d\epsilon' d\mathbf{v}'_j$$

Ze zákona zachování energie a impulsu (viz kapitolu 2) dále plyne, že

The Law of Conservation of Energy and Impulse

$$g_{ij} = g'_{ij}, \quad b = b'$$

interakční potenciál částic je sféricky symetrický,

$$\epsilon = \epsilon'$$

Protože částice neopustí během srážek objem  $d\mathbf{r}$  ( $= d\mathbf{r}'$ ), dostáváme z platnosti Liouvillova teorému důležitý výsledek, že

$$d\mathbf{v}_i d\mathbf{v}_j = d\mathbf{v}'_i d\mathbf{v}'_j$$

# Velký Kracik continued

$$\dot{A}_{ij}^- d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt = d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j.$$

$$A_{ij}^+ d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt = d\mathbf{r} d\mathbf{v}'_i dt \iiint f'_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_j, t) f'_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_i, t) g'_{ij} b' db' d\epsilon' dv'_j$$

$$g_{ij} = g'_{ij}, \quad b = b'$$

$$\epsilon = \epsilon'$$

$$dv_i dv_j = dv'_i dv'_j$$

Dosadíme-li nyní (3.39), (3.40) a (3.41) do rovnice (3.38), dostaneme konečně, že

$$(3.42) \quad A_{ij}^+ d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt = d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt \iiint f'_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_j, t) f'_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_i, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j.$$

Nyní již můžeme přistoupit k explicitnímu vyjádření rovnice (3.34). Po dosazení (3.37) a (3.42) do (3.34) za pomoci rovnice (3.35) dostaneme integrodiferenční rovnici

$$(3.43) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j$$

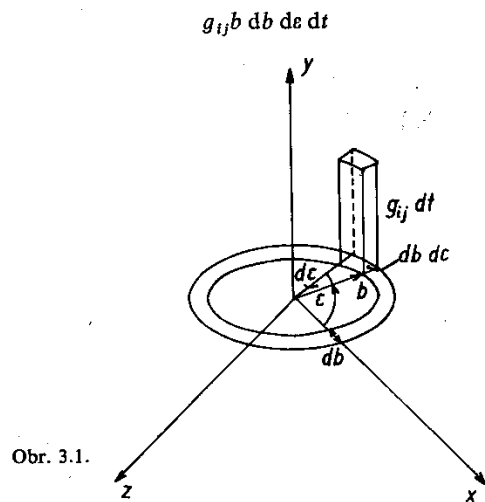
pro výpočet rozdělovací funkce  $f_i$   $i$ -tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

me  $\sum_j A_{ij}^+ dr dv_i dt$ ), minus počet částic  $i$ -tého druhu, které tento objemový element opustí vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval  $dt$  (označíme  $\sum_j A_{ij}^- dr dv_i dt$ ). Symbolicky tedy můžeme psát

$$(3.35) \quad \frac{\delta_e f_i}{\delta t} dr dv_i dt = \sum_j (A_{ij}^+ - A_{ij}^-) dr dv_i dt,$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu  $A_{ij}^- dr dv_i dt$ . Nechť částice  $i$ -tého druhu je umístěna v bodě  $r$  a nechť se pohybuje rychlostí  $v_i$ . Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu  $dt$  srazí s částicí  $j$ -tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic  $g_{ij} = v_i - v_j$ , srážkovým parametrem  $b$  a úhlem  $\varepsilon$  mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice  $i$ -tého druhu za čas  $dt$  s částicemi  $j$ -tého druhu, jejichž relativní rychlost je  $g_{ij}$ , srážkový parametr je v mezích  $b$ ,  $b + db$  a úhel v mezích  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon + d\varepsilon$  potom bude roven počtu částic  $j$ -tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu



Obr. 3.1.

(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici  $f_j(r, v_j, t)$  je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(r, v_j, t) g_{ij} b db d\varepsilon dt.$$

Celkový počet srážek částice  $i$ -tého druhu se všemi částicemi druhu  $j$ -tého za čas  $dt$  potom zřejmě bude

$$(3.36) \quad dt \iiint f_j(r, v_j, t) g_{ij} b db d\varepsilon dv_j,$$

kde se integrování provádí přes  $b$ ,  $\varepsilon$  a  $v_j$ . Abychom zachytili celkový počet srážek všech částic  $i$ -tého druhu v objemu  $dr dv_i$ , je nutno (3.36) vynásobit počtem částic  $i$ -tého druhu, které se nacházejí v objemovém elementu  $dr dv_i$ , tj. je nutno (3.36) vynásobit výrazem  $f_i(r, v_i, t) dr dv_i$ . Protože každá částice  $i$ -tého druhu, která se srazí s částicí  $j$ -tého druhu za  $dt$ , opustí námi uvažovaný element  $dr dv_i$ , je  $A_{ij}^- dr dv_i dt$  rovno počtu srážek, tj.

$$(3.37) \quad A_{ij}^- dr dv_i dt = dr dv_i dt \iiint f_j(r, v_j, t) f_i(r, v_i, t) g_{ij} b db d\varepsilon dv_j.$$

Obdobným způsobem můžeme stanovit  $A_{ij}^+ dr dv_i dt$ , tj. počet částic  $i$ -tého druhu, které se vlivem srážek s částicemi  $j$ -tého druhu dostanou za  $dt$  do námi uvažovaného objemu  $dr dv_i$ . V tomto případě stačí uvažovat takové inverzní srážky mezi částicemi  $i$ -tého druhu a částicemi  $j$ -tého druhu, kdy rychlosti těchto částic před srážkou jsou  $v_i'$  a  $v_j'$  a kdy v důsledku srážky nabývají tyto částice právě rychlosti  $v_i$  a  $v_j$  (předpokládáme, že se srážkové podmínky oproti předcházejícímu případu nezmění). Potom úplně analogicky s (3.37) je počet takových srážek roven

$$(3.38) \quad A_{ij}^+ dr dv_i dt = dr dv_i' dt \iiint f_j'(r, v_j', t) f_i'(r, v_i', t) g_{ij}' b' db' d\varepsilon' dv_j'.$$

Ze zákona zachování energie a impulsu (viz kapitolu 2) dále plyne, že

$$(3.39) \quad g_{ij} = g_{ij}', \quad b = b'.$$

Budeme-li dále předpokládat, že interakční potenciál částic je sféricky symetrický, můžeme položit

$$(3.40) \quad \varepsilon = \varepsilon'.$$

Protože částice neopustí během srážek objem  $dr (= dr')$ , dostáváme z platnosti Liouvillova teorému důležitý výsledek, že

$$(3.41) \quad dv_i dv_j = dv_i' dv_j'.$$

Dosadíme-li nyní (3.39), (3.40) a (3.41) do rovnice (3.38), dostaneme konečně, že

$$(3.42) \quad A_{ij}^+ dr dv_i dt = dr dv_i dt \iiint f_j'(r, v_j', t) f_i'(r, v_i', t) g_{ij} b db d\varepsilon dv_j'.$$

Nyní již můžeme přistoupit k explicitnímu vyjádření rovnice (3.34). Po dosazení (3.37) a (3.42) do (3.34) za pomoci rovnice (3.35) dostaneme integrodiferenciální rovnici

$$(3.43) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{F_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j) g_{ij} b db d\varepsilon dv_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce  $f_i$   $i$ -tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

# Collision term

- Some properties of the collision term
- Precipitation invariants

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_j$$

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí  $t$ ,  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{v}_i$ . Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí  $\Phi_i = \Phi_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t)$  přes rychlostní prostor  $\mathbf{v}_i$ , tj. určit

## 3.3 Některé vlastnosti srážkového členu.

### Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí  $t$ ,  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{v}_i$ . Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí  $\Phi_i = \Phi_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t)$  přes rychlostní prostor  $\mathbf{v}_i$ , tj. určit

$$\begin{aligned} (3.53) \quad n_i \delta \Phi_i &= \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} d\mathbf{v}_i = \int \Phi_i \left( \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \right)_i d\mathbf{v}_i + \sum_{j \neq i} \int \Phi_i \left( \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \right)_j d\mathbf{v}_i = \\ &= \iiint \Phi_i (f'_i f'_i{}^{(1)} - f_i f_i{}^{(1)}) g b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_i{}^{(1)} d\mathbf{v}_i + \\ &+ \sum_{j \neq i} \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_j d\mathbf{v}_i. \end{aligned}$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

$$(3.54) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_j d\mathbf{v}_i.$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, b$  a  $\epsilon$  za  $\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j, b'$  a  $\epsilon'$ , dostaneme integrál

$$(3.55) \quad \iiint \Phi'_i (f_i f_j - f'_i f'_j) g_{ij} b' \, db' \, d\epsilon' \, d\mathbf{v}'_j d\mathbf{v}'_i,$$

kde  $\Phi'_i = \Phi_i(\mathbf{v}'_i, \mathbf{r}, t)$ , který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

We will show that for some functions - invariants

$$\Psi = 1, \quad \Theta = m\mathbf{v}, \quad \Sigma = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2,$$

It is

$$\iiint \Psi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_j d\mathbf{v}_i = 0$$

In detail

# Collision term – a deterrent example

- Some properties of the collision term
- Precipitation invariants

## 3.3 Některé vlastnosti srážkového členu.

### Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí  $t$ ,  $r$  a  $v_i$ . Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí  $\Phi_i = \Phi_i(v_i, r, t)$  přes rychlostní prostor  $v_i$ , tj. určit

$$(3.53) \quad n_i \delta \bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} dv_i = \int \Phi_i \left( \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \right)_i dv_i + \sum_{j \neq i} \int \Phi_i \left( \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \right)_j dv_i =$$

$$= \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i +$$

$$+ \sum_{j \neq i} \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i.$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

$$(3.54) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i.$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné  $v_i, v_j, b$  a  $\epsilon$  za  $v'_i, v'_j, b'$  a  $\epsilon'$ , dostaneme integrál

$$(3.55) \quad \iiint \Phi'_i (f_i f_j - f'_i f'_j) g_{ij} b' db' d\epsilon' dv'_j dv'_i,$$

kde  $\Phi'_i = \Phi_i(v'_i, r, t)$ , který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

(3.39), (3.40) a (3.41), dostáváme z (3.54) a (3.55)

$$(3.56) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i =$$

$$= \iiint \Phi'_i (f_i f_j - f'_i f'_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_i dv_j = - \iiint \Phi'_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_i dv_j.$$

Uvážíme-li nyní platnost (3.56) a identitu z (3.54), můžeme konečně psát, že

$$(3.57) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint (\Phi_i - \Phi'_i) (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i.$$

Pro první člen na pravé straně (3.53) můžeme napsat zcela analogickou rovnici, tj.

$$(3.58) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f'_i - f_i f_i) g_{ii} b db d\epsilon dv_i dv_i =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint (\Phi_i - \Phi'_i) (f'_i f'_i - f_i f_i) g_{ii} b db d\epsilon dv_i dv_i.$$

Zaměníme-li  $v_i$  za  $v_i^{(1)}$ , rovnice (3.58) se nezmění; můžeme potom psát

$$(3.59) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f'_i - f_i f_i) g_{ii} b db d\epsilon dv_i dv_i =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint (\Phi_i^{(1)} - \Phi_i) (f'_i f'_i - f_i f_i) g_{ii} b db d\epsilon dv_i dv_i^{(1)}.$$

Nyní sečtením (3.58) a (3.59) získáváme důležitý závěr, že

$$(3.60) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f'_i - f_i f_i) g_{ii} b db d\epsilon dv_i dv_i =$$

$$= \frac{1}{4} \iiint (\Phi_i + \Phi_i^{(1)} - \Phi'_i - \Phi_i^{(1)}) (f'_i f'_i - f_i f_i) g_{ii} b db d\epsilon dv_i dv_i.$$

V případě, že  $i \neq j$ , budeme postupovat poněkud jiným způsobem. K tomu účelu sestrojme výraz

$$(3.61) \quad \sum_i \sum_{j \neq i} \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \iiint (\Phi_i - \Phi'_i) (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i$$

# Collision term – a deterrent example

## 3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí  $t$ ,  $r$  a  $v_i$ . Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí  $\Phi_i = \Phi_i(v_i, r, t)$  přes rychlostní prostor  $v_i$ , tj. určit

$$(3.53) \quad n_i \delta \Phi_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} dv_i = \int \Phi_i \left( \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \right)_i dv_i + \sum_{j \neq i} \int \Phi_i \left( \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \right)_j dv_i =$$

$$= \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g b db d\epsilon dv_j dv_i +$$

Particles of the same species

$$+ \sum_{j \neq i} \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i.$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

$$(3.54) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i.$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné  $v_i, v_j, b$  a  $\epsilon$  za  $v'_i, v'_j, b'$  a  $\epsilon'$ , dostaneme integrál

$$(3.55) \quad \iiint \Phi'_i (f_i f_j - f'_i f'_j) g_{ij} b' db' d\epsilon' dv'_j dv'_i,$$

kde  $\Phi'_i = \Phi_i(v'_i, r, t)$ , který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

Some properties of the collision term

Precipitation invariants

(3.39), (3.40) a (3.41), dostáváme z (3.54) a (3.55)

$$(3.56) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i =$$

$$= \iiint \Phi'_i (f_i f_j - f'_i f'_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_i dv_j = - \iiint \Phi'_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_i dv_j.$$

Uvážíme-li nyní platnost (3.56) a identitu z (3.54), můžeme konečně psát, že

$$(3.57) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint (\Phi_i - \Phi'_i) (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i.$$

Pro první člen na pravé straně (3.53) můžeme napsat zcela analogickou rovnici, tj.

$$(3.58) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f_i^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) g b db d\epsilon dv_i^{(1)} dv_i =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint (\Phi_i - \Phi'_i) (f'_i f_i^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) g b db d\epsilon dv_i^{(1)} dv_i.$$

Zaměníme-li  $v_i$  za  $v_i^{(1)}$ , rovnice (3.58) se nezmění; můžeme potom psát

$$(3.59) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f_i^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) g b db d\epsilon dv_i^{(1)} dv_i =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint (\Phi_i^{(1)} - \Phi'_i) (f'_i f_i - f_i f_i) g b db d\epsilon dv_i dv_i^{(1)}.$$

Nyní sečtením (3.58) a (3.59) získáváme důležitý závěr, že

$$(3.60) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f_i^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) g b db d\epsilon dv_i^{(1)} dv_i =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint (\Phi_i + \Phi_i^{(1)} - \Phi'_i - \Phi'_i) (f'_i f_i^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) g b db d\epsilon dv_i^{(1)} dv_i.$$

Particles of the same species

V případě, že  $i \neq j$ , budeme postupovat poněkud jiným způsobem. K tomu účelu sestrojme výraz

$$(3.61) \quad \sum_i \sum_{j \neq i} \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \iiint (\Phi_i - \Phi'_i) (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i$$

result

If this is equal ....= 0,  
then this is = 0

# Collision term – a deterrent example (frightening)

## But the result.....

- Some properties of the collision term
- Precipitation invariants (srážkové invarianty)

result

### 3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí  $t$ ,  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{v}_i$ . Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí  $\Phi_i = \Phi_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t)$  přes rychlostní prostor  $\mathbf{v}_i$ , tj. určit

$$(3.53) \quad n_i \delta \Phi_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} d\mathbf{v}_i = \int \Phi_i \left( \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \right)_i d\mathbf{v}_i + \sum_{j \neq i} \int \Phi_i \left( \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \right)_j d\mathbf{v}_i = \\ = \iiint \Phi_i (f'_i f'_i - f_i f_i^{(1)}) g b db d\epsilon d\mathbf{v}_i^{(1)} d\mathbf{v}_i + \\ + \sum_{j \neq i} \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon d\mathbf{v}_j d\mathbf{v}_i.$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

$$(3.54) \quad \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon d\mathbf{v}_j d\mathbf{v}_i.$$

Zaměňme-li nyní integrační proměnné  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, b$  a  $\epsilon$  za  $\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j, b'$  a  $\epsilon'$ , dostaneme integrál

$$(3.55) \quad \iiint \Phi'_i (f_i f_j - f'_i f'_j) g_{ij} b' db' d\epsilon' d\mathbf{v}'_j d\mathbf{v}'_i,$$

kde  $\Phi'_i = \Phi_i(\mathbf{v}'_i, \mathbf{r}, t)$ , který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

a  $\Sigma_i$ . Zde je nutno vzít v úvahu platnost rovnice (3.63), do které nyní za  $\Phi_i$  dosadíme  $\Theta_i$  a  $\Sigma_i$ . Potom dostaneme

$$(3.68) \quad \sum_i \sum_{j \neq i} \iiint \Theta_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon d\mathbf{v}_j d\mathbf{v}_i = 0$$

a

$$(3.69) \quad \sum_i \sum_{j \neq i} \iiint \Sigma_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon d\mathbf{v}_j d\mathbf{v}_i = 0.$$

Obdobné výsledky získáme, přejdeme-li od proměnných  $\mathbf{v}, \mathbf{r}, t$  k jejich ekvivalentům  $\mathbf{V}, \mathbf{r}, t$  (respektive od  $\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t$  k  $\mathbf{V}_i, \mathbf{r}, t$ ). Forma srážkových invariantů (3.65) a (3.67) se nezmění, je nutná pouze ekvivalentní záměna  $\mathbf{v}$  za  $\mathbf{V}$  respektive  $\mathbf{v}_i$  za  $\mathbf{V}_i$ .

na základě platnosti (3.57). Provedeme-li nyní záměnu  $i$  za  $j$ , je pravá strana (3.61) rovna také výrazu

$$(3.62) \quad \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \iiint (\Phi_j - \Phi'_j) (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon d\mathbf{v}_j d\mathbf{v}_i,$$

který za pomoci (3.61) dává závěrečný vztah, že

$$(3.63) \quad \sum_i \sum_{j \neq i} \iiint \Phi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon d\mathbf{v}_j d\mathbf{v}_i = \\ = \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \iiint (\Phi_i + \Phi_j - \Phi'_i - \Phi'_j) (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon d\mathbf{v}_j d\mathbf{v}_i.$$

Vrátíme-li se nyní k některým úvahám, které se týkají teorie binárních elastických srážek (viz kapitolu 2), vidíme, že existuje jistý počet funkcí  $\Phi_i$ , pro které platí

$$(3.64) \quad \delta \Phi_i = 0.$$

Tyto funkce se nazývají srážkové invarianty a budou zřejmě funkcemi hmotnosti a energie částic, neboť tyto veličiny se během srážek zachovávají. Jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), můžeme přijmout  $\Phi_i = 1$ , což nám vlastně vyjadřuje podmínku, že během srážky částice neopouští objemový element  $d\mathbf{r}$ . Protože během binárních srážek platí zákon zachování hmoty, můžeme také jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), přijmout  $\Phi_i = m_i$ , což je v podstatě úplně ekvivalentní  $\Phi_i = 1$ .

Jestliže je systém tvořen stejnými částicemi, máme pět srážkových invariantů

$$(3.65) \quad \Psi = 1, \quad \Theta = m_i v, \quad \Sigma = \frac{1}{2} m_i v^2,$$

které, vzhledem k platnosti (3.60), splňují (3.64).

Poněkud jiná situace nastane, jestliže systém bude tvořen několika druhy částic. Zde musíme rozlišovat dva případy:

a) Jestliže  $\Psi_i = 1$ , potom podle rovnice (3.57) platí, že

$$(3.66) \quad \iiint \Psi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon d\mathbf{v}_j d\mathbf{v}_i = 0$$

a tedy tento případ je úplně obdobný případu předchozímu.

b) Jestliže ale

$$(3.67) \quad \Theta_i = m_i v_i \quad \text{a} \quad \Sigma_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

pak již není možno zobecnit (3.66) do té míry, že bychom nahradili  $\Psi_i$  funkcemi  $\Theta_i$

# Gibbs H-theorem ..... PAST LECTURE

$$(1.17) \quad S = -kH = -k \int P_N \ln P_N d\Gamma,$$

kde  $k$  je Boltzmannova konstanta. Budeme se tedy dále zabývat studiem  $H$ -funkce definované vztahem

$$(1.18) \quad H = \int P_N \ln P_N d\Gamma.$$

Pro systém neinteragujících a na sobě nezávislých částic je možno  $P_N$  zapsat do tvaru

$$(1.19) \quad P_N = P_1(r_1, p_1) P_1(r_2, p_2) \dots P_1(r_N, p_N).$$

Dosadíme-li nyní (1.19) do (1.18) a zavedeme-li genericou rozdělovací funkci

$$f_1(r_1, p_1) = N P_1(r_1, p_1),$$

dostaneme, že

$$(1.20) \quad H = \int f_1(r_1, p_1) \ln f_1(r_1, p_1) dr_1 dp_1 - N \ln N.$$

V rovnovážném stavu je  $f_1(r_1, p_1)$  totožné s kinetickou rozdělovací funkcí  $f(r, p)$  a  $H$ -funkce statistické mechaniky (1.18) se potom redukuje na Boltzmannovu  $H$ -funkci

$$H = \int f(r, p) \ln f(r, p) dr dp,$$

která se liší od (1.20) pouze aditivní konstantou ( $N \ln N$ ), což ovšem není podstatné.

Situace se poněkud změní, jestliže systém nebude v rovnovážném stavu. Totiž z (1.18) plyne, že

$$(1.21) \quad \frac{dH}{dt} = \int \frac{\partial P_N}{\partial t} (\ln P_N + 1) d\Gamma.$$

Uvážíme-li nyní platnost Liouvillových rovnic (1.15'), můžeme psát, že

$$(1.22) \quad \int \frac{\partial P_N}{\partial t} \ln P_N d\Gamma = - \int [H; P_N] \ln P_N d\Gamma = \int P_N [H; \ln P_N] d\Gamma = \\ = \int [H; P_N] d\Gamma = - \int \frac{\partial P_N}{\partial t} d\Gamma.$$

Spojením rovnic (1.21) a (1.22) dostáváme, že

$$(1.23) \quad \frac{dH}{dt} = 0,$$

This means that the system does not evolve over time..... i.e., an unequilibrium system can never reach a state of equilibrium.

Paradox - classical mechanics leads to a strictly reversible description, while nature behaves irreversibly ...

And we were unhappy

# Boltzmann's H-theorem

...special case

$$(3.43) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j) g_{ij} b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce  $f_i$  i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

$$\nabla_{\mathbf{r}} = 0, \quad \vec{F} = 0$$

## 3.4 Boltzmannův H-teorém

Na rozdíl od Liouvillové rovnice vyhovuje Boltzmannova rovnice plně požadavku nevrátlosti přírodních dějů; tj. entropie definované pomocí rozdělovací funkce, která je řešením Boltzmannovy rovnice (3.43), je rostoucí funkce času až do té doby, dokud systém nedosáhne rovnovážného stavu. Potom je entropie konstantní, na čas nezávislá.

Abychom si ukázali výše uvedenou vlastnost Boltzmannovy rovnice, uvažujme nejprve jednoduchý případ, kdy  $\nabla_{\mathbf{r}} = 0$ , vnější síly jsou nulové a systém se skládá z jednoho druhu částic. Boltzmannova rovnice má nyní tvar

$$(3.70) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \iiint (f' f'^{(1)} - f f^{(1)}) g b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}^{(1)}.$$

Sestrojíme dále funkcionál  $H(t)$  podle definice

$$(3.71) \quad H(t) = \int f(\mathbf{v}, t) \ln f(\mathbf{v}, t) \, d\mathbf{v}.$$

Potom

$$(3.72) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \int (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \, d\mathbf{v} = \iiint (1 + \ln f) (f' f'^{(1)} - f f^{(1)}) g b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}^{(1)} \, d\mathbf{v}.$$

Tento výraz můžeme dále upravit podle (3.60); po kratších úpravách můžeme psát, že

$$(3.73) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{4} \iiint \ln \left( \frac{f' f'^{(1)}}{f f^{(1)}} \right) (f' f'^{(1)} - f f^{(1)}) g b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}^{(1)} \, d\mathbf{v}.$$

Particles of the same species

Odtud již snadno vidíme, že integrand je vždy kladný a tedy  $\partial H / \partial t$  je vždy záporné.

Let's do function

$$(3.60) \quad \iiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) g b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_i^{(1)} \, d\mathbf{v}_i = \\ = \frac{1}{4} \iiint (\Phi_i + \Phi_i^{(1)} - \Phi_i' - \Phi_i'^{(1)}) (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) g b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_i^{(1)} \, d\mathbf{v}_i$$

Particles of the same species

And we have no paradox - entropy is increasing

$$\frac{\delta H}{\delta t} \leq 0$$

# equilibrium

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

Dále  $\partial H / \partial t = 0$  tehdy a jen tehdy, jestliže

$$(3.74) \quad f' f'^{(1)} = f f^{(1)}.$$

Podle rovnice (3.70) je pak ale  $\partial f / \partial t = 0$ , a proto podmínka (3.74) odpovídá rovnovážnému stavu.

Na základě rovnosti (3.74) můžeme nyní určit tvar rozdělovací funkce systému, který je v rovnováze. Podle (3.74) můžeme totiž psát

$$(3.75) \quad \ln f' + \ln f'^{(1)} = \ln f + \ln f^{(1)},$$

tj. logaritmus rovnovážné rozdělovací funkce je srážkovým invariantem našeho systému. Podle našich předchozích úvah (viz str. 80) musí tedy být  $\ln f$  lineární kombinací srážkových invariantů (3.65), tj.

$$(3.76) \quad \ln f = a m + b \cdot m v + c \frac{1}{2} m v^2,$$

kde konstanty  $a$ ,  $b$  a  $c$  závisí na celkovém počtu částic, celkovém impulsu a celkové energii systému. Abychom určili tyto konstanty, přepíšme (3.76) do tvaru

$$(3.77) \quad \ln f = \ln a_0 - c \frac{1}{2} m [(v_x - b_x/c)^2 + (v_y - b_y/c)^2 + (v_z - b_z/c)^2].$$

Položíme-li nyní

$$(3.78) \quad V' = v - \frac{b}{c},$$

dostaneme z (3.77), že

$$(3.79) \quad f = a_0 \exp(-c \frac{1}{2} m V'^2).$$

Z normovací podmínky (3.4) dále máme

$$(3.80) \quad n = \int f d\mathbf{v} = a_0 \int \exp\left(-\frac{c}{2} m V'^2\right) dV' = a_0 \left(\frac{2\pi}{mc}\right)^{3/2}.$$

Podobně

$$(3.81) \quad n v_0 = \int v f d\mathbf{v} = \int \left(V' + \frac{b}{c}\right) f dV' = n \frac{b}{c},$$

protože  $\int V' f dV' = 0$ ; můžeme tedy psát, že

$$(3.82) \quad v_0 = \frac{b}{c}$$

a tedy

$$(3.83) \quad V' = v - v_0 = V.$$

- Derivation of
- Maxwell distribution function.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint (f' f'^{(1)} - f f^{(1)}) g b db d\epsilon d\mathbf{v}^{(1)}$$

Precipitation invariants

$$\Psi = 1, \quad \Theta = m v, \quad \Sigma = \frac{1}{2} m v^2,$$

# Maxwell distribution funkcion.

Dále  $\partial H / \partial t = 0$  tehdy a jen tehdy, jestliže

$$(3.74) \quad f' f^{(1)} = f f^{(1)}.$$

Podle rovnice (3.70) je pak ale  $\partial f / \partial t = 0$ , a proto podmínka (3.74) odpovídá rovnovážnému stavu.

Na základě rovnosti (3.74) můžeme nyní určit tvar rozdělovací funkce systému, který je v rovnováze. Podle (3.74) můžeme totiž psát

$$(3.75) \quad \ln f' + \ln f^{(1)} = \ln f + \ln f^{(1)},$$

tj. logaritmus rovnovážné rozdělovací funkce je srážkovým invariantem našeho systému. Podle našich předchozích úvah (viz str. 80) musí tedy být  $\ln f$  lineární kombinací srážkových invariantů (3.65), tj.

$$(3.76) \quad \ln f = a m + b \cdot m \mathbf{v} + c \frac{1}{2} m v^2,$$

kde konstanty  $a$ ,  $b$  a  $c$  závisí na celkovém počtu částic, celkovém impulsu a celkové energii systému. Abychom určili tyto konstanty, přepíšme (3.76) do tvaru

$$(3.77) \quad \ln f = \ln a_0 - c \frac{1}{2} m [(v_x - b_x/c)^2 + (v_y - b_y/c)^2 + (v_z - b_z/c)^2].$$

Položíme-li nyní

$$(3.78) \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{b}}{c},$$

dostaneme z (3.77), že

$$(3.79) \quad f = a_0 \exp \left( -c \frac{1}{2} m V'^2 \right).$$

Z normovací podmínky (3.4) dále máme

$$(3.80) \quad n = \int f d\mathbf{v} = a_0 \int \exp \left( -\frac{c}{2} m V'^2 \right) dV' = a_0 \left( \frac{2\pi}{mc} \right)^{3/2}.$$

Podobně

$$(3.81) \quad n v_0 = \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} = \int \left( \mathbf{V}' + \frac{\mathbf{b}}{c} \right) f dV' = n \frac{\mathbf{b}}{c},$$

protože  $\int \mathbf{V}' f dV' = 0$ ; můžeme tedy psát, že

$$(3.82) \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{b}}{c}$$

a tedy

$$(3.83) \quad \mathbf{V}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{V}.$$

$$(3.5) \quad \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}.$$

$$(3.6) \quad \mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t).$$

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint (f' f^{(1)} - f f^{(1)}) g b db d\epsilon d\mathbf{v}^{(1)}$$

Dále podle (3.80) a (3.83) platí

$$(3.84) \quad \frac{1}{2} m \bar{V}^2 = \frac{m}{2n} \int V^2 f d\mathbf{v} = \frac{m}{2n} a_0 \int V^2 \exp \left( -\frac{c}{2} m V^2 \right) dV = \frac{3}{2} c^{-1}.$$

S ohledem na definici  $V$  (3.6) je ale zřejmé, že

$$(3.85) \quad \frac{1}{2} m \bar{V}^2 = \frac{3}{2} k T$$

a tedy

$$(3.86) \quad c = \frac{1}{k T},$$

kde  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $T$  kinetická teplota plynu. Spojením předchozích výsledků dostáváme nyní rozdělovací funkci  $f$  ve tvaru

$$(3.87) \quad f = n \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m V^2}{2 k T} \right).$$

Tato rozdělovací funkce se nazývá Maxwellovou rozdělovací funkcí a systém, jehož stav je takovouto funkcí popsán, se nazývá maxwellovský systém.

Podle obecné definice rozdělovací funkce je  $f d\mathbf{v}$  počet částic v jednotkovém objemu, jejichž rychlosti leží v intervalu  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . V některých případech je ale vhodné znát počet částic v jednotce objemu, jejichž rychlosti leží v intervalu  $V$ ,  $V + dV$ , tj. zajímáme se pouze o absolutní hodnotu rychlosti a ne o směr. Zavedením sférických souřadnic  $(V, \vartheta, \varphi)$  snadno získáme, že

$$(3.88) \quad d\mathbf{v} = dV = V^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dV$$

a odtud integrací přes  $\vartheta$  a  $\varphi$  pak dostaneme, že počet částic v jednotce objemu, jejichž rychlosti leží mezi  $V$  a  $V + dV$ , je dán vztahem

$$(3.89) \quad \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} n \left( \frac{m}{k T} \right)^{3/2} V^2 \exp \left( -\frac{m V^2}{2 k T} \right) dV.$$

Pomocí takto zapsaného rozdělení můžeme nyní snadno určit střední hodnotu nějaké fyzikální veličiny, která nezávisí na směru rychlosti.

Tak např.

$$(3.90) \quad \bar{V} = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{k T} \right)^{3/2} \int_0^\infty V^3 e^{-(m V^2 / 2 k T)} dV = \left( \frac{8 k T}{\pi m} \right)^{1/2}$$

a podobně

$$(3.91) \quad \bar{V}^2 = \frac{3 k T}{m}.$$

# Mean values

Dále můžeme spočítat nejpravděpodobnější rychlost  $\bar{V}_n$ , tj. rychlost, pro kterou (3.89) dosahuje maxima. Snadno najdeme, že

$$(3.92) \quad \bar{V}_n = \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2}.$$

Sledujme nyní, jak vypadá tlakový tenzor (viz str. 71) maxwellovského systému. Jak je možno snadno zjistit, všechny členy tenzoru (3.11), s výjimkou diagonálních, jsou nulové. Pro výpočet diagonálních členů stačí uvážit, že  $\overline{V_x^2} = \overline{V_y^2} = \overline{V_z^2} = kT/m$ . Potom dostaneme, že

$$(3.93) \quad p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = p = nkT$$

a tedy

$$(3.94) \quad \underline{p = nkT}.$$

# Boltzman H-theorem in general

Sledujme nyní obecnější případ systému stejných částic, kdy  $\nabla_r \neq 0$  a  $\vec{F} \neq 0$ . Pro jednoduchost předpokládejme, že vnější síly  $\vec{F}$  nezávisí na rychlosti částic. Sestrojme nyní, stejně jako v kapitole 1,  $\mathcal{H}$ -funkci podle definice

$$(3.95) \quad \mathcal{H} = \iint f \ln f \, d\mathbf{v} \, d\mathbf{r}.$$

Potom

$$(3.96) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= \iint (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \, d\mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \\ &= \iint \left\{ (1 + \ln f) \frac{\delta_e f}{\delta t} - \mathbf{v} \cdot \nabla_r (f \ln f) - \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} \, d\mathbf{v} \, d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Poslední dva členy pravé strany (3.96) při integraci vymizí (protože  $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \pm\infty} f \ln f = 0$  a můžeme proto psát

$$(3.97) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \iint (1 + \ln f) \frac{\delta_e f}{\delta t} \, d\mathbf{v} \, d\mathbf{r}.$$

To ale znamená (stejně jako v předchozím případě), že

$$(3.98) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \leq 0;$$

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

$$\delta \mathcal{H} / \delta t \leq 0$$

$$(3.60) \quad \begin{aligned} &\iiint \Phi_i (f'_i f_i^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) g b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_i^{(1)} \, d\mathbf{v}_i = \\ &= \frac{1}{4} \iiint (\Phi_i + \Phi_i^{(1)} - \Phi'_i - \Phi_i^{(1)}) (f'_i f_i^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) g b \, db \, d\epsilon \, d\mathbf{v}_i^{(1)} \, d\mathbf{v}_i \end{aligned}$$

# Maxwell distribution function

■ Potential field

v rovnovážném stavu, kdy  $\delta_e f / \delta t = 0$ , je potom

$$(3.99) \quad f = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mV^2}{2kT} \right),$$

kde  $V = v - v_0$ . Veličiny  $n$ ,  $v_0$  a  $T$  nyní nezávisí na  $v$  a  $t$ , ale závisí na  $r$ .

Tuto závislost si demonstujeme na jednoduchém případě, kdy  $v_0 = 0$ .

Potom

$$(3.100) \quad f = n(r) \left( \frac{m}{2\pi kT(r)} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT(r)}$$

a musí platit

$$(3.101) \quad v \cdot \nabla_r f + \frac{F}{m} \cdot \nabla_v f = 0.$$

Dosadíme-li nyní do této rovnice rozdělovací funkci (3.100), dostaneme po kratších úpravách

$$(3.102) \quad v \cdot \nabla_r \left( \ln \frac{n}{T^{3/2}} \right) + \frac{m}{2kT} \frac{v^2}{T} v \cdot \nabla_r T - \frac{F}{kT} \cdot v = 0.$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách  $v$  nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

$$(3.103) \quad \nabla_r T = 0$$

a

$$(3.104) \quad \nabla_r \left( \ln \frac{n}{T^{3/2}} \right) - \frac{F}{kT} = 0.$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

$$(3.105) \quad F = kT \nabla_r \left( \ln \frac{n}{T^{3/2}} \right).$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako  $\Phi$  ( $F = -\nabla_r \Phi$ ), pak

$$(3.106) \quad \Phi = -kT \ln n + \text{konst}$$

a pro koncentraci dostáváme

$$(3.107) \quad n = n_0 \exp \left( -\frac{\Phi}{kT} \right),$$

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

Equilibrium -- that's terribly strong

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

$$(3.43) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{F_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i f_j - f_i f_j) g_{ij} b \, db \, dv_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce  $f_i$  i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

$=0$   $=0$

This only shows that it does not have an internal contradiction balance... thermodynamic equilibrium ???

kde  $n_0$  odpovídá koncentraci v místě  $\Phi = 0$ . Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

$$(3.108) \quad f = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT} \right)$$

All this in balance

It is necessary to understand this so that we can use it???

# Boltzman H-theorem .... in general

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$



$$\delta H / \delta t \leq 0$$

# Maxwel distribution function

## ■ Potential field

v rovnovážném stavu, kdy  $\delta_e f / \delta t = 0$ , je potom

$$(3.99) \quad f = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mV^2}{2kT} \right),$$

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

kde  $V = v - v_0$ . Veličiny  $n$ ,  $v_0$  a  $T$  nyní nezávisí na  $v$  a  $t$ , ale závisí na  $r$ .

Tuto závislost si demonstrujeme na jednoduchém případě, kdy  $v_0 = 0$ .

Potom

$$(3.100) \quad f = n(r) \left( \frac{m}{2\pi kT(r)} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT(r)}$$

a musí platit

$$(3.101) \quad v \cdot \nabla_r f + \frac{F}{m} \cdot \nabla_v f = 0.$$

Dosadíme-li nyní do této rovnice rozdělovací funkci (3.100), dostaneme po kratších úpravách

$$(3.102) \quad v \cdot \nabla_r \left( \ln \frac{n}{T^{3/2}} \right) + \frac{m}{2kT} \frac{v^2}{T} v \cdot \nabla_r T - \frac{F}{kT} \cdot v = 0.$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách  $v$  nulové.  
Odtud již snadno dostaneme, že

$$(3.103) \quad \nabla_r T = 0$$

a

$$(3.104) \quad \nabla_r \left( \ln \frac{n}{T^{3/2}} \right) - \frac{F}{kT} = 0.$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

$$(3.105) \quad F = kT \nabla_r \left( \ln \frac{n}{T^{3/2}} \right).$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako  $\Phi$  ( $F = -\nabla_r \Phi$ ), pak

$$(3.106) \quad \Phi = -kT \ln n + \text{konst}$$

a pro koncentraci dostáváme

$$(3.107) \quad n = n_0 \exp \left( -\frac{\Phi}{kT} \right),$$

kde  $n_0$  odpovídá koncentraci v místě  $\Phi = 0$ . Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

$$(3.108) \quad f = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT} \right)$$

-  $f$  is standardized to  $n$  !!!

-  $f$  was derived from  
assumption  $v_0=0$ !!!

➡ (No macroscopic movement)

# Maxwell distribution function

## ■ Potential field

kde  $n_0$  odpovídá koncentraci v místě  $\Phi = 0$ . Růzdělovací funkce (3.100) má pak tvar

$$(3.108) \quad f' = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT} \right) d\vec{v}$$

-  $f$  is standardized to  $n$   
 $f$  was derived under the assumption of  $v_0=0 \rightarrow$  no macroscopic motion

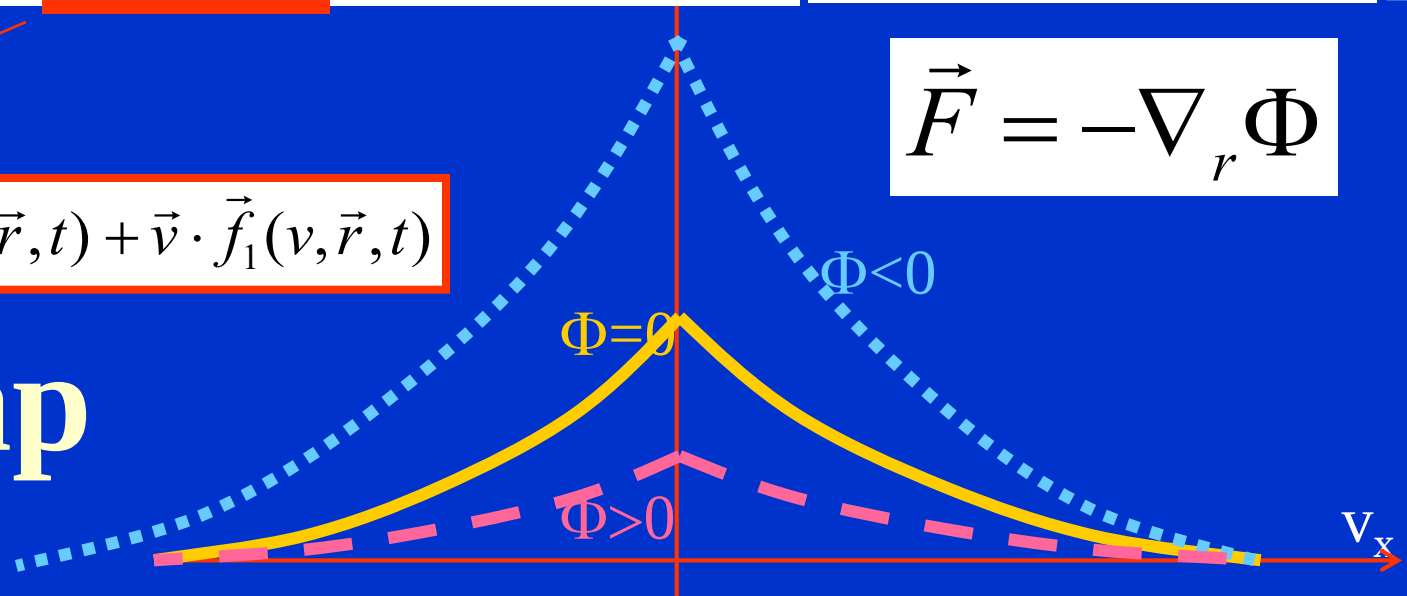
$$f = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\Phi}{kT} \right) \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT} \right) d\vec{v} \quad n(\vec{r}) = n_0 \exp \left( -\frac{\Phi}{kT} \right)$$

$n(r)$

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(v, \vec{r}, t) + \vec{v} \cdot \vec{f}_1(v, \vec{r}, t)$$

# Ion trap

$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$

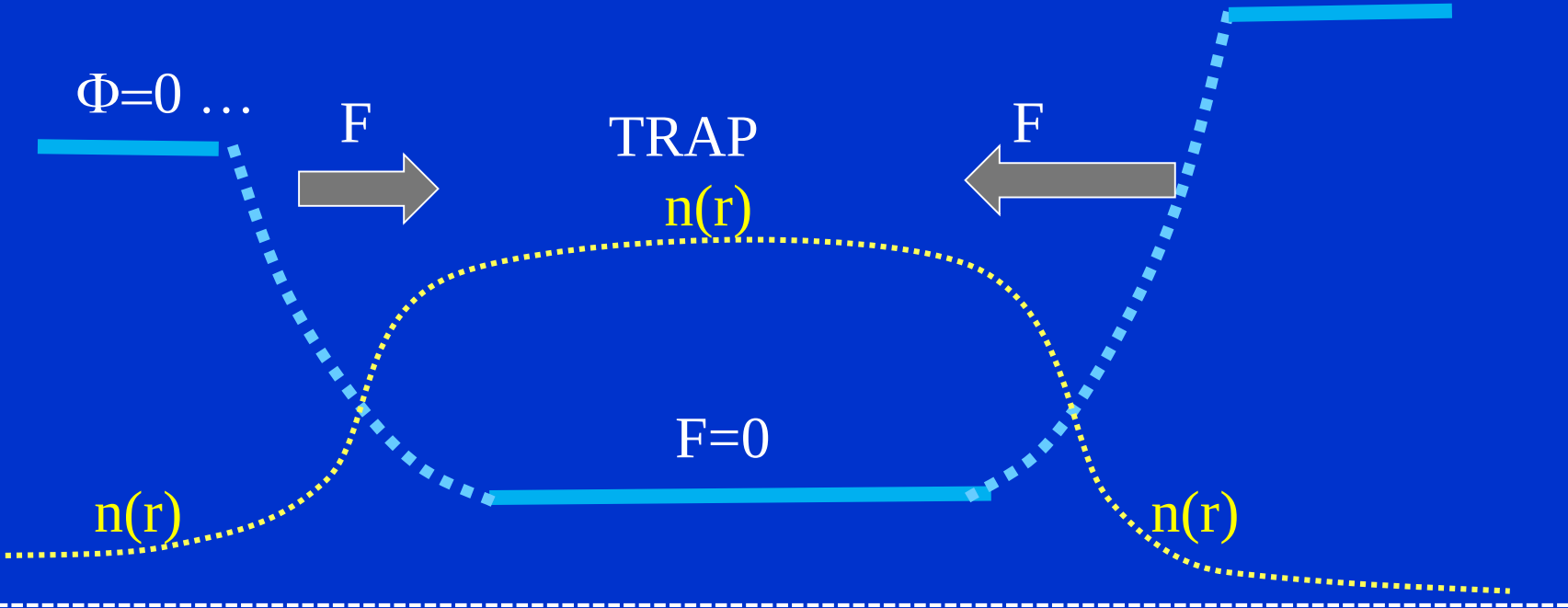


# Maxwellova rozdělovací funkce

$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$

■ Potenciálové pole

Potenciál silového pole



Density of trapped particles

$$f = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d\vec{v}$$

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)$$

$n(r)$

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(v, \vec{r}, t) + \vec{v} \cdot \vec{f}_1(v, \vec{r}, t)$$

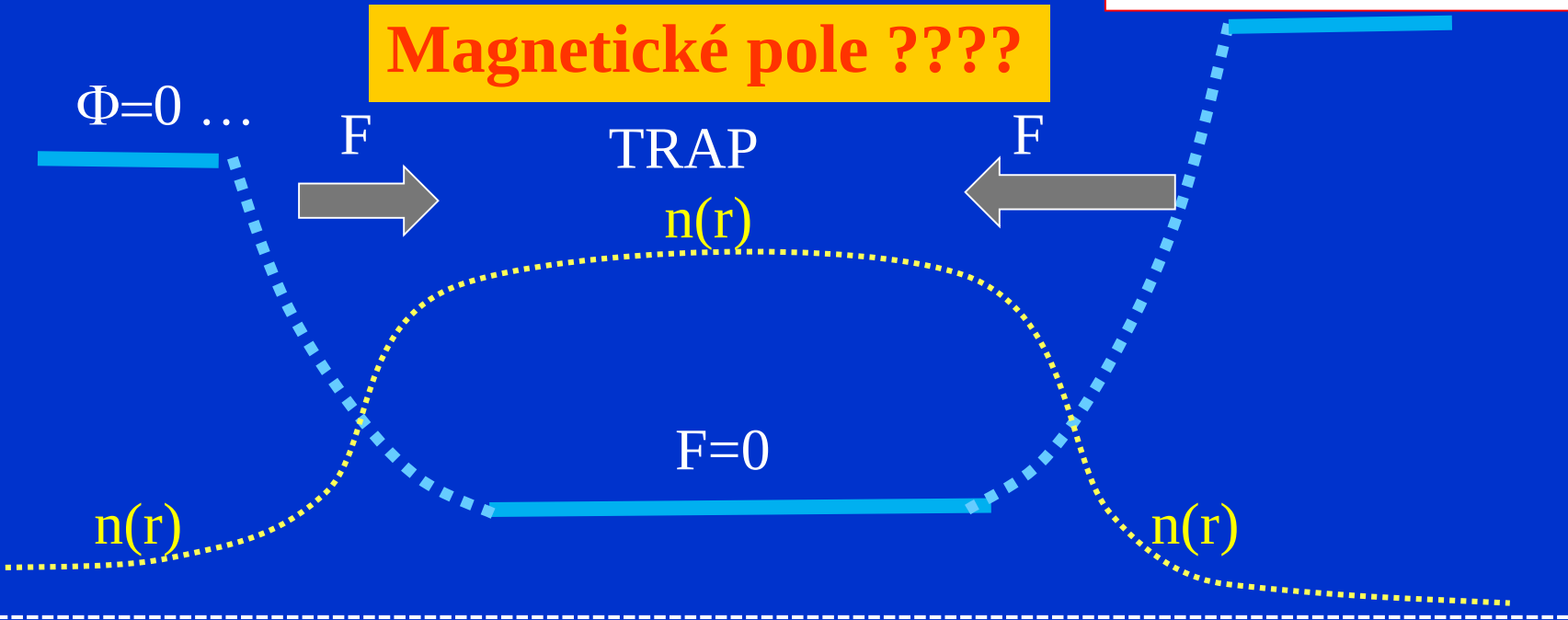
# Maxwellova rozdělovací funkce

$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$

■ Potenciálové pole

Potenciál silového pole

Magnetické pole ????



Density of trapped particles

$$f = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d\vec{v}$$

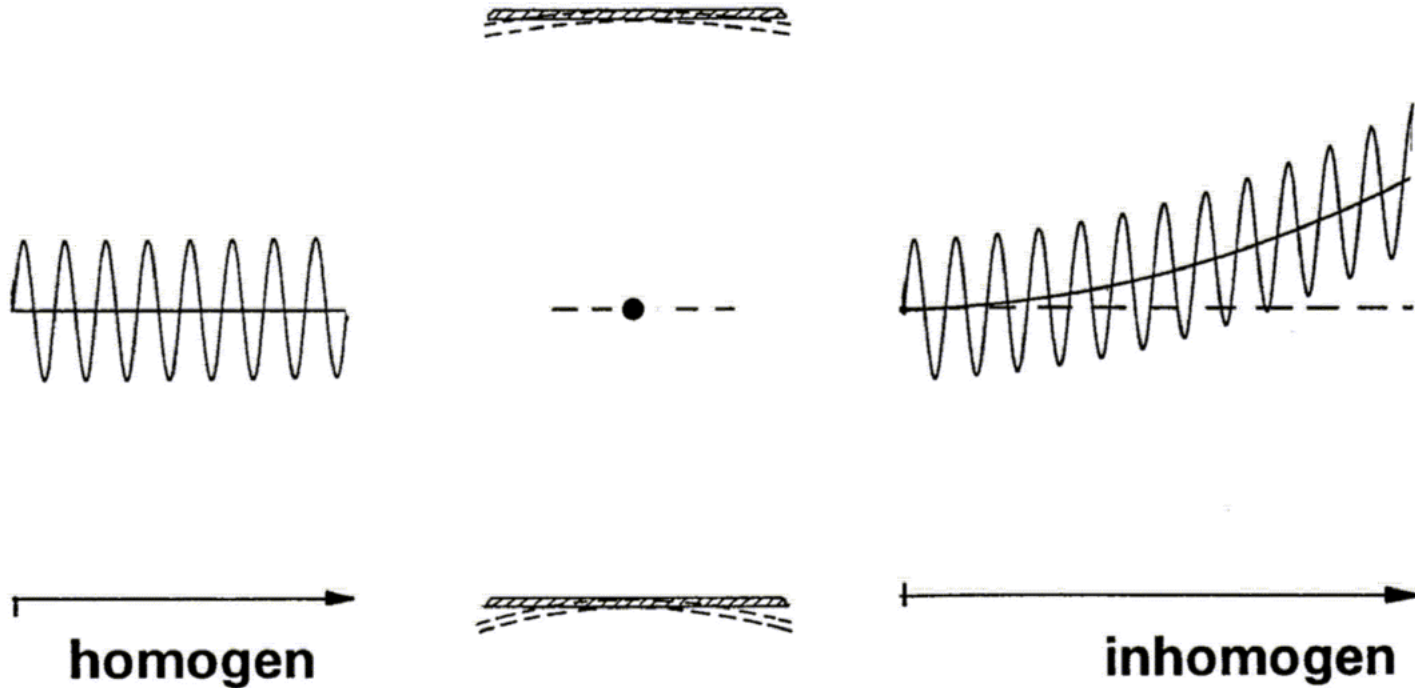
$$n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)$$

$n(r)$

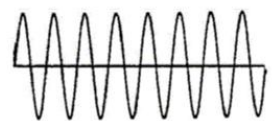
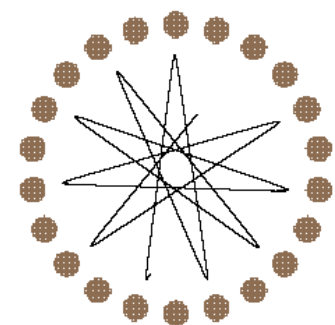
$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(v, \vec{r}, t) + \vec{v} \cdot \vec{f}_1(v, \vec{r}, t)$$

## Homogeneous electric field / Inhomogeneous electric field

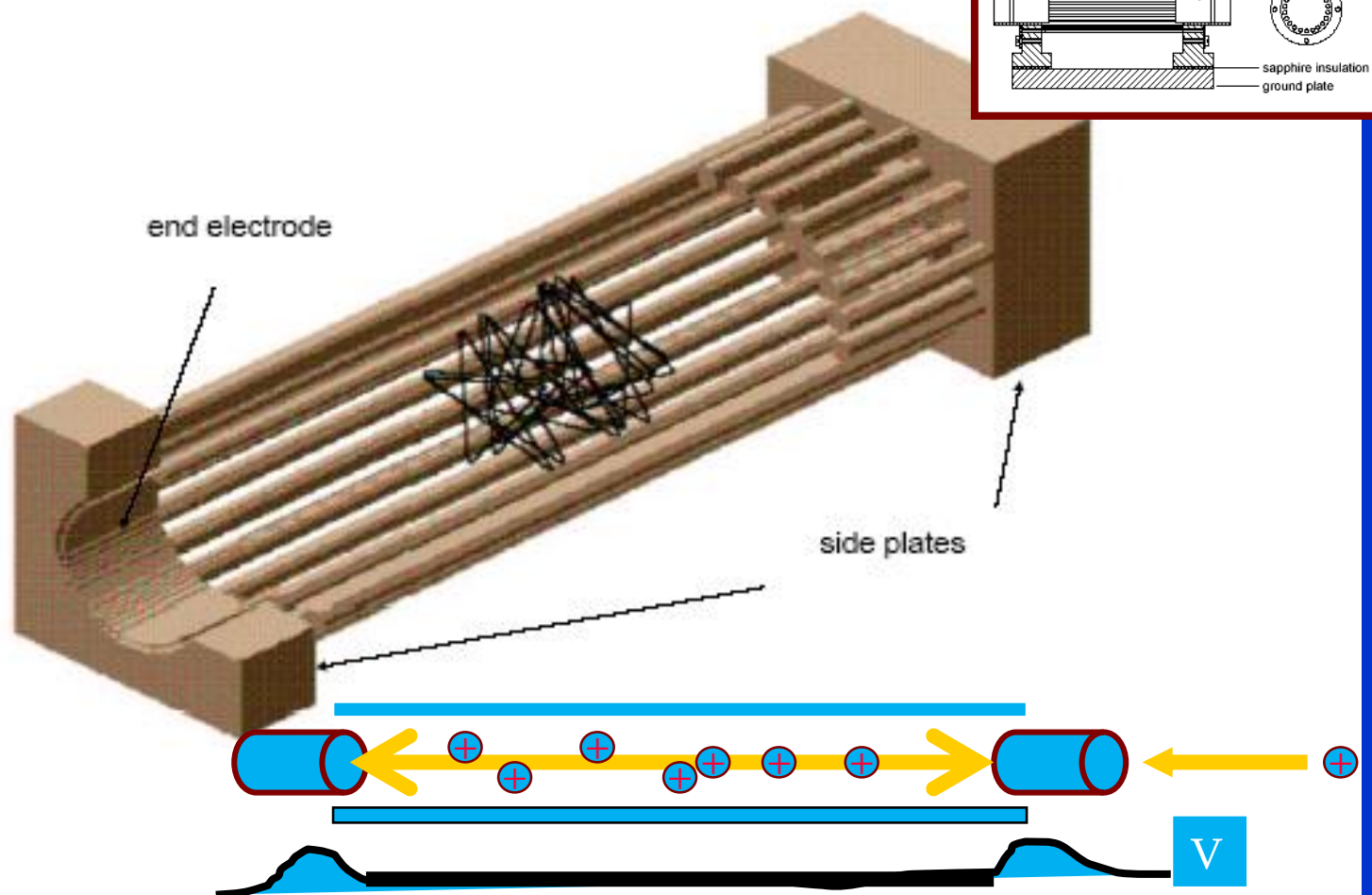
$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cos(\Omega t + \delta) + q\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$$



# 22-pole ion trap

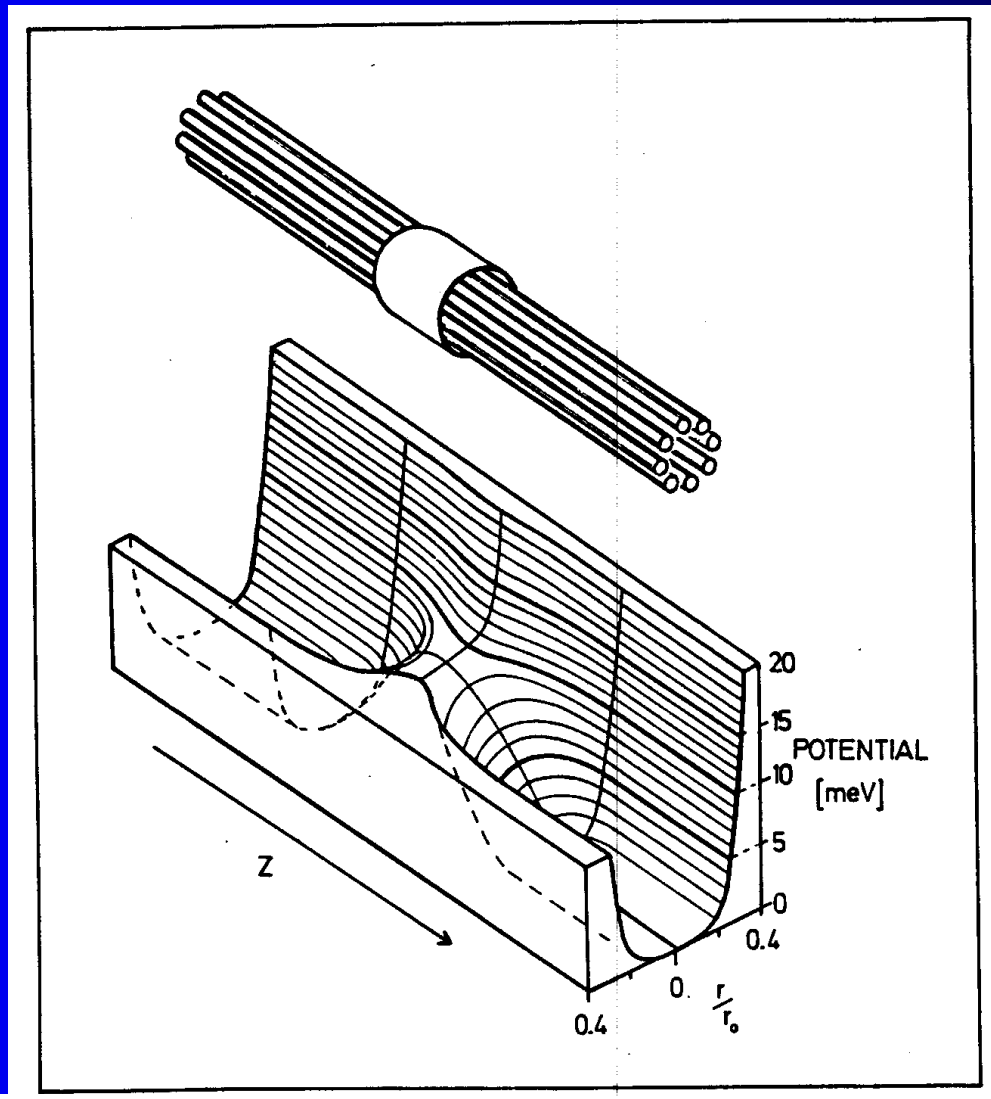


homogen



**Figure 10.13:** Three-dimensional numerical simulation of the trajectory of a singly charged ion (mass 3) in a 22-pole trap. RF parameters as above, static voltages at the end caps  $+0.1$  V, kinetic energy of the ion  $E_{\text{kin}} = 7.5$  meV ( $\sim 90$  K). For clarity, only part of the side plates are drawn and the upper rods and part of one of the side plates with the end electrode inside is cut away.

## 8-pole trap

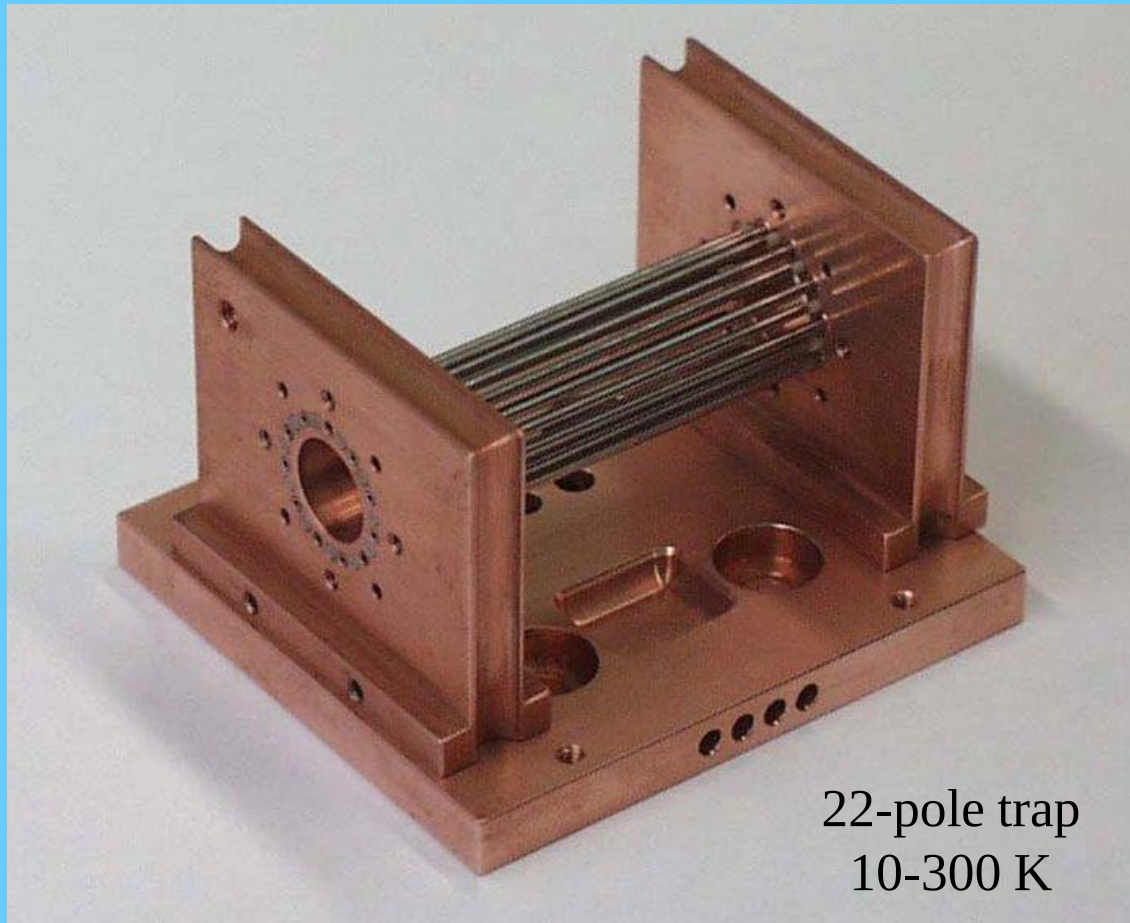


Effective potential  
8-pole trap

When we were still Barbarians



Ked' my sme ešte boli Barbari



22-pole trap  
10-300 K



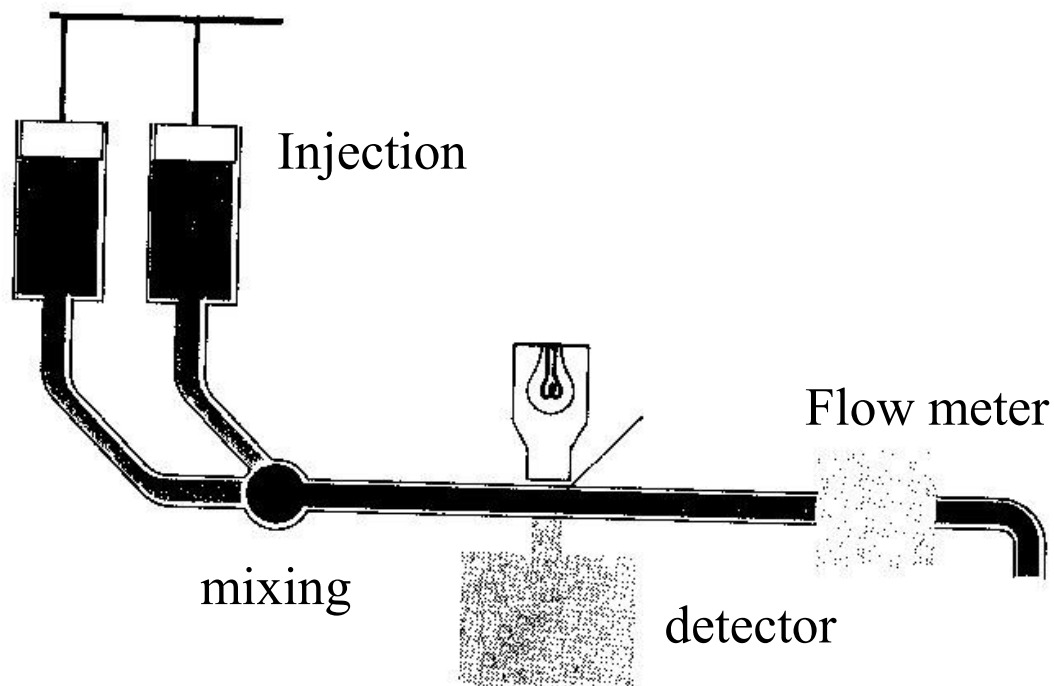
**Figure 3.3:** The 22-pole ion trap forms the central element of the new ion trap setup. It is mounted on a helium cryostat and can be cooled to temperatures between 8 – 300 K. The base plate of a 50 K thermoshield can be seen, which reduces the heat input on the trap housing caused by blackbody radiation. The 22 rf electrodes are surrounded by five electrostatic ring electrodes, which can be used to shift the stored ions inside the trap. Cylindrical endcaps are used to confine the ions in axial direction.

**Ion trap**

**EVERYDAY REALITY**

# Rate Law

- $\text{rate} = k[A]^x[B]^y$
- $\text{rate order} = x + y$
- knowledge of order can help control reaction
- rate must be experimentally determined



## FA– Flowing Afterglow principle

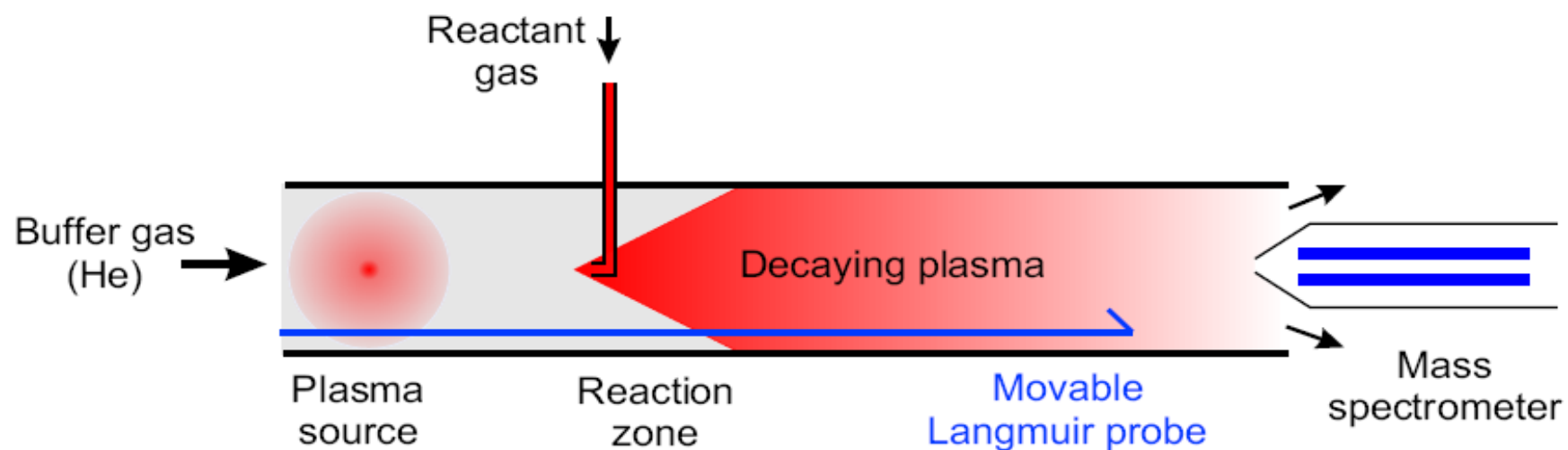
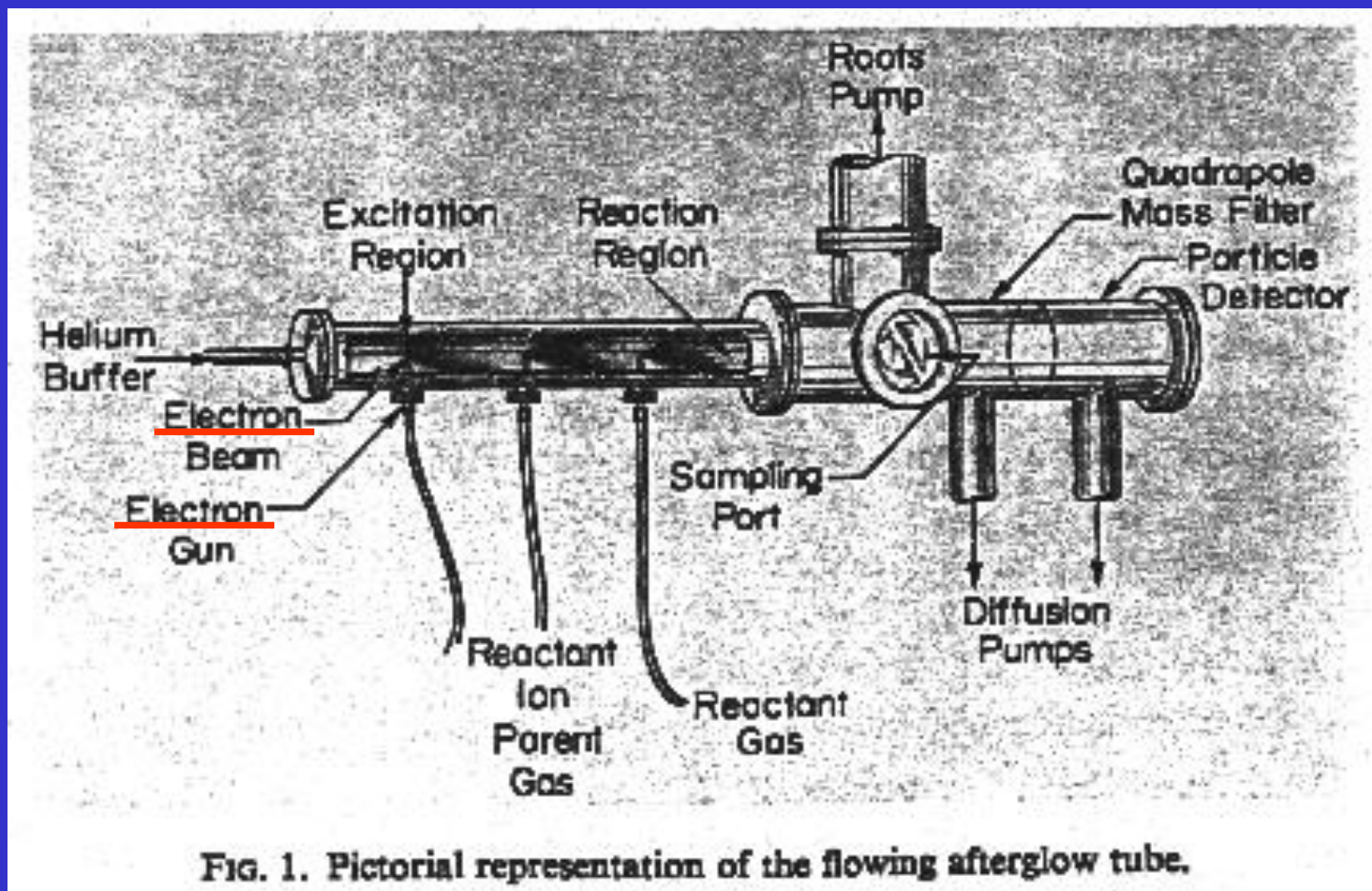


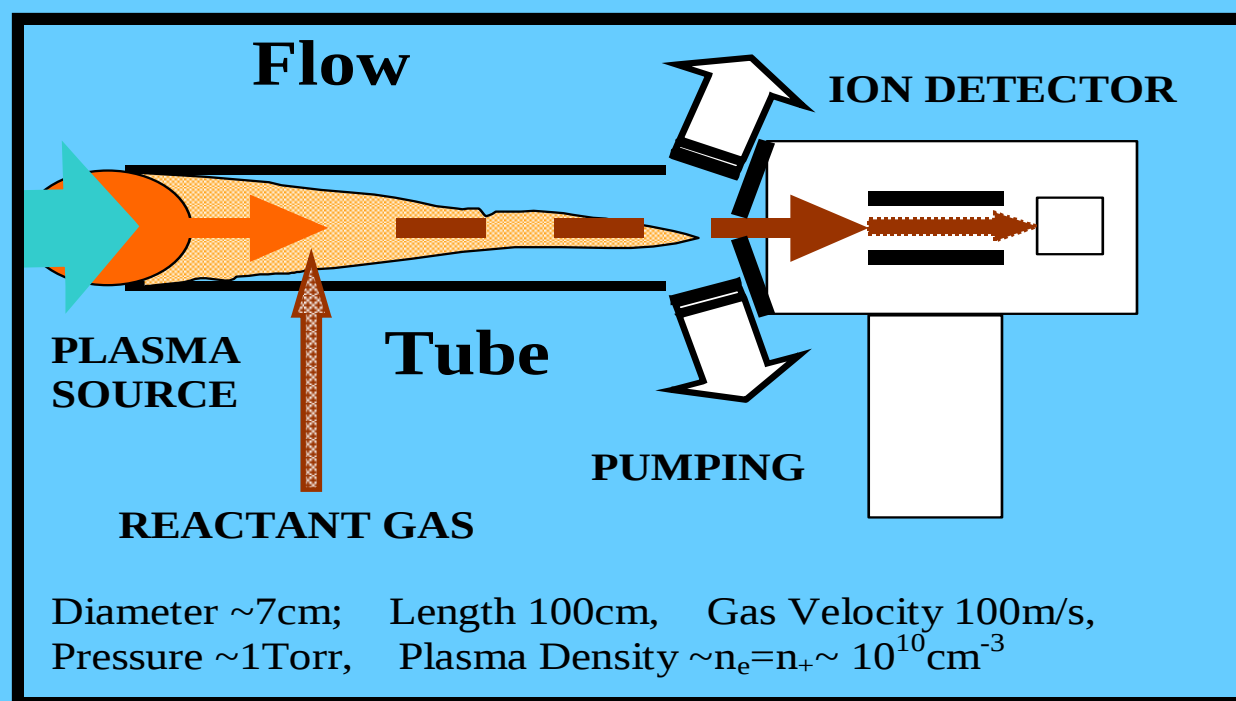
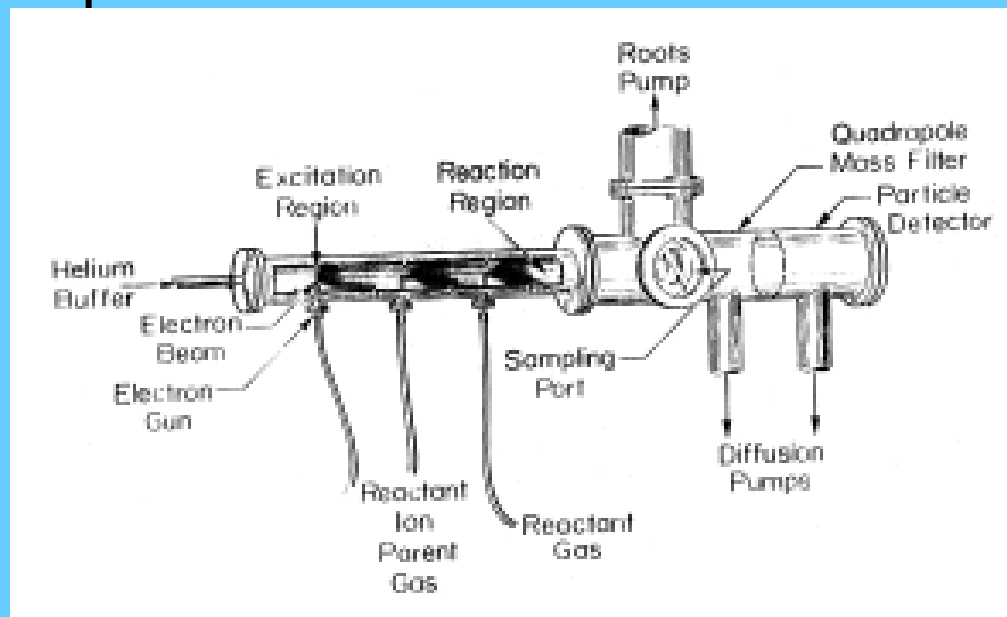
Figure 1.1: The basic principle of FA and FALP techniques.

# Techniques for study of IMR – FALP

## 1965



# Experimental studies of IMR → FA



# Techniques for study of IMR

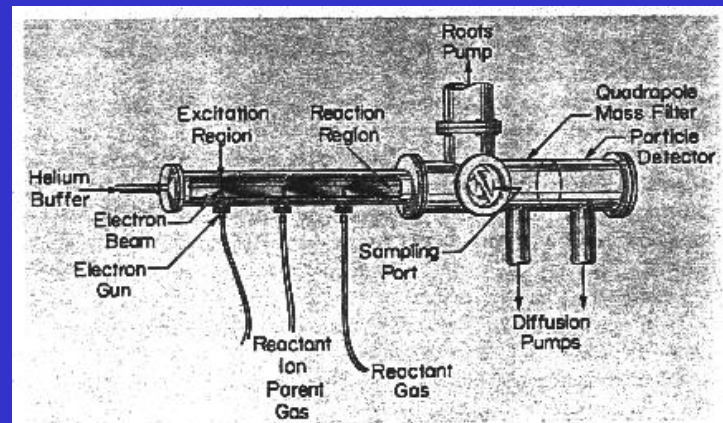
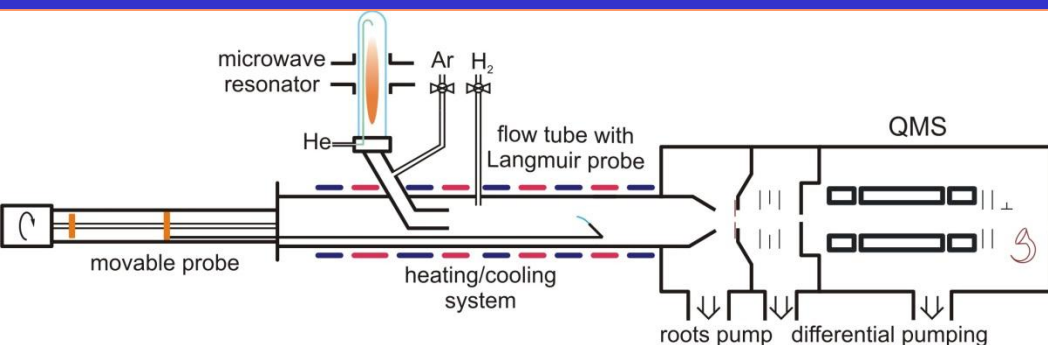
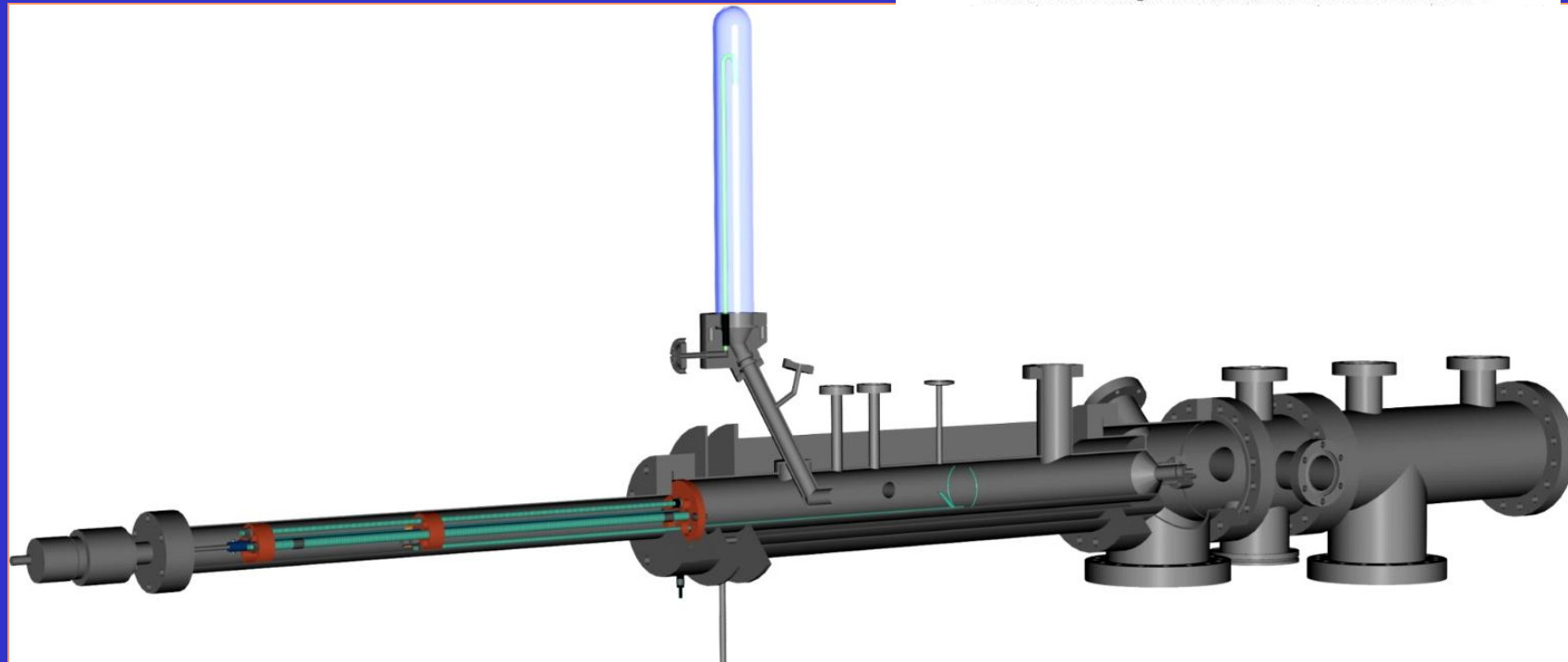
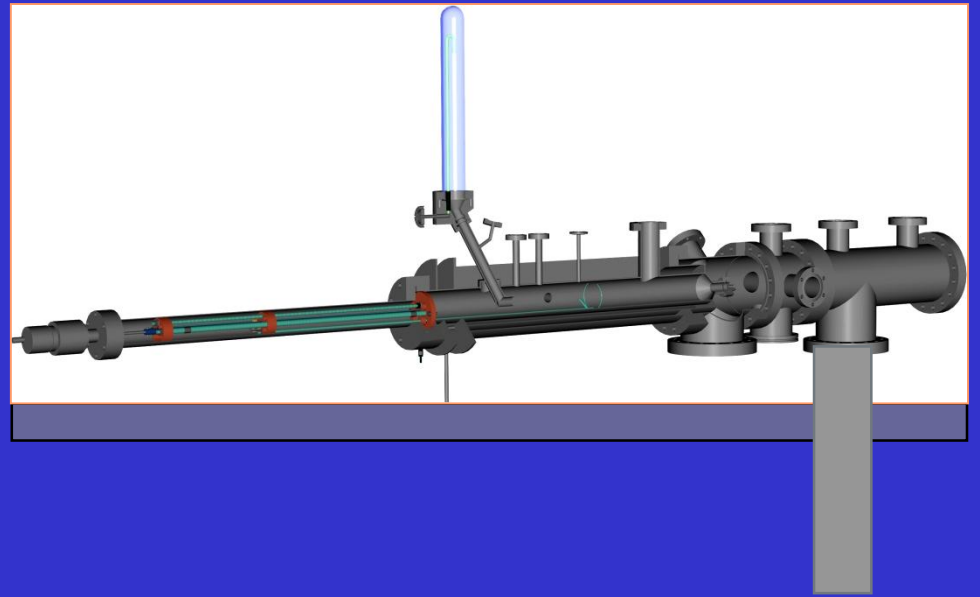
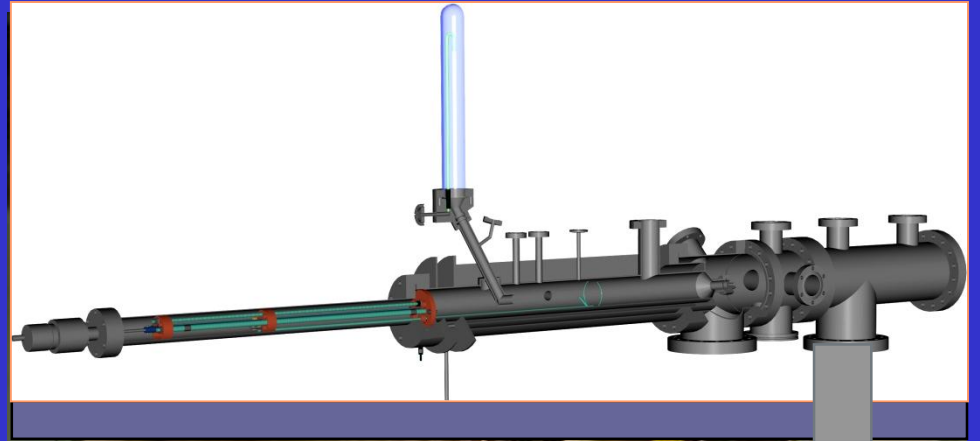
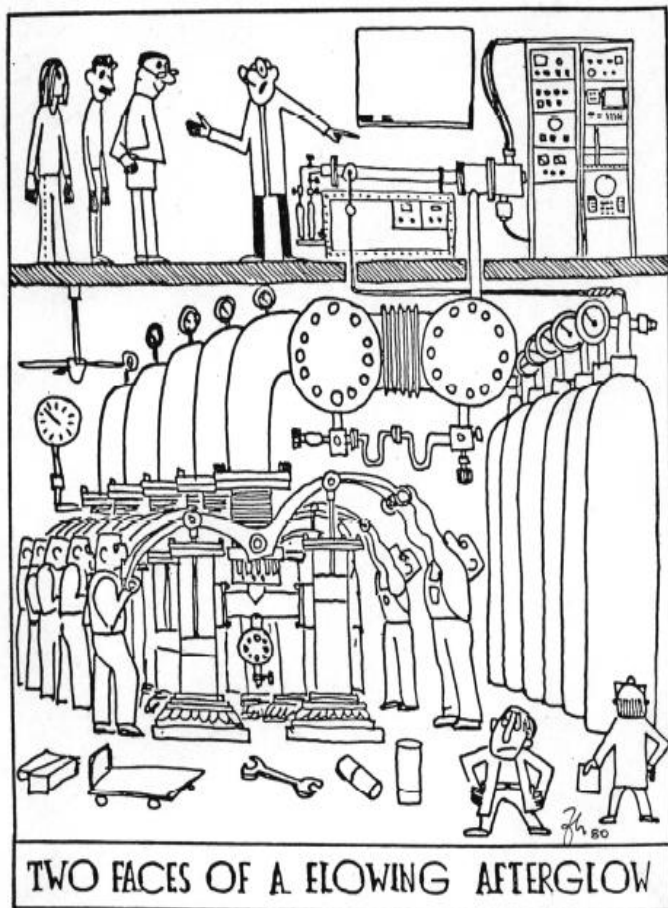


FIG. 1. Pictorial representation of the flowing afterglow tube.

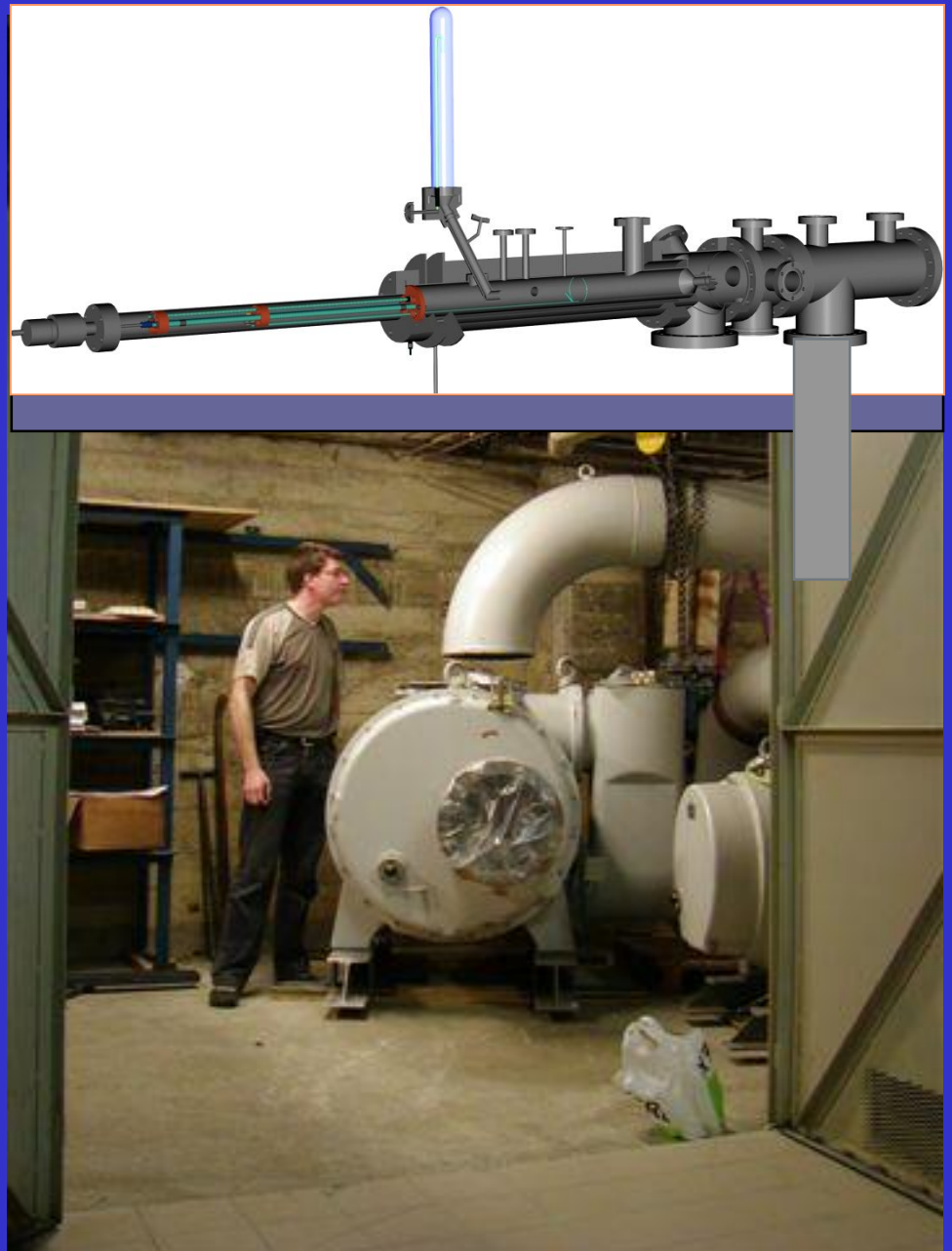








*Two faces of a flowing afterglow.*  
*(Opening picture to a seminar in Boulder, 1980)*



# Techniques for study of IMR

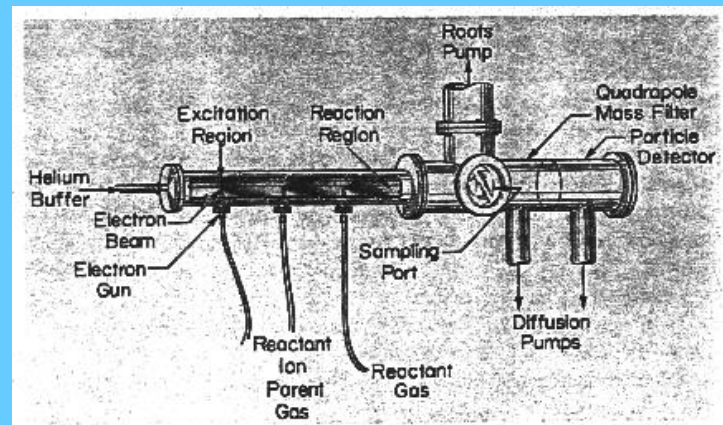
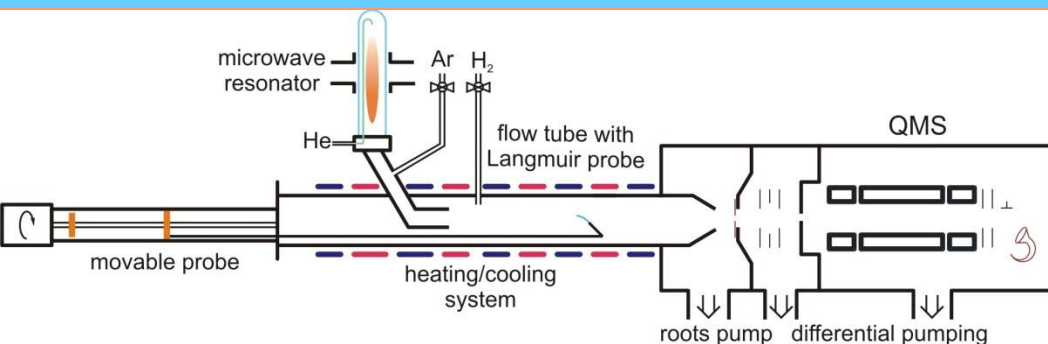
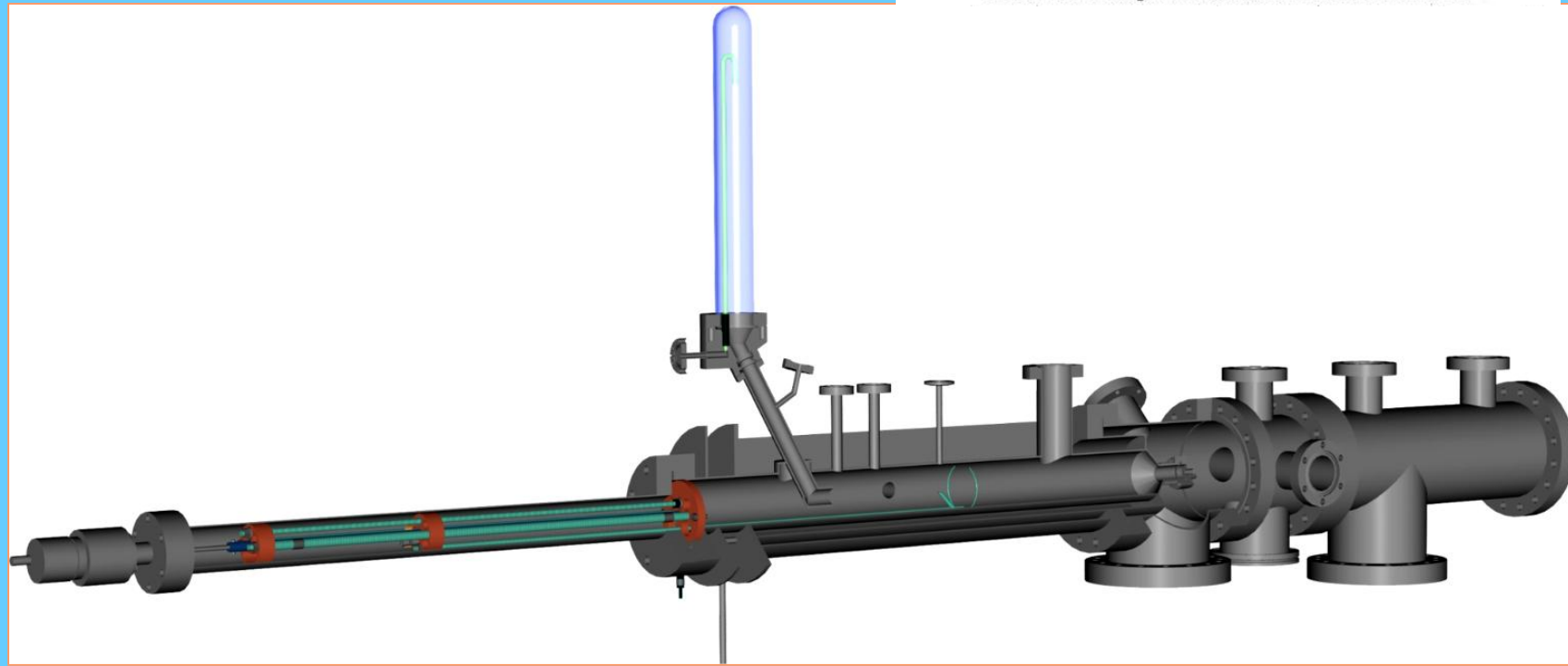
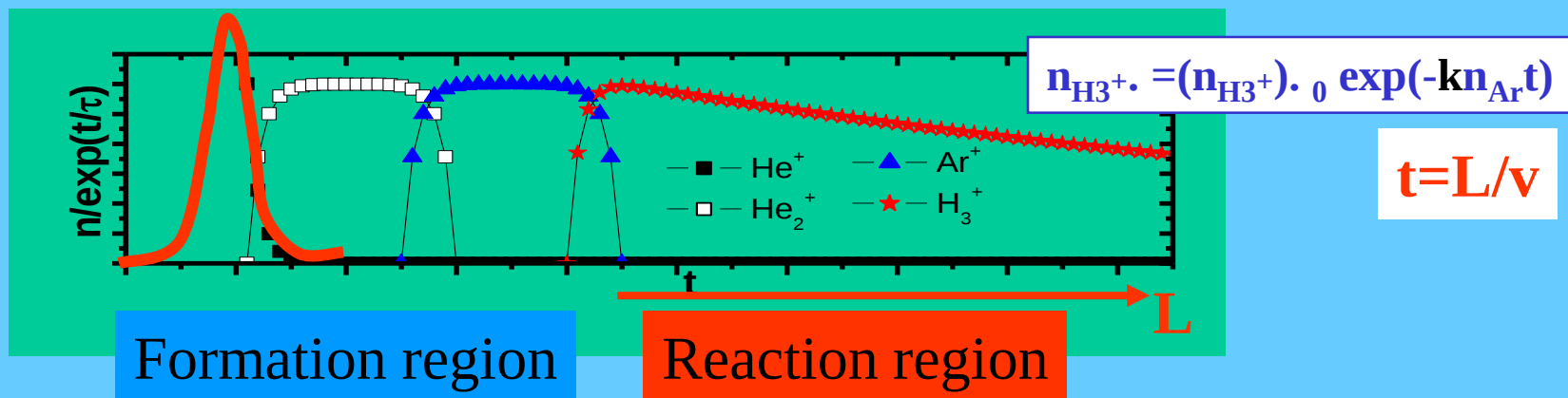
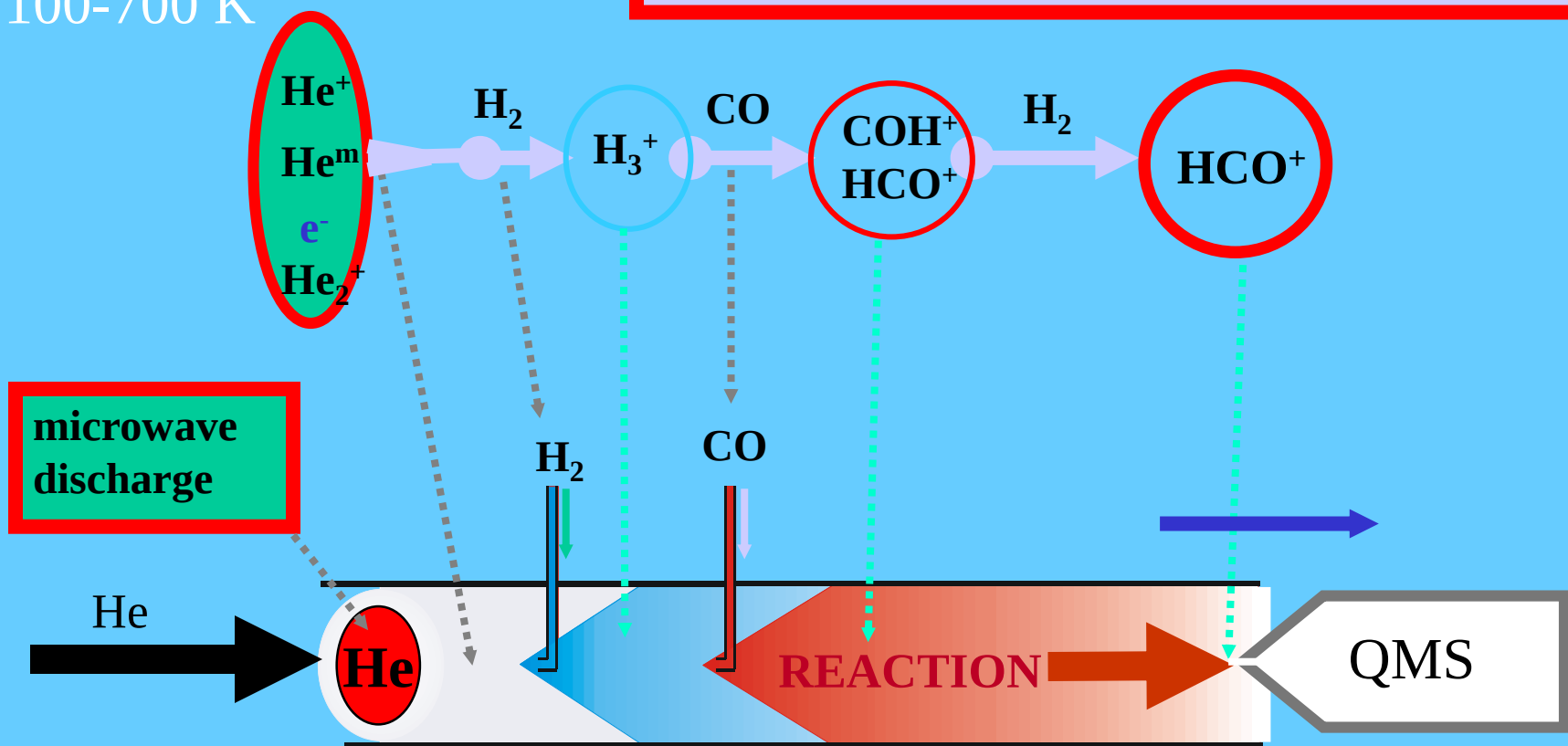
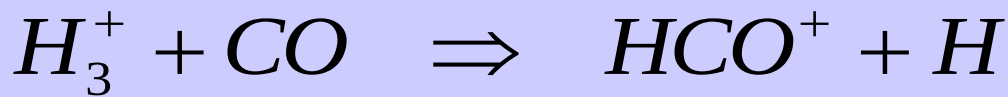


Fig. 1. Pictorial representation of the flowing afterglow tube.



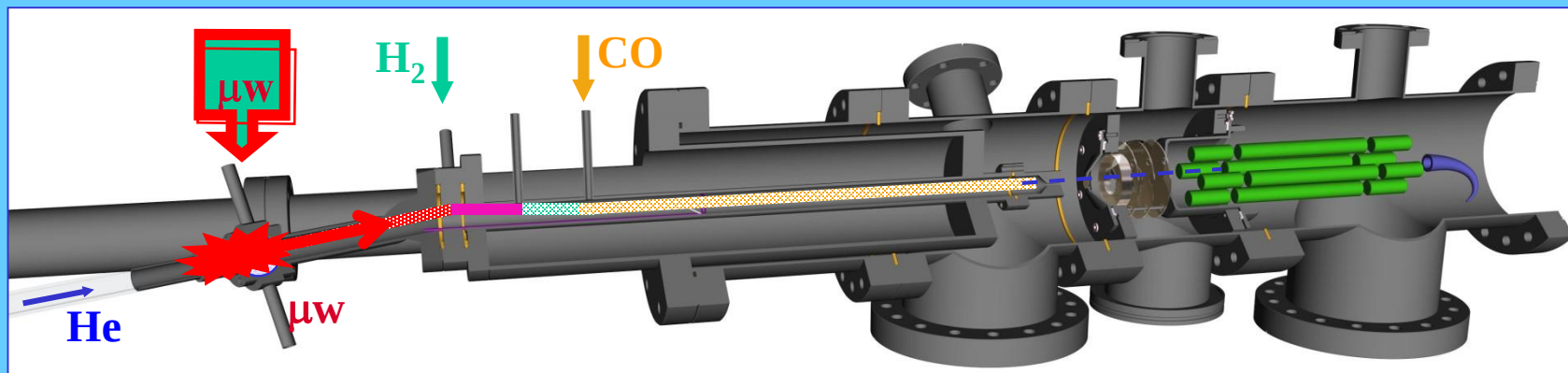
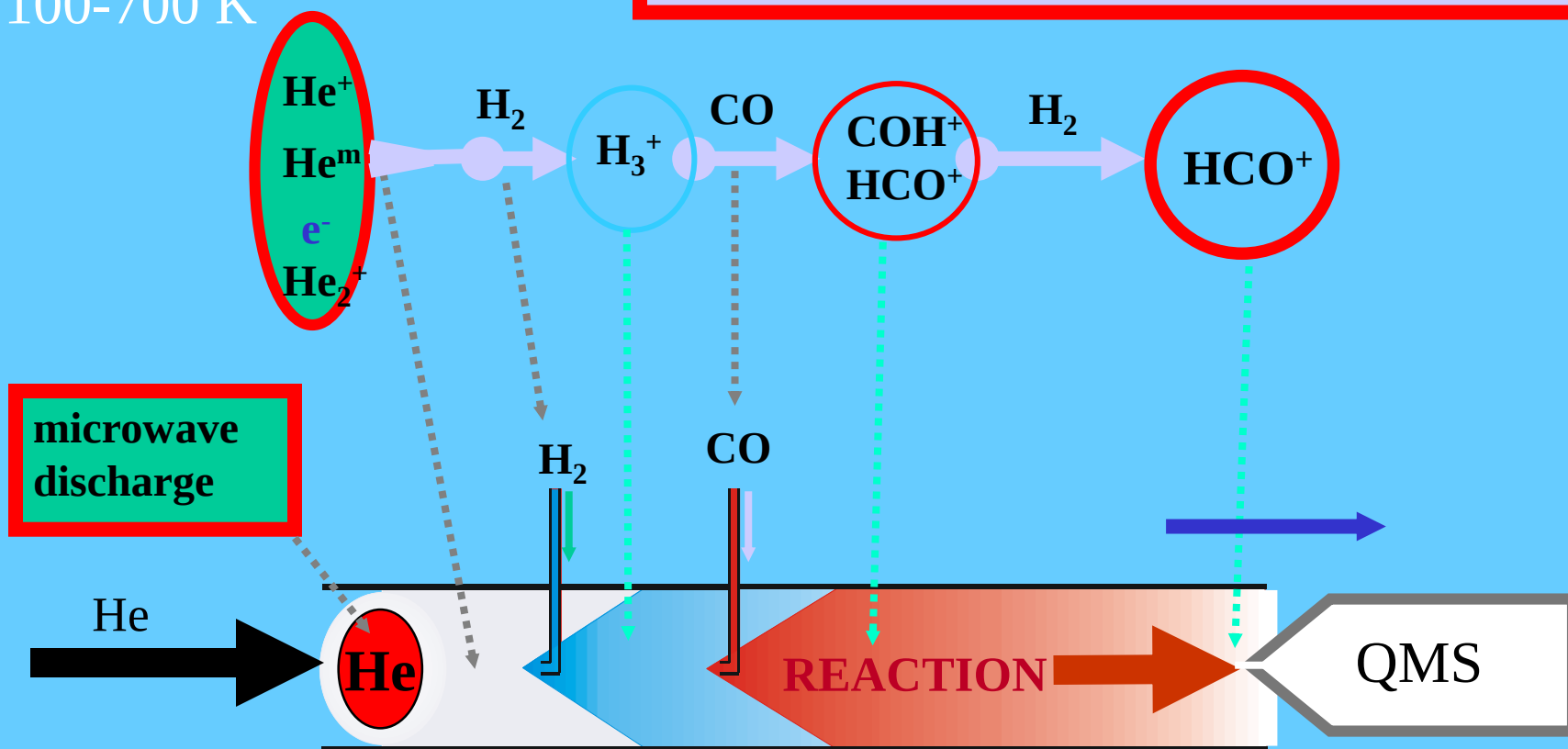
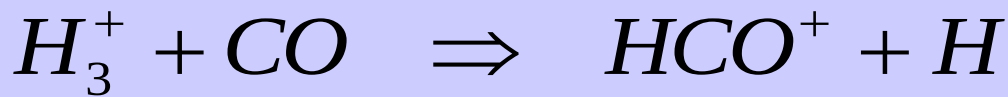
# FA–Flowing Afterglow

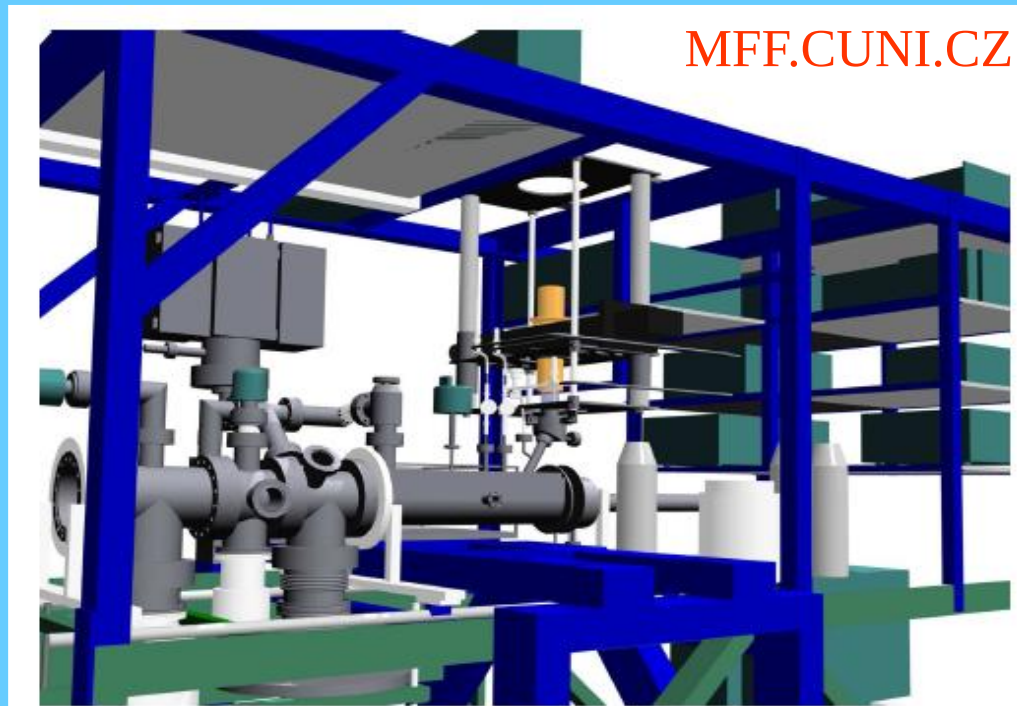
100–700 K

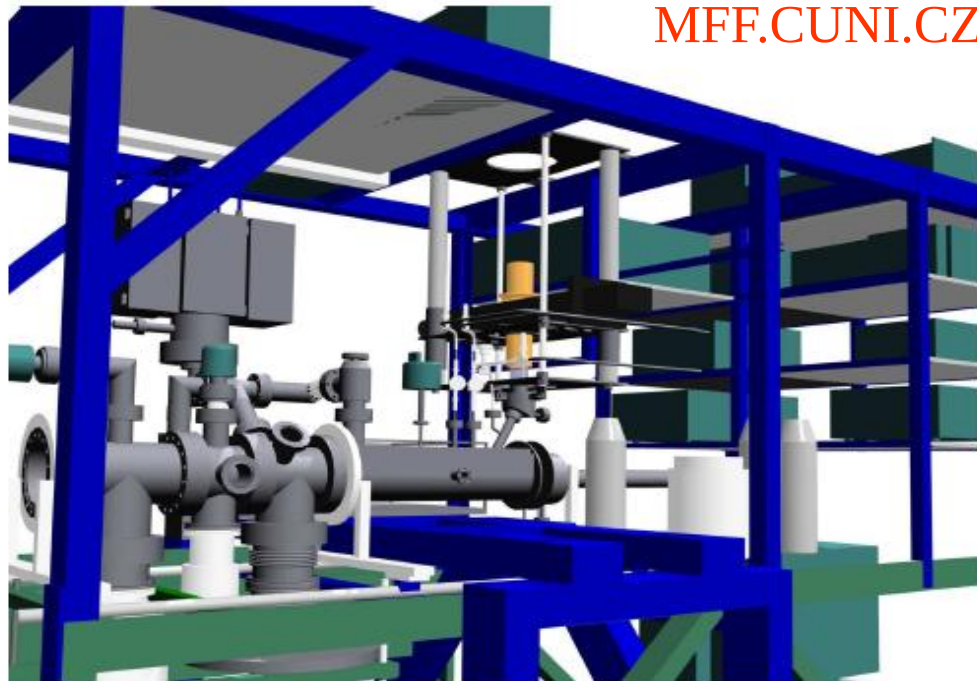


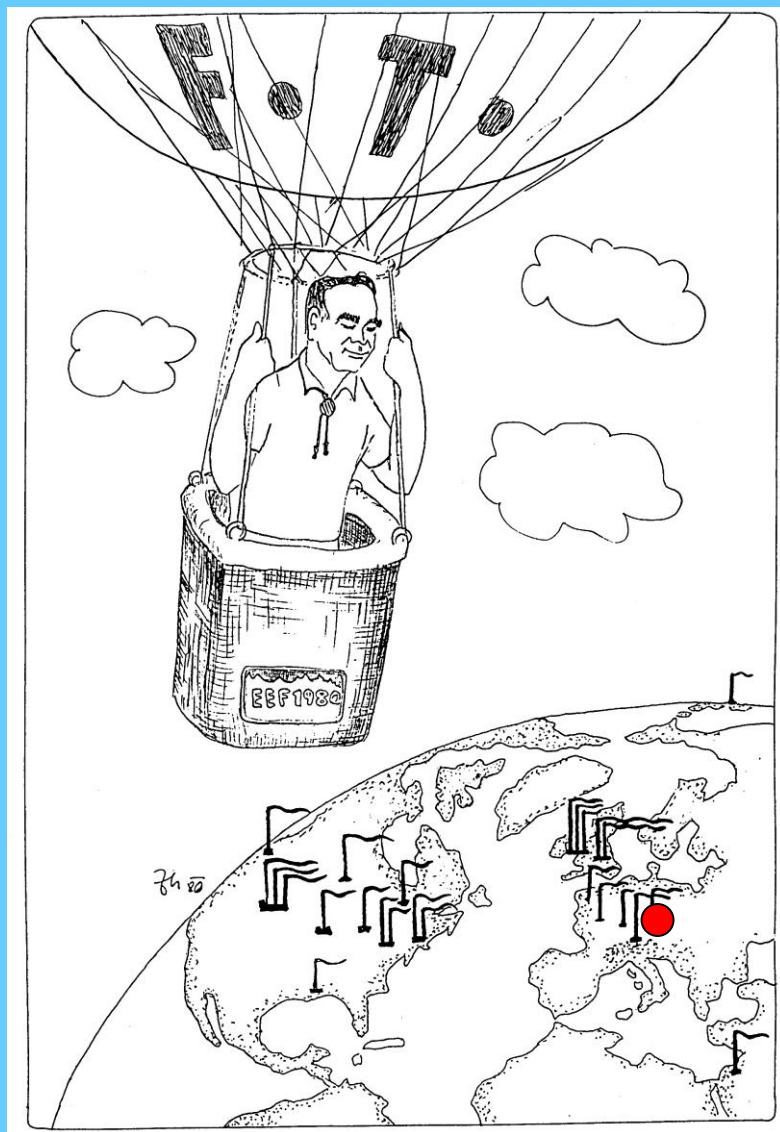
# FA–Flowing Afterglow

100–700 K

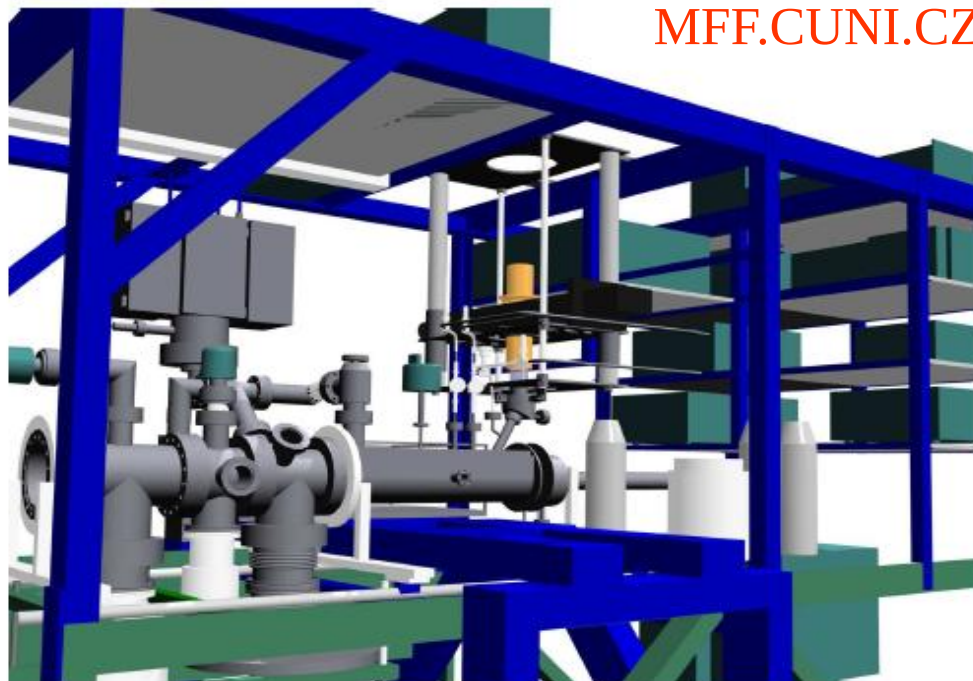


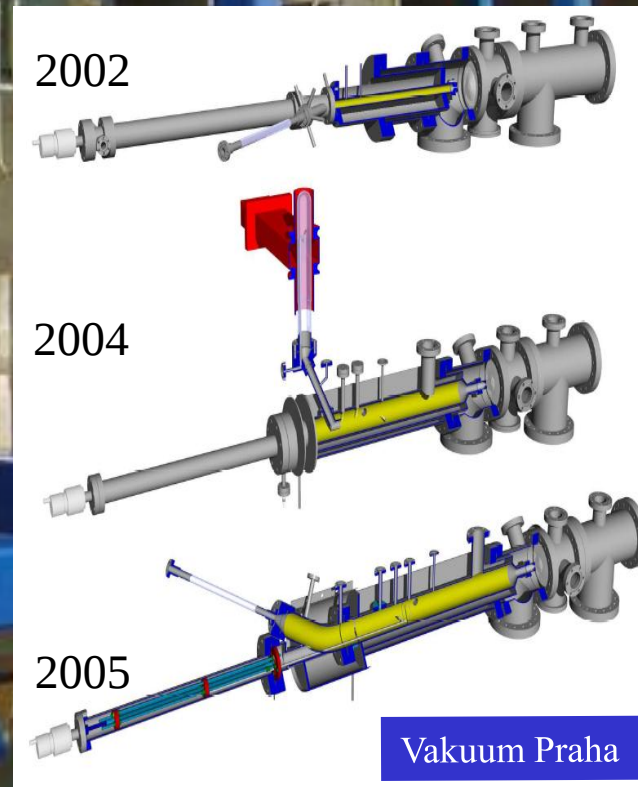
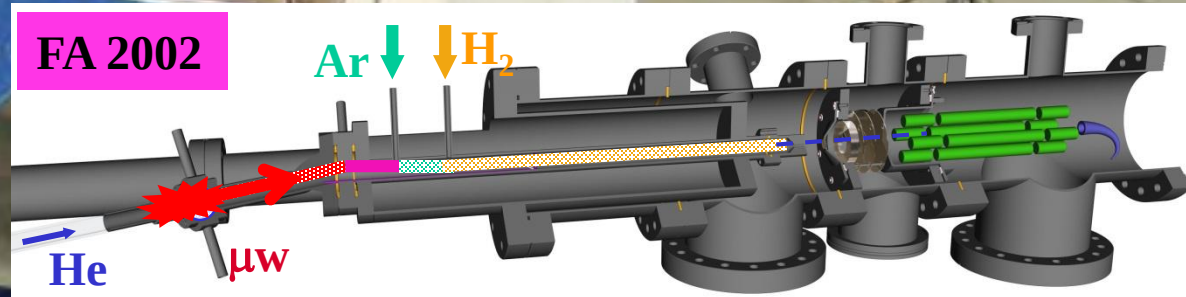




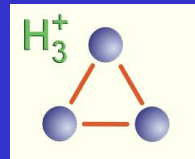


CU – Chemistry 1980:  
*Eldon Ferguson watching the flow-tube centers*

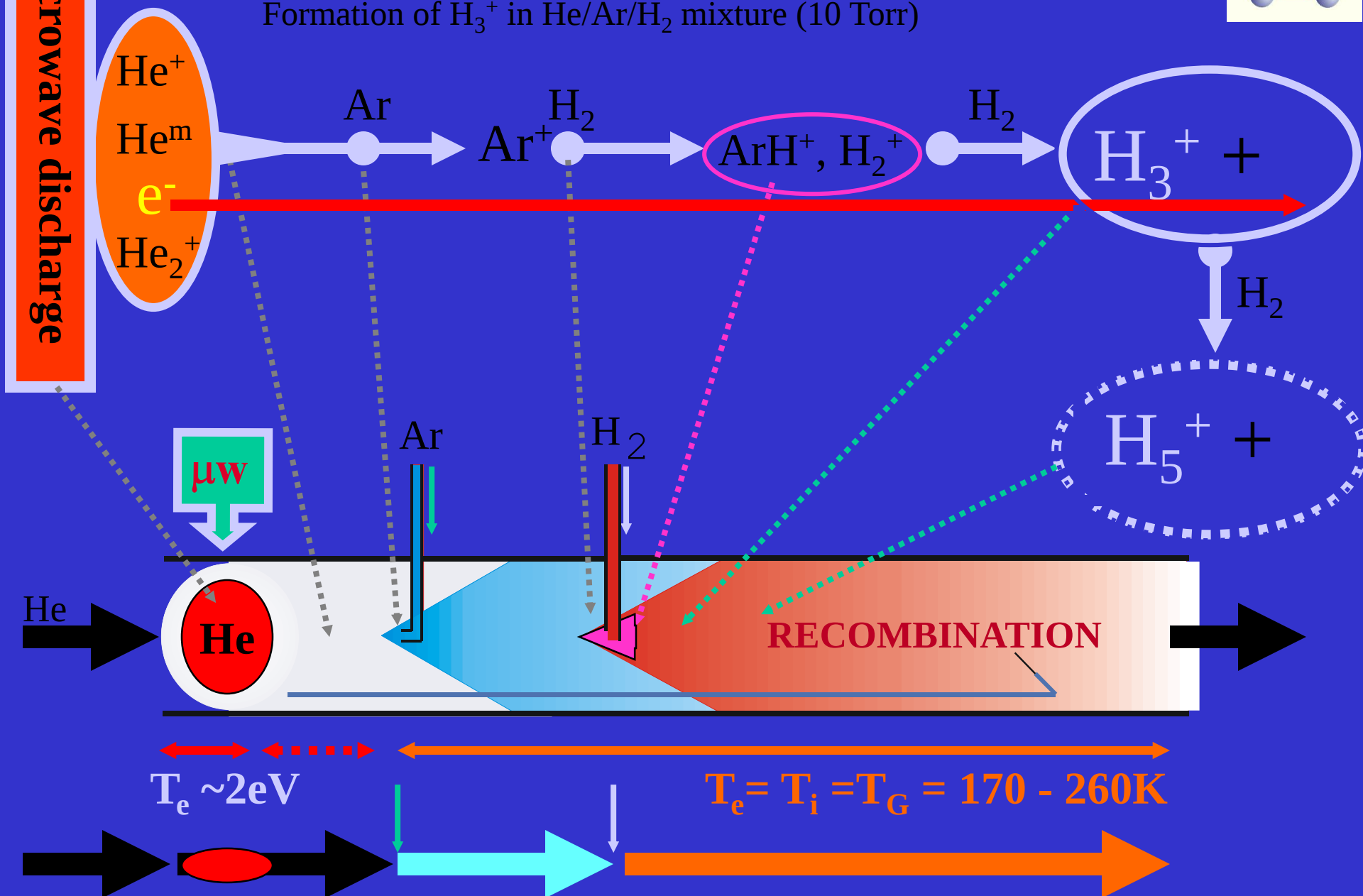




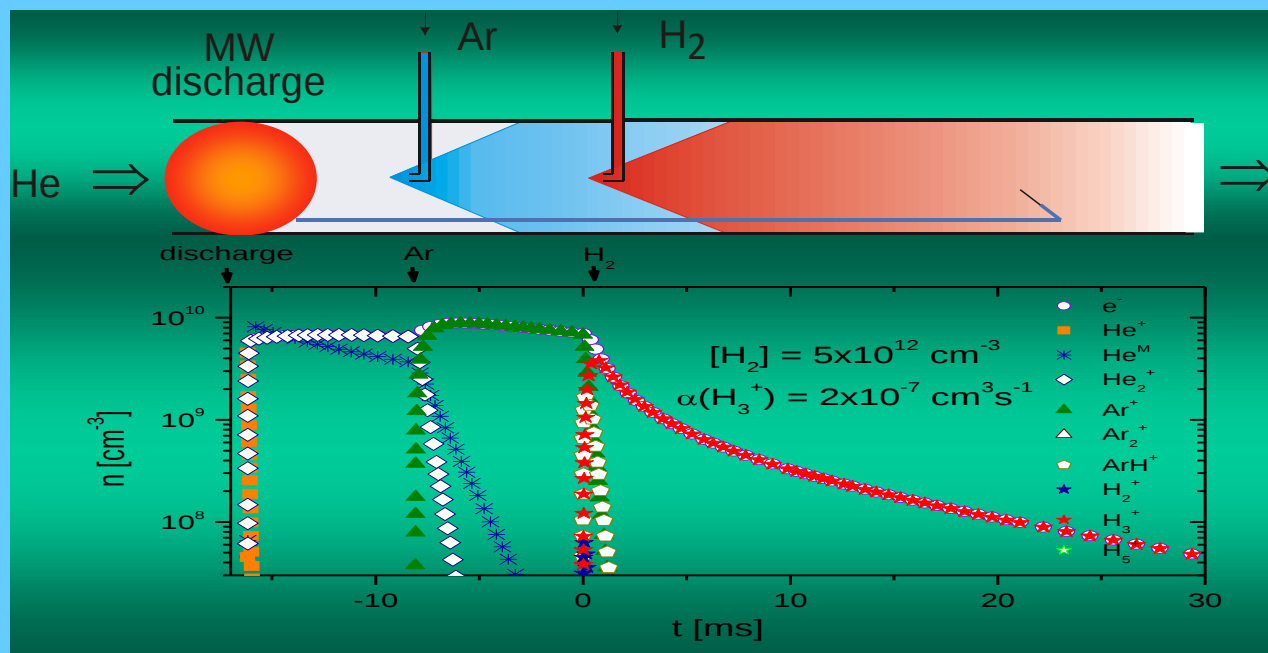
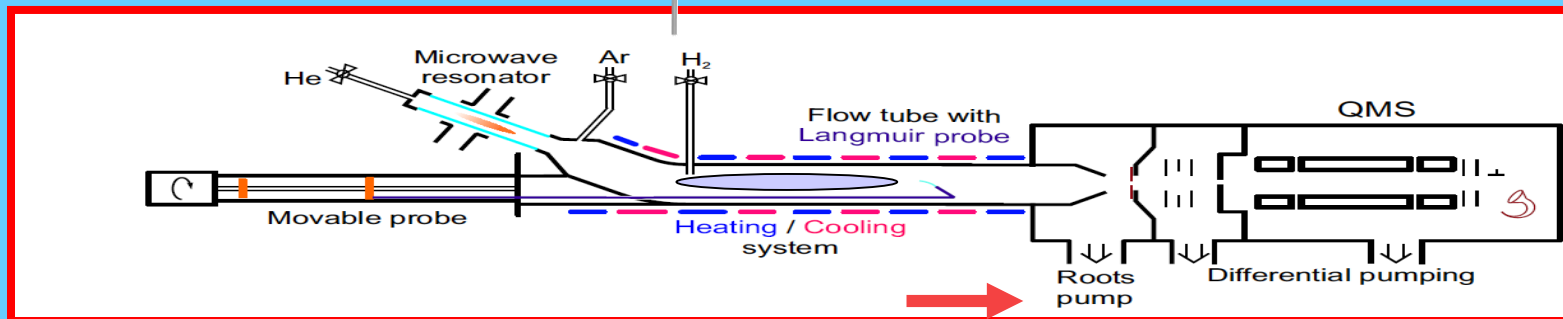
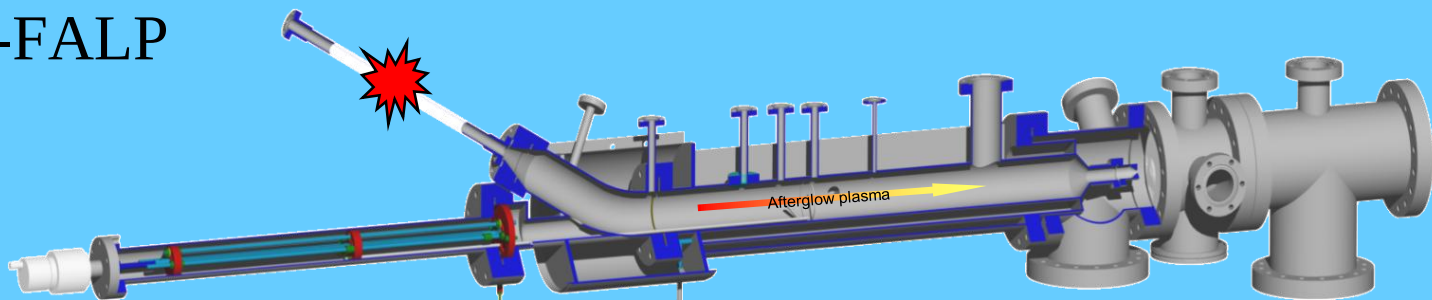
# Principle of Flowing Afterglow Langmuir Probe - FALP



Formation of  $\text{H}_3^+$  in He/Ar/ $\text{H}_2$  mixture (10 Torr)



# Apparatus -FALP



## Kinetics

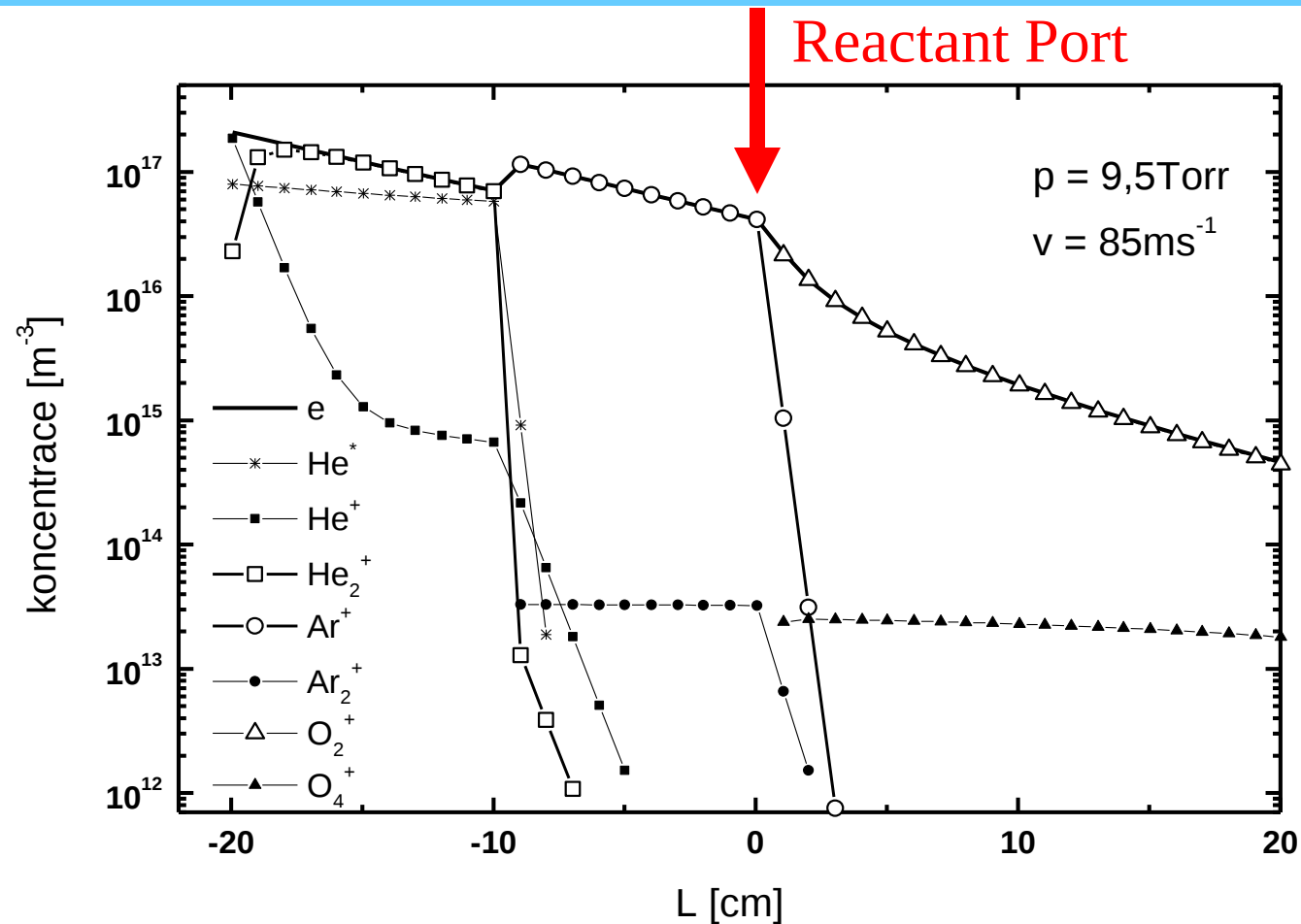
$$\alpha \sim 5 \times 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

Plasma decay can be monitored up to 35 cm  $\rightarrow$  65 ms, Temperature – 130 - 300 K Pressure up to 12 Torr

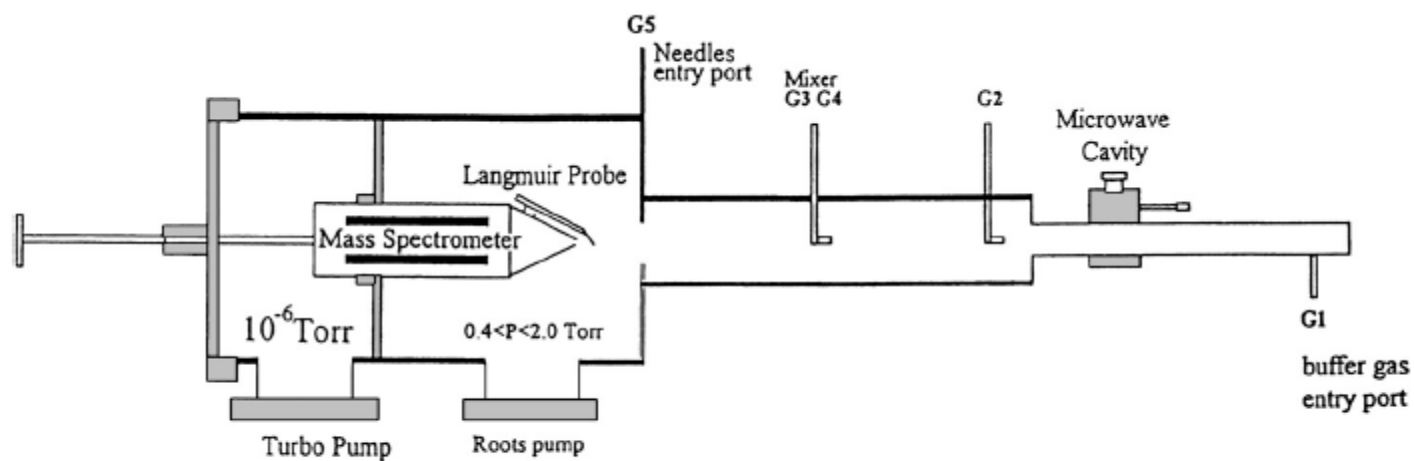
# Evolution along the flow tube

$$[A^+]_L = [A^+]_{L=0} \cdot e^{-DL / \lambda^2 v}$$

$$[A^+]_L = [A^+]_{L=0} \cdot e^{-const_1 \cdot D_0 p_0 L / Q} = [A^+]_{L=0} \cdot e^{-const_2 \cdot L / Q}$$



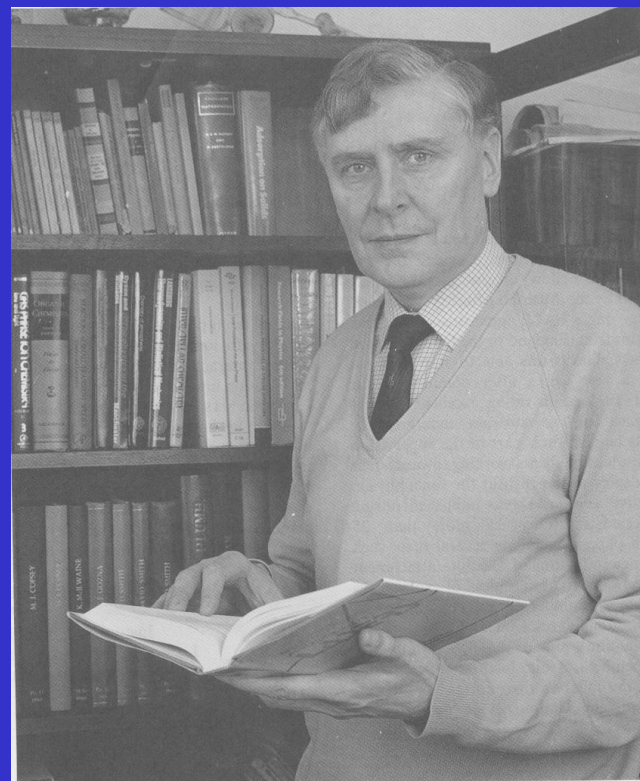
## Ion-molecule reactions



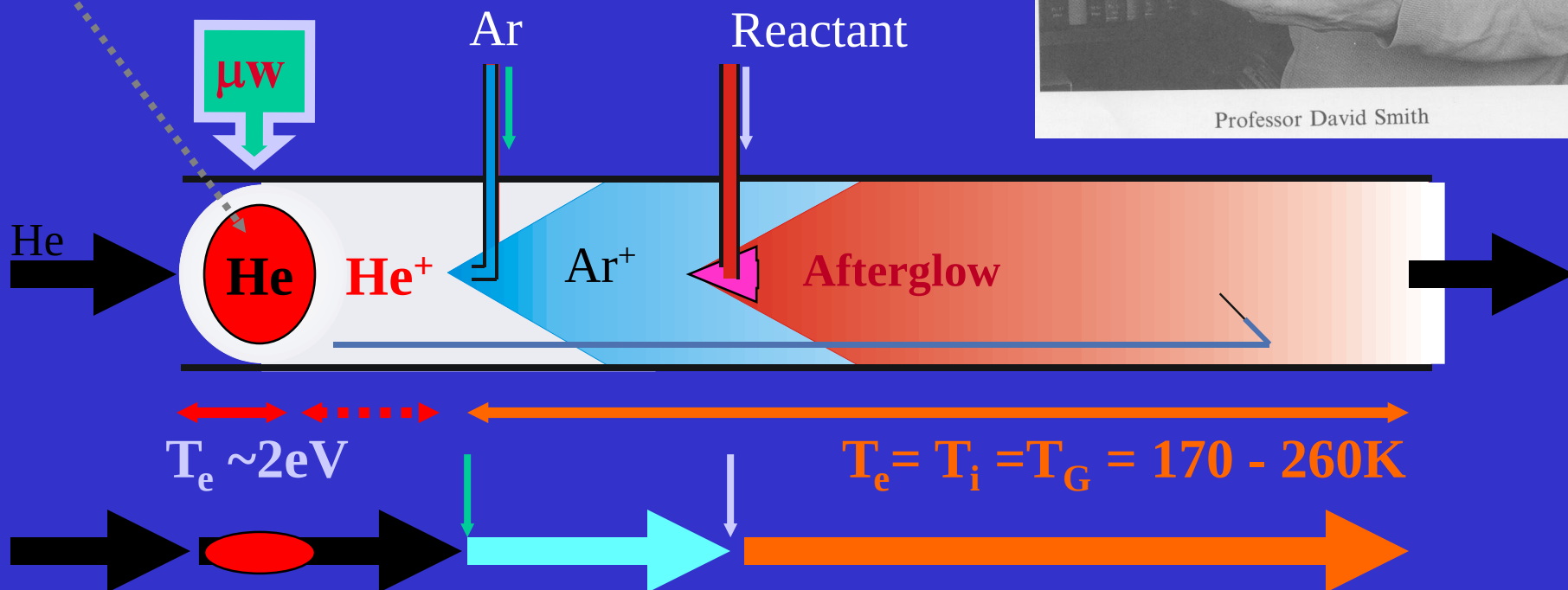
**Fig. 12.** Schematic view of the Rennes FALP-MS [164]

# Flowing Afterglow 1968

microwave discharge



Professor David Smith



# FALP example

$$(3.102) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla_r \left( \ln \frac{n}{T^{3/2}} \right) + \frac{m}{2kT} \frac{v^2}{T} \mathbf{v} \cdot \nabla_r T - \frac{\mathbf{F}}{kT} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách  $v$  nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

$$(3.103) \quad \nabla_r T = 0$$

a

$$(3.104) \quad \nabla_r \left( \ln \frac{n}{T^{3/2}} \right) - \frac{\mathbf{F}}{kT} = 0.$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

$$(3.105) \quad \mathbf{F} = kT \nabla_r \left( \ln \frac{n}{T^{3/2}} \right).$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako  $\Phi$  ( $\mathbf{F} = -\nabla_r \Phi$ ), pak

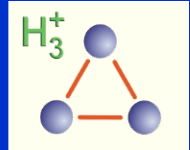
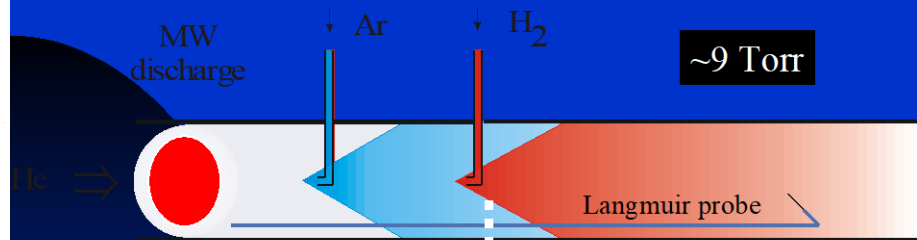
$$(3.106) \quad \Phi = -kT \ln n + \text{konst}$$

a pro koncentraci dostáváme

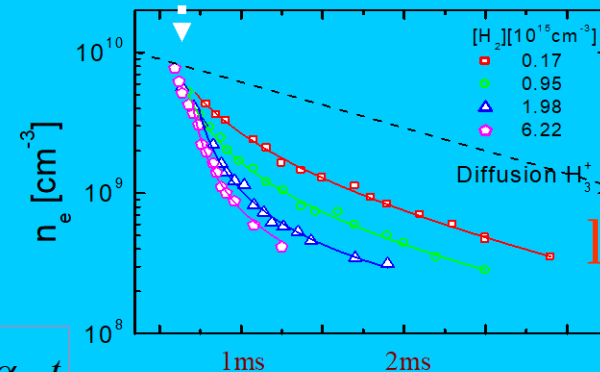
$$(3.107) \quad n = n_0 \exp \left( -\frac{\Phi}{kT} \right),$$

- Summarize what is expected of the participants.
- TO UNDERSTAND THE PROBLEM

DECAY OF PLASMA -  $\text{H}_3^+$  and  $\text{H}_5^+$  in thermodynamic equilibrium



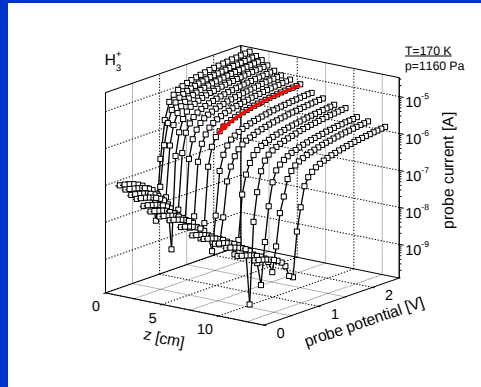
190 K, 9 Torr



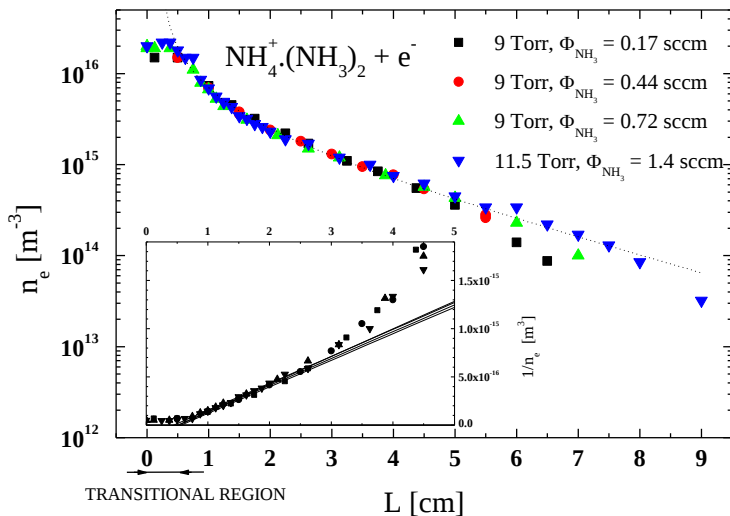
$$\frac{1}{n_e(t)} = \frac{1}{n_e(t)} + \alpha_{\text{eff}} t$$

Note very different time scale!!!

# Plasma parameters along the flow tube



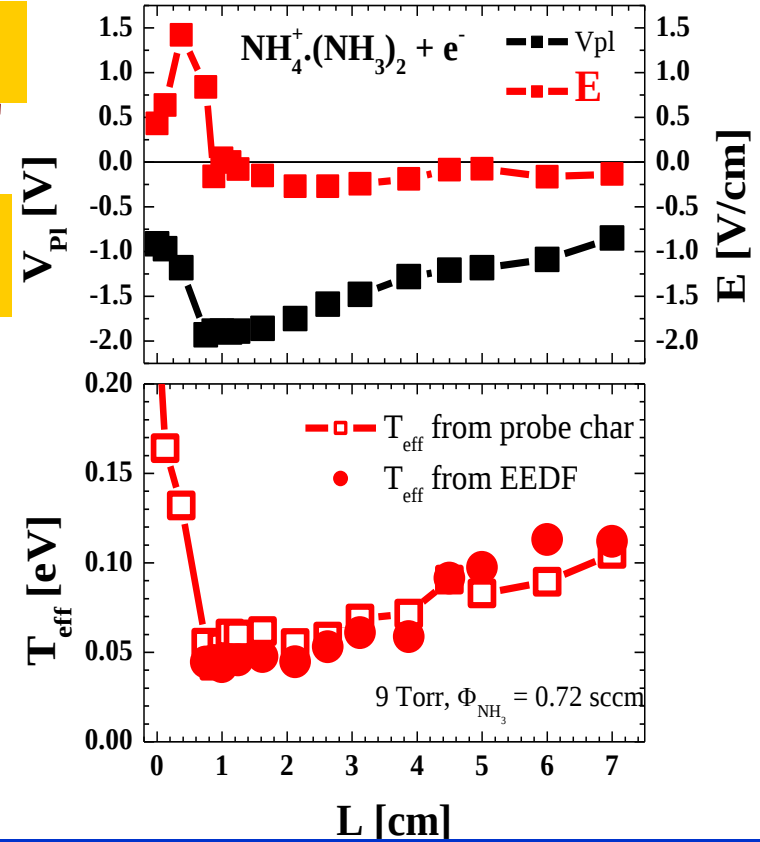
$n_e$



$\vec{E}$

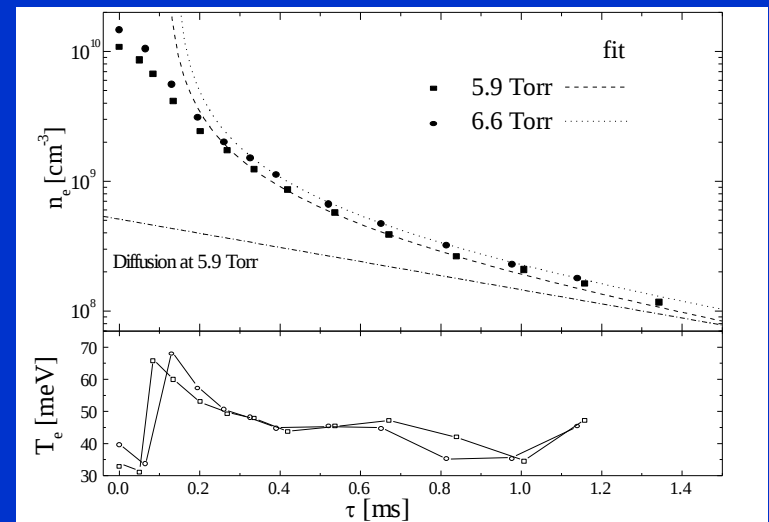
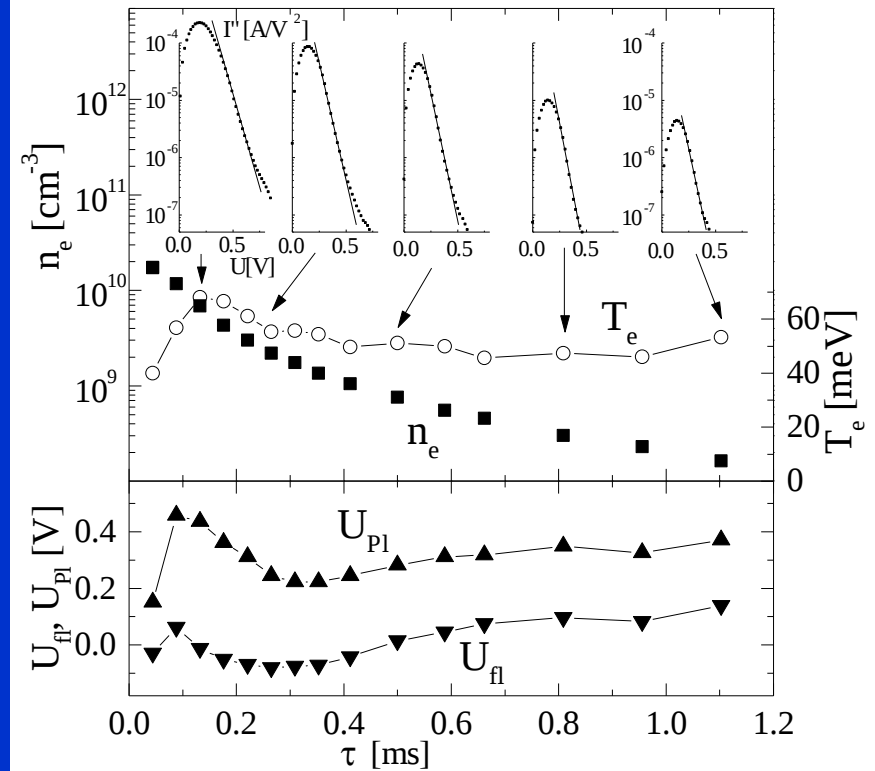
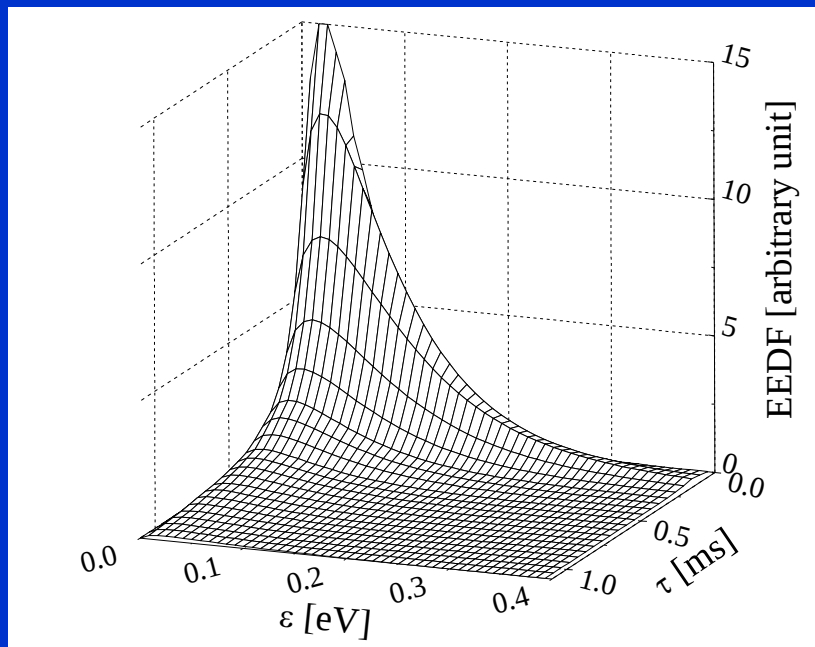
$V_P$

$T_e$



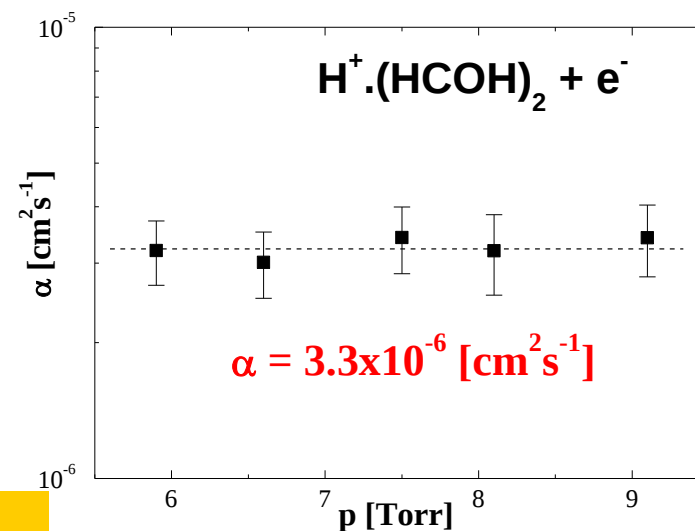
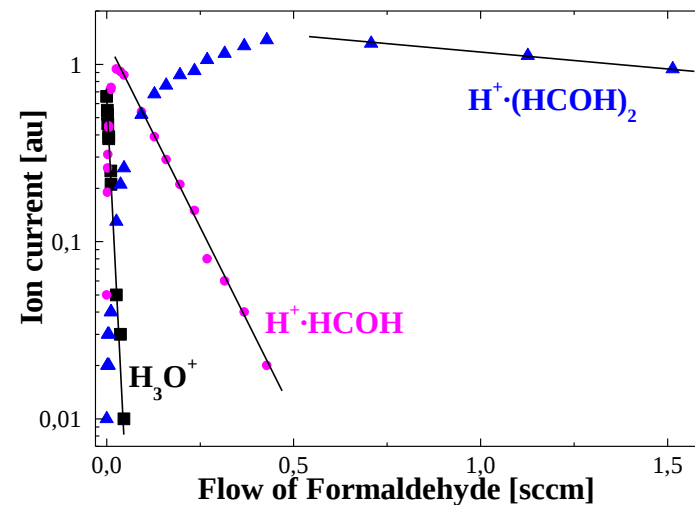
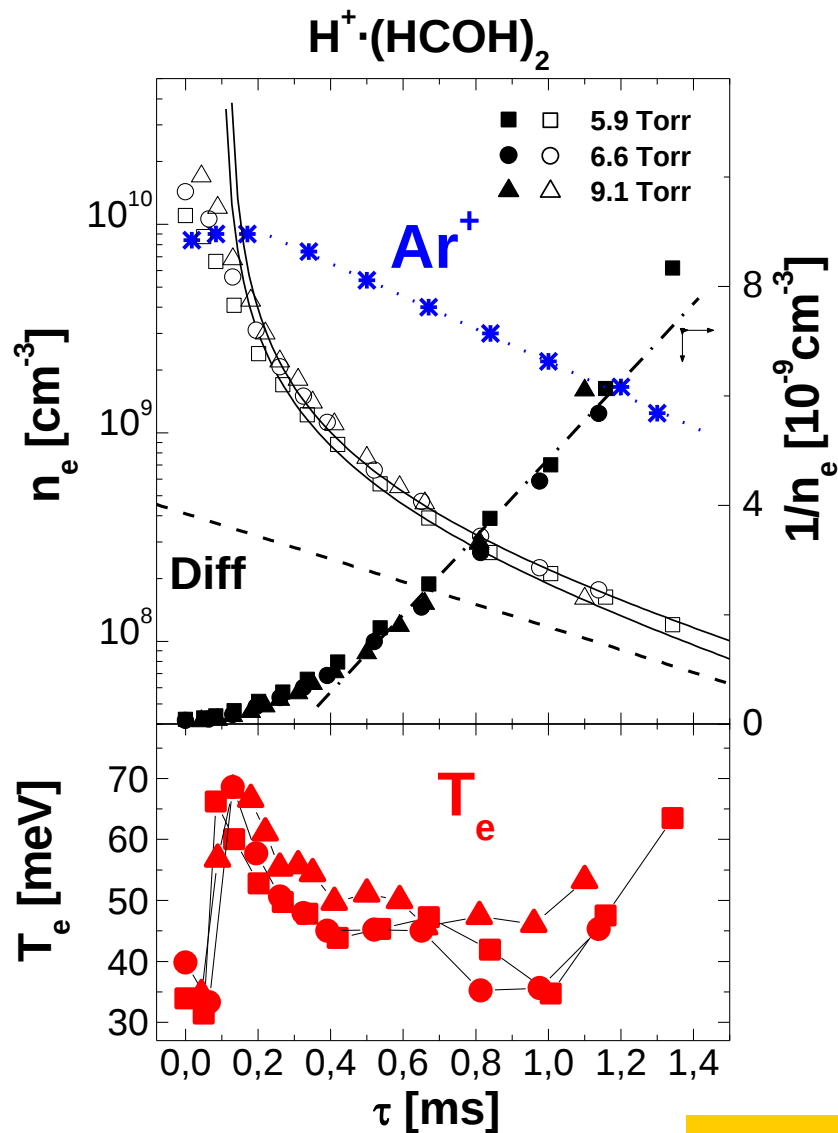
He buffer gas

# EEDF measurements



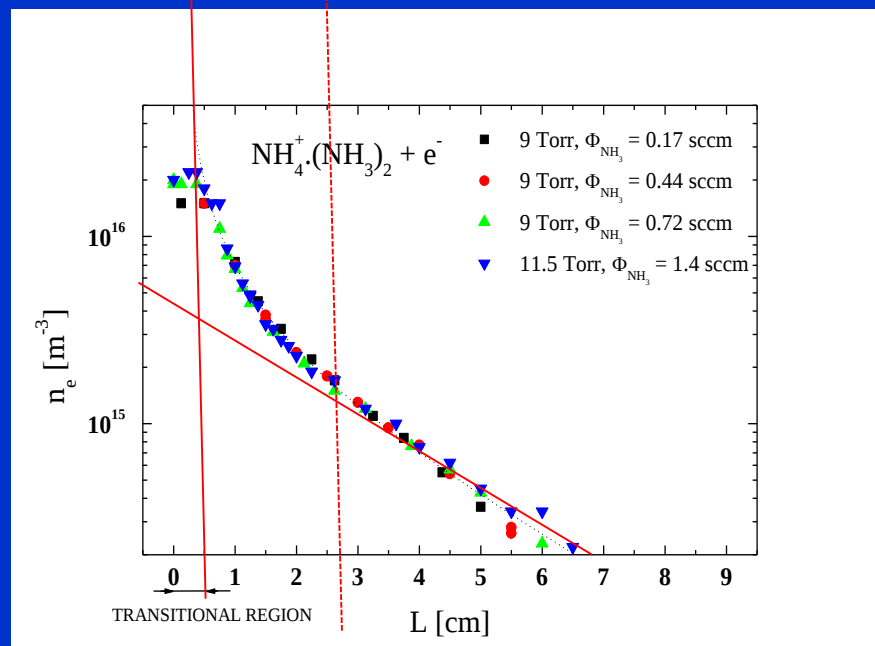
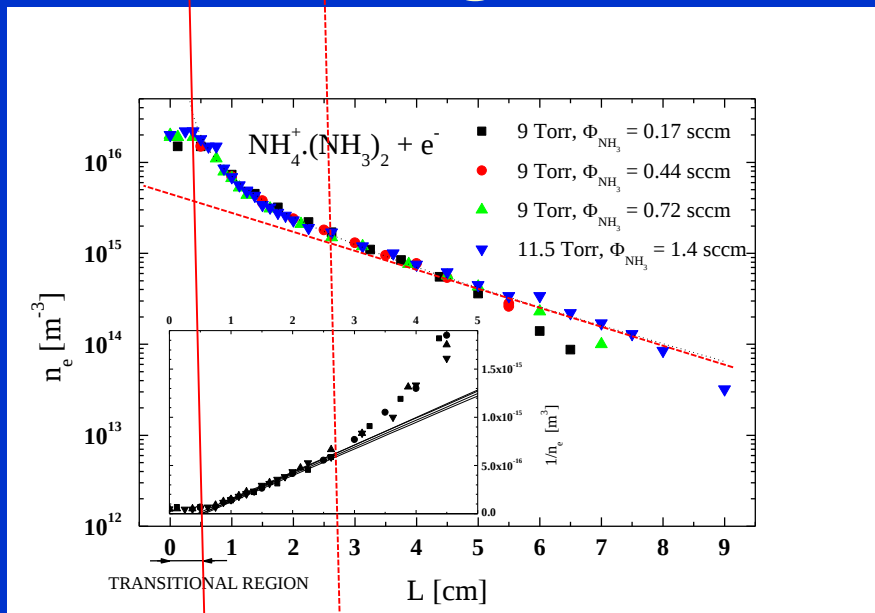
The time evolution of the EEDF in the recombination dominated FA plasma  
 In He ( $p=9$  Torr) with small admixture of HCOH (0.05 %).  
 EEDF is normalized to the electron number density.

# Recombination of $\text{H}^+(\text{HCOH})_2 + \text{e}^-$



He buffer

# Plasma parameters along the flow tube



# Maxwell's distribution function

Sledujme nyní, jak vvpadá rovnovážný stav systému za přítomnosti magnetického pole. Jak jsme již uvedli, je síla, způsobená tímto polem, úměrná výrazu  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . V rovnici (3.96) je poslední člen na pravé straně nyní nutno nahradit členem

$$(3.109) \quad \iint \left\{ -\frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) - \frac{q}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} dv d\mathbf{r}.$$

Jak snadno zjistíme, je však tento integrál nulový; vyskytuje se zde integrál typu

$$(3.110) \quad B_z \iiint v_y \frac{\partial}{\partial v_x} (f \ln f) dv_x dv_y dv_z = B_z \iiint v_y [f \ln f]_{v_x=-\infty}^{v_x=+\infty} dv_y dv_x = 0$$

a tedy rovnice (3.98) a (3.99) se nemění. Protože dále platí  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ , zůstává v platnosti i rovnice (3.102) a platí proto i další důsledky této rovnice.

Rozšíříme nyní naše úvahy na případ systému, který se skládá z několika druhů částic. Pro jednoduchost opět předpokládejme, že  $\nabla_r = 0$  a vnější síly jsou nulové. Boltzmannova rovnice pro  $i$ -tý druh částic systému má pak tvar

$$(3.111) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j.$$

$H$ -funkce systému je nyní definována rovnicí

$$(3.112) \quad H(t) = \sum_i \int f_i(v_i, t) \ln f_i(v_i, t) dv_i.$$

Potom

$$(3.113) \quad \frac{dH}{dt} = \sum_{i,j} \iiint (1 + \ln f_i) (f_i' f_j' - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i;$$

tento výraz lze dále upravit za pomoci (3.63) tak, že

$$(3.114) \quad \frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4} \sum_{i,j} \iiint \left( \ln \frac{f_i' f_j'}{f_i f_j} \right) (f_i' f_j' - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j dv_i$$

a tedy

$$(3.115) \quad \frac{dH}{dt} \leq 0.$$

## ■ Magnetic field

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

$$(3.43) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon dv_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce  $f_i$   $i$ -tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

$$(3.96) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= \iiint (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} dv d\mathbf{r} = \\ &= \iiint \left\{ (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla_r (f \ln f) - \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} dv d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Poslední dva členy pravé strany (3.96) při integraci vymizí (protože  $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} f \ln f = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} f \ln f = 0$ ) a můžeme proto psát

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

V rovnovážném stavu je  $dH/dt = 0$  a stejným způsobem jako v předchozích případech zjistíme, že

$$(3.116) \quad f_i = n_i \left( \frac{m_i}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_i \mathbf{v}^2}{2k T_i} \right),$$

kde  $\mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0$ .

**End of story**  
**EVERYDAY REALITY**

**End of story**  
**EVERYDAY REALITY**

# Maxwell's Transport Equations – Transfer Equations

$$(3.43) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i f_j' - f_i f_j) g_{ij} b \, d\mathbf{b} \, d\mathbf{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce  $f_i$   $i$ -tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

- Integration of B. equation
- Relations between quantities

## 3.5 Maxwellovy transportní rovnice (Rovnice přenosu)

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, jakým způsobem lze určit střední hodnoty některých fyzikálních veličin daného systému při znalosti rozdělovací funkce částic tohoto systému. Ukážeme si nyní, jakým způsobem je možno popsat makroskopické vlastnosti systému, aniž jsme nuceni znát rozdělovací funkce jednotlivých druhů částic tohoto systému.

Nechť funkce  $\Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)$  charakterizuje nějakou vlastnost našeho systému (přesněji řečeno  $i$ -tého druhu částic). Vynásobíme-li nyní touto funkcí Boltzmannovu rovnici (3.43) a dále provedeme-li integraci takto získané rovnice přes rychlostní prostor  $i$ -té částice, dostaneme

$$(3.117) \quad \int \left\{ \Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i \right) \right\} d\mathbf{v}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} d\mathbf{v}_i.$$

Levou stranu této rovnice můžeme dále upravit. Pro první člen můžeme psát

$$(3.118) \quad \int \Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) \frac{\partial f_i}{\partial t} d\mathbf{v}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_i f_i d\mathbf{v}_i - \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} d\mathbf{v}_i = \\ = \frac{\partial}{\partial t} (n_i \bar{\Phi}_i) - n_i \left( \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial t} \right),$$

druhý člen je možno rozepsat, tj.

$$(3.119) \quad \int \Phi_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla_r f_i d\mathbf{v}_i = \nabla_r \cdot \int \Phi_i \mathbf{v}_i f_i d\mathbf{v}_i - \int (\mathbf{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i) f_i d\mathbf{v}_i = \\ = \nabla_r \cdot (n_i \overline{\Phi_i \mathbf{v}_i}) - n_i (\overline{\mathbf{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i})$$

atd.

# Maxwell's Transport Equations – Transfer Equations

## Integration of B. equation

### 3.5 Maxwellovy transportní rovnice (Rovnice přenosu)

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, jakým způsobem lze určit střední hodnoty některých fyzikálních veličin daného systému při znalosti rozdělovací funkce částic tohoto systému. Ukážeme si nyní, jakým způsobem je možno popsat makroskopické vlastnosti systému, aniž jsme nuceni znát rozdělovací funkce jednotlivých druhů částic tohoto systému.

Nechť funkce  $\Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)$  charakterizuje nějakou vlastnost našeho systému (přesněji řečeno  $i$ -tého druhu částic). Vynásobíme-li nyní touto funkcí Boltzmannovu rovnici (3.43) a dále provedeme-li integraci takto získané rovnice přes rychlostní prostor  $i$ -té částice, dostaneme

$$(3.117) \quad \int \left\{ \Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i \right) \right\} d\mathbf{v}_i = \int \Phi_i \frac{\delta f_i}{\delta t} d\mathbf{v}_i.$$

Levou stranu této rovnice můžeme dále upravit. Pro první člen můžeme psát

$$(3.118) \quad \int \Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) \frac{\partial f_i}{\partial t} d\mathbf{v}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_i f_i d\mathbf{v}_i - \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} d\mathbf{v}_i = \\ = \frac{\partial}{\partial t} (n_i \overline{\Phi_i}) - n_i \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right),$$

druhý člen je možno rozepsat, tj.

$$(3.119) \quad \int \Phi_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_i d\mathbf{v}_i = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \int \Phi_i \mathbf{v}_i f_i d\mathbf{v}_i - \int (\mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Phi_i) f_i d\mathbf{v}_i = \\ = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (n_i \overline{\Phi_i \mathbf{v}_i}) - n_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \overline{\Phi_i})$$

atd.

Položíme-li dále

$$(3.127) \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}}$$

a konečně třetí člen je možno upravit zcela analogicky, tj.

$$(3.120) \quad \int \Phi_i \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i d\mathbf{v}_i = \iint \frac{\mathbf{F}_{ix}}{m_i} \int \Phi_i \frac{\partial f_i}{\partial v_{ix}} dv_{ix} dv_{iy} dv_{iz} + \dots = \\ = \iint \frac{\mathbf{F}_{ix}}{m_i} \int \frac{\partial}{\partial v_{ix}} (\Phi_i f_i) dv_{ix} dv_{iy} dv_{iz} - \iint \frac{\mathbf{F}_{ix}}{m_i} \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial v_{ix}} dv_{ix} dv_{iy} dv_{iz} + \dots;$$

protože  $\lim_{v_i \rightarrow \pm \infty} (\Phi_i f_i) = 0$ , je možno dále psát

$$(3.121) \quad \int \Phi_i \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i d\mathbf{v}_i = - \int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} \Phi_i f_i d\mathbf{v}_i = - n_i \left( \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} \overline{\Phi_i} \right).$$

Jestliže  $\mathbf{F}_i$  nezávisí na rychlosti, je možno  $\mathbf{F}_i/m_i$  vyjmout před integrál a (3.121) má pak tvar

$$(3.122) \quad \int \Phi_i \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i d\mathbf{v}_i = - n_i \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot (\nabla_{\mathbf{v}_i} \overline{\Phi_i}).$$

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123) \quad \frac{\partial (n_i \overline{\Phi_i})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (n_i \overline{\Phi_i \mathbf{v}_i}) - n_i \left[ \left( \frac{\partial \overline{\Phi_i}}{\partial t} \right) + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \overline{\Phi_i} + \frac{\mathbf{F}_i(\mathbf{v}_i)}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} \overline{\Phi_i} + \delta \overline{\Phi_i} \right] = 0.$$

Rovnice (3.123) je obecnou rovnicí přenosu pro danou veličinu  $\Phi_i$ , nazývá se Maxwellovou transportní rovnicí. Sumací (3.123) přes všechny druhy částic daného systému pak dostaneme rovnici přenosu pro veličinu  $\Phi$  celého systému.

# Maxwellovy transportní rovnice – Zákony zachování

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123) \quad \frac{\partial(n_i \Phi_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i \Phi_i v_i) - n_i \left[ \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right) + v_i \cdot \nabla_r \Phi_i + \frac{F_i(v_i)}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i + \delta \Phi_i \right] = 0.$$

Položíme-li dále

$$(3.127) \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla_r$$

Uvažujme pro jednoduchost neutrální jednocasticový systém\*) a necht funkce  $\Phi$  je rovna postupně srážkovým invariantům (3.65).

$$a) \quad \Phi = \Psi = 1.$$

Potom  $\bar{\Psi} = 1$ ,  $\bar{\Psi} \bar{V} = D\Psi/Dt = \nabla_r \Psi = \nabla_v \Psi = \delta \bar{\Psi} = 0$  a z (3.129) dostaneme

$$(3.131) \quad \frac{Dn}{Dt} + n \nabla_r \cdot v_0 = 0.$$

- Integrace B. rovnice
- Vztahy mezi veličinami

S použitím (3.127) můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$(3.132) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n v_0) = 0,$$

což je zákon zachování počtu částic. Položíme-li  $\Psi = m$ , dostaneme z (3.132) známou rovnici kontinuity

$$(3.133) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_r \cdot (\rho v_0) = 0.$$

$$b) \quad \Phi = \Theta = mV.$$

Potom  $\bar{\Theta} = \delta \bar{\Theta} = \nabla_r \Theta = D\Theta/Dt = 0$ ,  $n \bar{\Theta} \bar{V} = p$ ,  $\nabla_v \Theta = mI$  ( $I$  je jednotkový tenzor); rovnice (3.127) dává

$$(3.134) \quad \frac{Dv_0}{Dt} = n\bar{F} - \nabla_r \cdot p, \quad \equiv \quad \frac{\partial v_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla_r \vec{v}_0$$

což je zákon zachování hybnosti.

$$c) \quad \Phi = \Sigma = \frac{1}{2} m V^2.$$

Potom  $D\Sigma/Dt = \nabla_r \Sigma = \delta \Sigma = 0$ ,  $\nabla_v \Sigma = mV$ ,  $n(\nabla_v \Sigma) \bar{V} = p$ , podle (3.16)  $n \bar{\Sigma} \bar{V} = q$ ; rovnici (3.129) lze nyní upravit na tvar

$$(3.135) \quad \frac{D}{Dt} (n \bar{\Sigma}) + n \bar{\Sigma} \nabla_r \cdot v_0 + \nabla_r \cdot q + p : \nabla_v v_0 - n \bar{F} \bar{V} = 0.$$

Uvážíme-li nyní, že

$$(3.136) \quad \overline{F(V)} \bar{V} = 0$$

platí i pro případ vnější síly typu (3.49), můžeme dále (s použitím rovnice kontinuity (3.131)) přepsat rovnici (3.135) do tvaru

$$(3.137) \quad n \frac{D\Sigma}{Dt} = - (p : \nabla_v v_0 + \nabla_r \cdot q),$$

což je zákon zachování energie.

# Transportní rovnice pro plazma

## ■ Plazma. Předpoklady

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123) \quad \frac{\partial(n_i \bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i \bar{\Phi}_i \bar{v}_i) - n_i \left[ \left( \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial t} \right) + \bar{v}_i \cdot \nabla_r \bar{\Phi}_i + \frac{\bar{F}_i(\bar{v}_i)}{m_i} \cdot \nabla_r \bar{\Phi}_i + \delta \bar{\Phi}_i \right] = 0.$$

### 3.7 Úprava transportních rovnic pro plazma

Rovnice (3.188), (3.189), (3.191) a (3.192) platí obecně pro vícesložkové plazma. Jsou však velmi složité, a proto se k praktickému řešení konkrétních úloh příliš nehodí. Upravíme proto tyto rovnice na základě některých předpokladů na přijatelnější a známější tvar. Předpokládejme, že\*):

a) Plazma je kvasineutrální, tj.

$$(3.194) \quad \sigma_e \sim 0 \quad \text{a} \quad J \sim j.$$

Prostorový náboj  $\sigma_e$  můžeme zanedbat v pohybové rovnici (3.187) resp. (3.188) a v rovnici pro proudovou hustotu  $j$  (3.189).  $\sigma_e$  však není možno zanedbat v Poissonově rovnici.

b) Hmotnost elektronů  $m_e$  je mnohem menší ve srovnání s hmotností iontů  $m_i$ , tj.

$$(3.195) \quad \frac{m_e}{m_i} \ll 1 \quad \text{a také} \quad \frac{Z_i m_e}{m_i} \ll 1.$$

c) Plazma je téměř izotropní a  $v_0$  je dostatečně malé, tj. elektrický proud  $j$ ,  $v_0$  a tlakové gradienty jsou poruchy prvního řádu a proto členy, obsahující tyto veličiny ve druhé mocnině, stejně tak jako gradienty  $j$  a  $v_0$  můžeme zanedbat.

d) Plazma není daleko od termodynamické rovnováhy, tj. parciální tlaky elektronů  $p_e$  a iontů  $p_i$  jsou téhož řádu; podle b) pak také platí

$$(3.196) \quad \frac{Z_i m_e}{m_i} p_i \ll p_e,$$

což znamená, že elektrokinetický tenzor iontů je zanedbatelný ve srovnání s elektrokinetickým tenzorem elektronů.

e) Tenzor  $p$  nahradíme skalárním tlakem  $p = p_e + p_i$ .

f) Plazma je dvousložkové; je tvořeno elektrony a ionty.

Na základě těchto předpokladů můžeme dále psát, že

$$(3.197) \quad n_i Z_i \cong n_e = n$$

$$(3.198) \quad \varrho = m_e n_e + m_i n_i \sim \varrho_i,$$

$$(3.199) \quad v_0 = \frac{1}{\varrho} (\varrho_i \bar{v}_i + \varrho_e \bar{v}_e) \cong \bar{v}_i.$$

Dále

$$(3.200) \quad j = Z_i e n_i \bar{V}_i - e n_e \bar{V}_e \cong Z_i e n_i \bar{v}_i - e n_e \bar{v}_e;$$

potom

$$(3.201) \quad n_e \bar{v}_e = Z_i n_i \bar{v}_i - \frac{j}{e} \cong \frac{Z_i}{m_i} \varrho v_0 - \frac{j}{e}.$$

Na základě výše uvedených předpokladů můžeme psát:

a) Pro jednotlivé složky plazmatu:

1) Rovnici kontinuity

$$(3.202) \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{m_i} \nabla_r \cdot (\varrho v_0) = 0,$$

$$(3.203) \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i} \nabla_r \cdot (\varrho v_0) + \frac{1}{e} \nabla_r \cdot j = 0.$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

$$(3.204) \quad \nabla_r \cdot (\varrho v_0) = 0;$$

potom můžeme psát

$$(3.203') \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e} \nabla_r \cdot j = 0.$$

# Transportní rovnice pro plazma

## ■ Plazma, Předpoklady

$$(3.203) \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i} \nabla_r \cdot (\rho v_0) + \frac{1}{e} \nabla_r \cdot j = 0.$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

$$(3.204) \quad \nabla_r \cdot (\rho v_0) = 0;$$

potom můžeme psát

$$(3.203') \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e} \nabla_r \cdot j = 0.$$

### 2) Pohybové rovnice (na základě (3.161))

$$(3.205) \quad \rho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i),$$

$$(3.206) \quad \rho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + \bar{v}_e \times B) - n_e F_e = n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e).$$

Na pravé straně těchto rovnic vystupuje člen  $n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i)$ , resp.  $n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e)$ . Podle (3.158) ale platí

$$(3.207) \quad \begin{aligned} n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i) + n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) &= 0, \quad \text{tj.} \\ n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) &= -n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i) \end{aligned}$$

a tedy rovnice (3.205) a (3.206) jsou vzájemně spolu svázány.

V některých případech je možno předpokládat, že\*

$$(3.208) \quad n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) = -n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i) = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{V}_e - \bar{V}_i) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i),$$

kde  $\tau_e$  je střední doba mezi srážkami mezi elektrony a ionty resp. mezi částicemi různých druhů;  $\tau_e^{-1} = \nu$  je pak srážková frekvence. Pohybové rovnice (3.205) a (3.206) můžeme za pomoci (3.208) psát ve tvaru

$$(3.205') \quad \rho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i),$$

$$(3.206') \quad \rho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + \bar{v}_e \times B) - n_e F_e = -\frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i).$$

**REALITA všedných dní**

# Rutherfordova formule

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu g^2}$$

Věnujme se nyní výpočtu diferenciálního srážkového průřezu  $\sigma(\chi)$  pro případ coulombovských sil. Ukázali jsme si, že obecný výraz pro  $\sigma(\chi)$  je dán vztahem (2.79), tj.

$$(2.113) \quad \sigma(\chi) = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|.$$

Z rovnice (2.106) je ale zřejmé, že

$$(2.114) \quad \left| \frac{db}{d\chi} \right| = \frac{1}{2} \frac{b^2}{b_0} \frac{1}{\cos^2 \frac{\chi}{2}}$$

a

$$(2.115) \quad b = b_0 \cotg \frac{\chi}{2}.$$

Dosadíme-li nyní (2.114) a (2.115) do (2.113), dostáváme téměř okamžitě požadovaný výraz pro  $\sigma(\chi)$  ve tvaru

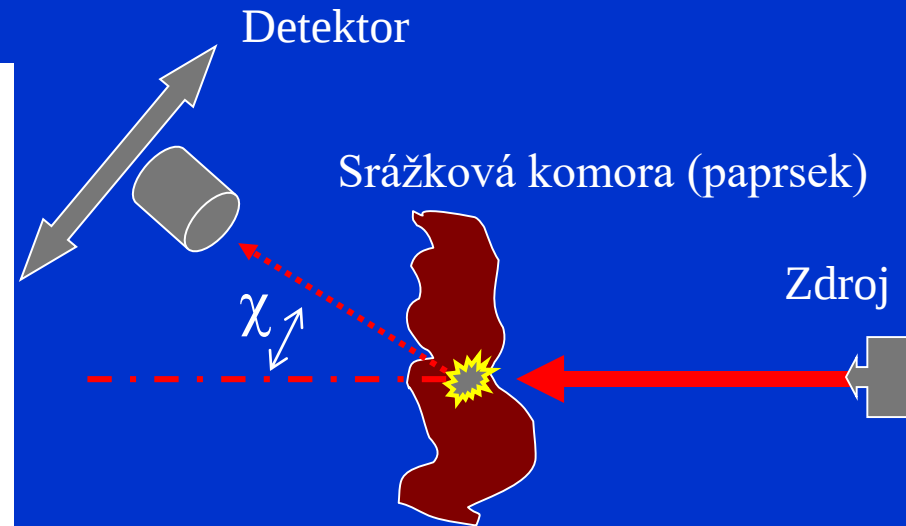
$$(2.116) \quad \sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu^2 g^4} \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\chi}{2}}.$$

Toto je ale takzvaná Rutherfordova formule, kterou je možno získat ve stejném tvaru i na základě úvah kvantové mechaniky.\*)

Z (2.116) je zřejmé, že  $\sigma(\chi)$  nezávisí na znaménku náboje částic; platí tedy jak pro případ sil odpuzivých, tak i pro případ sil přitažlivých. Z úvah, které se týkaly

\*) Podrobněji o tom viz L. D. Landau, E. M. Lifšic: Kvantovaja mechanika. op. cit.

- Rutherfordova formule
- Experiment.



Problém je s určením  $\sigma_c$   
Problém srážek na velkou vzdálenost

$$\sigma_c(v) = \int \sigma(\chi) d\Omega = 2\pi \int \sigma(\chi) \sin \chi d\chi = 2\pi \int b db$$

# Debyeho stínící vzdálenost

- Shrňte, co se od účastníků očekává – pochopit, co je plazma.

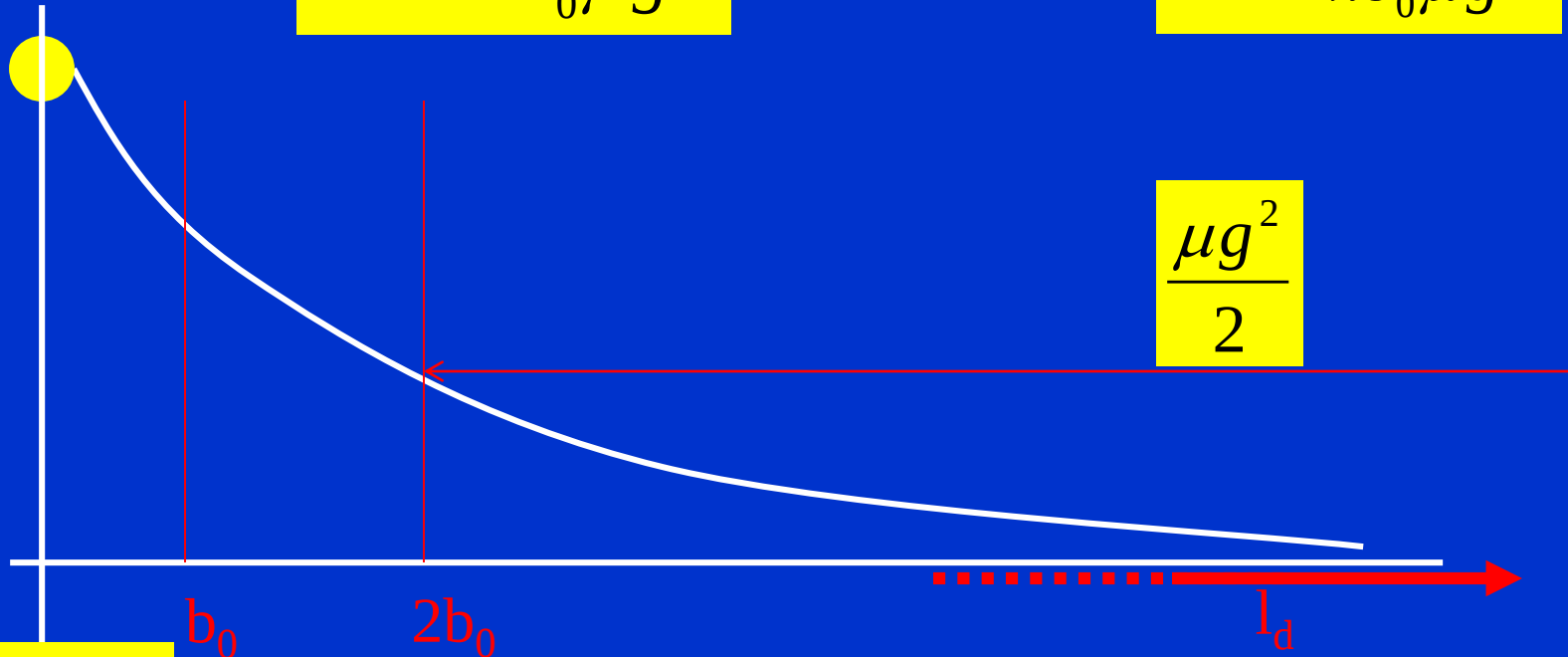
$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T_1 T_2}{e^2 (Z_1^2 n_{10} T_2 + Z_2^2 n_{20} T_1)}$$

For quasineutral plasma,  
 $n_{10} = n_{20} = n/2 =$  with  $T_1 = T_2$  we obtain

$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T}{n e^2}$$

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4 \pi \varepsilon_0 \mu g^2}$$

$$b_0 = \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0 \mu g^2}$$

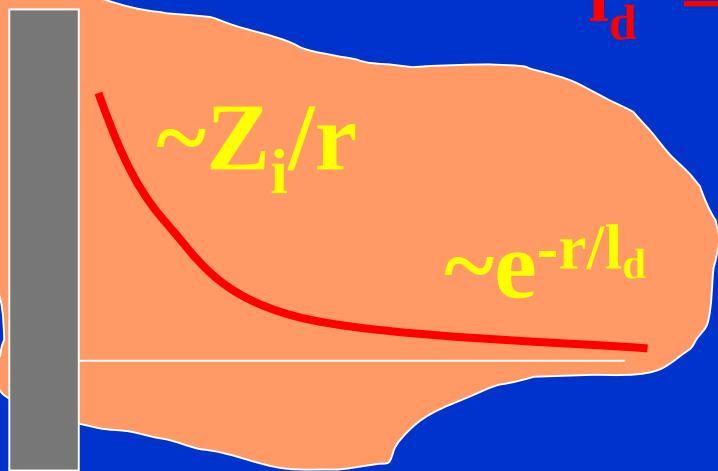


$$\frac{b_0}{l_d} = \frac{\frac{1}{9} (3/2 kT)}{N^{1/2} \mu g^2} \lll 1$$

# Stínění v plazmě

$$l_d^2 = \epsilon_0 kT / ne^2$$

- Stínění v plazmě
- Ustanovení debyovského stínění



$$v^2 \sim kT/m_e$$

$$l_d^2 = kT/m_e * 1/\omega_{0e}^2 = v^2/\omega_{0e}^2$$

$$\phi(r) = (Z_i e / 4\pi\epsilon_0) / r * e^{-r/l_d}$$

$$\sigma_c(v) = 2\pi \int b db$$

Problém srážek na velkou vzdálenost

Tvar  $l_d$  (2.124) se značně zjednoduší, budeme-li předpokládat, že  $Z_1^2 = Z_2^2 = 1$ ,  $T_1 = T_2 = T$  a

$$(2.130) \quad n_{10} + n_{20} = n, \quad n_{10} \sim n_{20} \sim \frac{1}{2}n,$$

kde  $n$  je celkový počet částic v jednotce objemu. Potom, jak plyne z (2.124), je

$$(2.131) \quad l_d^2 = \frac{\epsilon_0 kT}{ne^2}.$$

Uvážíme-li nyní, že Langmuirova frekvence (plazmová frekvence)  $\omega_0$  je dána výrazem

$$(2.132) \quad \omega_0^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \sim \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} = \omega_{0e}^2,$$

kde  $m_e$  je hmotnost elektronů a  $\omega_{0e}$  je plazmová frekvence elektronů, můžeme také psát, že

$$(2.133) \quad l_d^2 = \frac{kT}{m_e} \frac{1}{\omega_{0e}^2}.$$

Fyzikální význam této rovnice je celkem jasný. Rovnice (2.133) totiž říká, že  $l_d$  je taková délka, o kterou se přemístí částice (elektron) za periodu plazmových kmitů. Potom doba  $\tau_{st}$ , za kterou se ustanoví debyeovské stínění, je řádově

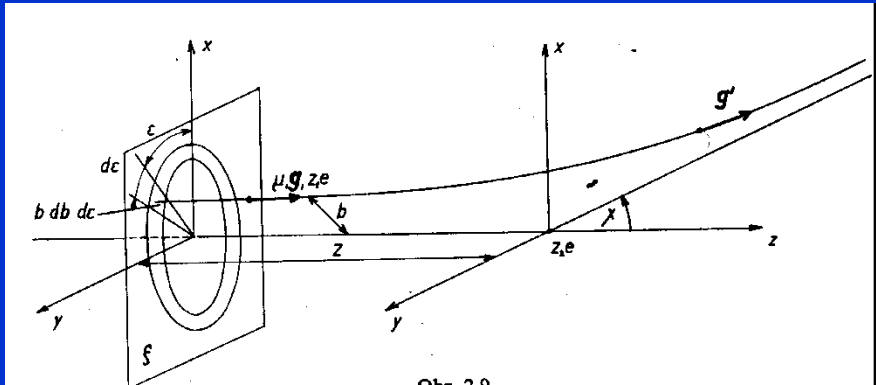
$$(2.134) \quad \tau_{st} \sim \frac{1}{\omega_0} \sim \frac{l_d}{\sqrt{kT/m_e}}.$$

Na závěr tohoto odstavce je nutno poznamenat, že některé naše úvahy nejsou přesně vzato korektní. Týká se to především předpokladu, že rozložení částic kolem každého silového centra plazmatu je dáno sféricky symetrickým rozdělením Maxwella-Boltzmannna. Podrobnější analýza daného problému ukazuje\*), že chyby, kterých se tímto jednoduchým popisem dopouštíme, jsou poměrně malé a navíc i tento jednoduchý popis vede k relativně dobrým výsledkům v další teorii plazmatu.

\*) Viz např. D. V. Sivuchin: Voprosy teorii plazmy 4, red. M. A. Leontovič, Moskva (1964).

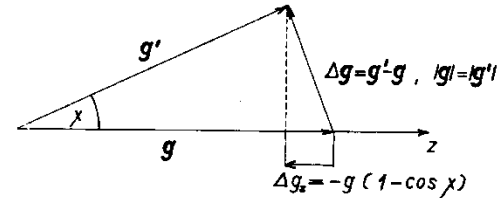
# Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus



$$\mathbf{F} = - \frac{d}{dt} \sum_{(i)} \mathbf{p}_{1i} = - \frac{g}{g} \mu \sum_{(i)} \frac{d}{dt} \mathbf{g}_z,$$

kde suma přes  $i$  značí sečítání přes všechny částice svazku. Výraz  $\sum_{(i)} (dg_z/dt)$  je možno celkem snadno určit: fyzikálně totiž znamená změnu relativní rychlosti svazku částic za jednotku času, nebo – což je totéž – změnu relativní rychlosti jedné částice svazku vlivem srážky, vynásobenou počtem srážek za jednotku času (předpokládáme, že interakci svazku můžeme rozdělit na jednotlivé binární srážky).



Obr. 2.10.

Změnu relativní rychlosti jedné částice svazku  $\Delta g_z$  určíme snadno z obr. 2.10. Snadno zjistíme, že

$$(2.136) \quad \Delta g_z = -g(1 - \cos \chi) = -2g \sin^2 \frac{\chi}{2}.$$

Počet srážek za jednotku času závisí zřejmě na průřezu svazku; za jednotku času „dosáhnou“ silového centra pouze ty částice, jejichž vzdálenost  $Z \leq g \cdot 1 \text{ sec}$ . Počet částic, které projdou elementární plochou  $b db d\epsilon$  za jednotku času a „dosáhnou“ silového centra, pak zřejmě bude

$$(2.137) \quad g n_1 b db d\epsilon,$$

kde  $n_1$  je koncentrace částic svazku. Vynásobíme-li nyní (2.136) výrazem (2.137) a zintegrujeme-li výsledek přes celou rovinu  $\xi$ , dostaneme, že

$$(2.138) \quad \sum_{(i)} \frac{d}{dt} g_z = \int_0^\infty db \int_0^{2\pi} d\epsilon \left( -2g \sin^2 \frac{\chi}{2} g n_1 b \right)$$

a odtud

$$(2.139) \quad F = \frac{g}{g} 2g^2 n_1 \mu 2\pi \int_0^\infty b \sin^2 \frac{\chi}{2} db.$$

Uvážíme-li nyní, že podle (2.106)  $\tan \chi/2 = b_0/b$ , můžeme dále psát, že

$$(2.140) \quad F = \frac{g}{g} \mu 4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}.$$

Integrál

$$(2.141) \quad L = \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}$$

# Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus

$$F = \frac{g}{g} \mu 4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}.$$

$$L = \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}$$

$\ln(E.\text{kinetická}/E.\text{potenciální})$   
Ve vzdalenosti  $l_d$

Už jsme ukázali, že platí...

$$b_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\mu g^2} \quad l_d^2 = \frac{\epsilon_0 kT}{ne^2}$$

$$\frac{b_0}{l_d} = \frac{\frac{1}{9} \left(\frac{3}{2} kT\right)}{N \frac{1}{2} \mu g^2} \lll 1$$

logaritmicky diverguje pro velké hodnoty parametru  $b$ . Abychom dostali pro  $F$  konečné hodnoty, musíme v  $L$  nějakým způsobem omezit horní integrační mez.

V předchozím odstavci jsme si ukázali, že efektivní interakční potenciál částic je řádově dosahu  $l_d$ ; binární coulombovské srážky je pak možno uvažovat pouze pro srážkový parametr  $b \leq l_d$ . Za horní integrační mez  $L$  je tedy možno zvolit  $l_d$ . Dostaneme

$$(2.142) \quad L = \int_0^{l_d} \frac{b db}{b_0^2 + b^2} = \ln \sqrt{\left(\frac{b_0^2 + l_d^2}{b_0^2}\right)}.$$

Jestliže dále platí, že  $l_d \gg |b_0|$ , můžeme (2.142) přepsat do tvaru

$$(2.143) \quad L = \ln \left( \frac{l_d}{|b_0|} \right) = \ln \frac{l_d}{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu g^2}},$$

kde jsme za  $b_0$  dosadili (2.97) a síla  $F$ , určená rovnicí (2.140), má nyní tvar

$$(2.144) \quad F = L \frac{g}{g^3} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{4\pi\epsilon_0} \frac{n_1}{\mu}.$$

Veličina  $L$  určená rovnicí (2.143) se nazývá coulombovský logaritmus.

Předpokládali jsme, že platí

$$(2.145) \quad l_d \gg b_0.$$

Tato podmínka však plyne přímo z předpokladů (2.120), které mají platit pro libovolné  $r$ . Položme tedy  $r = l_d$  a předpokládejme pro jednoduchost, že  $Z_1 = Z_2 = 1$ . Sečtením nerovností (2.120) ( $\varphi(r)$  bereme v prvním přiblížení jako coulombovský) dostaneme

$$(2.146) \quad \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l_d} \ll k(T_1 + T_2),$$

což je možno přepsat jako

$$(2.147) \quad l_d \gg \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 k(T_1 + T_2)}.$$

Protože ale  $3k(T_1 + T_2) \sim \mu g^2$ , je možno (2.147) dále přepsat na

$$(2.148) \quad l_d \gg \frac{6e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu g^2} \sim b_0.$$

Odtud již vidíme, že nerovnost (2.145) je již splněna, platí-li (2.120), nebo jinými slovy, předpokládáme (stejně jako v 1. kapitole), že interakční energie částic je mnohem menší ve srovnání s jejich tepelnou energií. K tomuto výsledku je možno dojít ještě trochu jiným způsobem. Aby „ořezání“ integrálu  $L$  (2.141) mělo fyzikální smysl,

# Další kroky

$$(2.140) \quad F = \frac{g}{g} \mu 4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}.$$

Integrál

$$(2.141) \quad L = \int_0^\infty \frac{b db}{b_0^2 + b^2}$$

$$(2.151) \quad |F| = \text{konst } L,$$

kde  $L$  je dáno rovnicí (2.142), resp. (2.143). Sledujme dále, jak závisí  $|F|$  na úhlu rozptylu částic. Na základě (2.106) můžeme tvrdit, že pro  $b \gg b_0$  je

$$(2.152) \quad \chi = \frac{2b_0}{b} \ll 1$$

a tedy rozptyl na malé úhly odpovídá dalekým průletům. Hranici mezi dalekými a blízkými průlety stanovme pro  $b = 2b_0$ . Rovnici (2.151) můžeme nyní psát ve tvaru

$$(2.153) \quad |F| = \text{konst} \int_0^{l_d} \frac{b db}{b_0^2 + b^2} = \text{konst} (L_{b.p.} + L_{d.p.}),$$

kde

$$(2.154) \quad L_{b.p.} = \int_0^{2b_0} \frac{b db}{b_0^2 + b^2} = \ln 3 \sim 1$$

je coulombovský logaritmus odpovídající blízkým průletům a

$$(2.155) \quad L_{d.p.} = \int_{2b_0}^{l_d} \frac{b db}{b_0^2 + b^2} = \ln \frac{l_d}{b_0} - \ln 3 \sim \ln \frac{l_d}{b_0} = L \gg 1$$

je coulombovský logaritmus odpovídající dalekým průletům. Z (2.153) je zřejmé, že střední sílu, která působí na částici 2 ze strany svazku částic 1, můžeme rozdělit na dvě části a to na sílu  $F_{b.p.}$ , odpovídající blízkým průletům, a  $F_{d.p.}$ , odpovídající dalekým průletům; pro  $F_{b.p.}$  a  $F_{d.p.}$  platí

$$(2.156) \quad |F_{b.p.}| \sim L_{b.p.}$$

$$F_{dp}/F_{bp} \sim L \gg 1$$

# Závislost na teplotě

V závěru tohoto odstavce uvedeme ještě několik poznámek, týkajících se coulombovského logaritmu  $L$ . Z (2.143) vidíme, že  $L$  závisí logaritmicky na  $\mu g^2$ . V důsledku této logaritmické závislosti je možno v mnoha případech nahradit  $\mu g^2$  střední hodnotou této veličiny nebo tepelnou rychlostí částic, tj. můžeme položit  $\mu g^2 \sim \frac{3}{2}k(T_1 + T_2)$ . Abychom si utvořili představu, jak závisí  $L$  na teplotě a koncentraci, předpokládejme pro jednoduchost, že  $T_1 = T_2 = T$ . Coulombovský logaritmus má pak jednoduchý tvar

$$(2.159) \quad L = \ln \left[ \frac{12\pi}{n^{1/2}} \left( \frac{\varepsilon_0 k T}{e^2} \right)^{3/2} \right].$$

V jednoduchém případě, kdy  $\mu g^2 \sim \frac{3}{2}k(T_1 + T_2)$ ,  $T_1 = T_2 = T$  a  $|Z_1| = |Z_2| = 1$ , je možno (2.161) přepsat na tvar

$$(2.162) \quad L_{kv} = L_{kl} + \ln \left( \frac{4,2 \cdot 10^5}{T} \right)^{1/2},$$

kde  $L_{kl}$  je dáno vztahem (2.159). Hodnoty coulombovského logaritmu vypočtené z (2.159) a (2.161) jsou uvedeny v tab. 1; nejsou zde uvedeny hodnoty coulombovského logaritmu pro vysoké koncentrace a nízké teploty, protože v těchto případech je námi uvedená teorie neplatná.

Tabulka 1. Hodnoty coulombovského logaritmu  $L$ .

| Koncentrace<br>elektronů<br>[m <sup>-3</sup> ] | Teplota K |       |                   |                 |                   |                 |                   |                 |                   |                 |
|------------------------------------------------|-----------|-------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------|
|                                                | 50        | 100   | 5.10 <sup>2</sup> | 10 <sup>3</sup> | 5.10 <sup>3</sup> | 10 <sup>4</sup> | 5.10 <sup>4</sup> | 10 <sup>5</sup> | 5.10 <sup>5</sup> | 10 <sup>6</sup> |
| 10 <sup>10</sup>                               | 10,69     | 11,73 | 14,14             | 15,18           | 17,60             | 18,63           | 21,05             | 22,09           | 24,42             | 25,11           |
| 10 <sup>11</sup>                               | 9,54      | 10,58 | 12,99             | 14,03           | 16,44             | 17,48           | 19,88             | 20,94           | 23,26             | 23,96           |
| 10 <sup>12</sup>                               | 8,39      | 9,42  | 11,84             | 12,88           | 15,29             | 16,33           | 18,75             | 19,79           | 22,11             | 22,81           |
| 10 <sup>13</sup>                               | 7,23      | 8,27  | 10,69             | 11,73           | 14,14             | 15,18           | 17,60             | 18,63           | 20,96             | 21,65           |
| 10 <sup>14</sup>                               | 6,08      | 7,12  | 9,54              | 10,58           | 12,99             | 14,03           | 16,44             | 17,48           | 19,81             | 20,50           |
| 10 <sup>15</sup>                               | 4,93      | 5,97  | 8,39              | 9,42            | 11,84             | 12,88           | 15,29             | 16,33           | 18,66             | 19,36           |
| 10 <sup>16</sup>                               | —         | 4,82  | 7,23              | 8,27            | 10,69             | 11,73           | 14,14             | 15,18           | 17,51             | 18,20           |
| 10 <sup>17</sup>                               | —         | —     | 6,08              | 7,12            | 9,54              | 10,58           | 12,99             | 14,03           | 16,36             | 17,05           |
| 10 <sup>18</sup>                               | —         | —     | 4,93              | 5,97            | 8,39              | 9,42            | 11,84             | 12,88           | 15,21             | 15,90           |
| 10 <sup>19</sup>                               | —         | —     | —                 | 4,82            | 7,23              | 8,27            | 10,69             | 11,73           | 14,06             | 14,75           |
| 10 <sup>20</sup>                               | —         | —     | —                 | —               | 6,08              | 7,12            | 9,54              | 10,58           | 12,90             | 13,60           |
| 10 <sup>21</sup>                               | —         | —     | —                 | —               | 4,93              | 5,97            | 8,39              | 9,42            | 11,75             | 12,45           |
| 10 <sup>22</sup>                               | —         | —     | —                 | —               | —                 | 4,92            | 7,23              | 8,27            | 10,60             | 11,30           |
| 10 <sup>23</sup>                               | —         | —     | —                 | —               | —                 | —               | 6,08              | 7,12            | 9,45              | 10,14           |
| 10 <sup>24</sup>                               | —         | —     | —                 | —               | —                 | —               | 4,93              | 5,97            | 8,30              | 8,99            |

## Literatura ke kap. 2.

- JANCEL R., KAHAN TH.: Electrodynamics of plasmas. J. Wiley & Sons, London (1966).  
 DELCROIX J. L.: Plasma physics. J. Wiley & Sons, London (1965).  
 LANDAU L. D., LIFŠIC E. M.: Kvantovaja mechanika. Moskva (1963).  
 SIVUCHIN D. V.: Voprosy teorij plazmy 4., red. M. A. Leontovič, Moskva (1964).  
 TRUBNIKOV B. A.: Voprosy teorij plazmy 1., red. M. A. Leontovič, Moskva (1963).  
 SPITZER L.: Physics of fully ionized gases. Interscience, New York (1956) (ruský překlad Spitzer L.: Fizika polnostju ionizovannogo gaza. Moskva (1965)).

# Quo vadis domine nostra

- Shrňte, co se od účastníků očekává.
- Shrňte, co se očekává od vás.

## 1.1 Základní definice

Rovnice mechaniky nejsou při velkém počtu  $N$  částic zvládnutelné. Lze však na jejich základě a při statistických představách dojít k zákonitostem, které chování velkého makroskopického systému částic vystihnou.

Nechť pro makroskopický systém, který má objem  $V$ , je známa mikroskopická struktura; systém je tvořen  $N$  interagujícími částicemi a nechť každá z těchto částic se řídí zákony klasické dynamiky. Pro jednoduchost předpokládejme, že částice nemají vnitřní stupně volnosti. Mikroskopický stav systému je určen bodem (fází) v  $6N$  rozměrném fázovém prostoru  $\Gamma$ , který má souřadnice  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ , kde  $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i$  jsou polohové vektory  $i$ -té částice v prostoru souřadnic, respektive v prostoru impulsů. Definujme dále objemový element  $d\Gamma$  v  $\Gamma$  prostoru jako

$$d\Gamma = d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N = d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N.$$

Protože každý systém je reprezentován fází v  $\Gamma$  prostoru, soubor velkého počtu  $W$  systémů bude reprezentován „oblakem“  $W$  fází v  $\Gamma$ . Označíme-li hustotu tohoto oblaku (fázovou hustotu) v  $\Gamma$  prostoru v čase  $t$  jako  $\varrho(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ , je potom počet fází (fázových bodů), obsažených v  $d\Gamma$  kolem bodu  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  v čase  $t$ , roven

$$\varrho(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N$$

a

$$(1.1) \quad \int \varrho(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = W.$$

Fázovou hustotu  $P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ , odpovídající jednomu systému, tj.

$$(1.2) \quad P_N = \frac{\varrho(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{W}$$

nazveme hustotou pravděpodobnosti ve fázovém prostoru. Potom z předchozích úvah a z fyzikálního významu  $P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  je zřejmé, že

$$(1.3) \quad \int P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = 1.$$

# Fázový prostor

- Přecházíme z exaktního popisu na popis pomocí pravděpodobností.
- Rozdělovací funkce

**N** interagujících částic ---- každá se řídí zákony klasické dynamiky.

Element  $d\Gamma$  v  $\Gamma$  prostoru jako:  $d\Gamma = dr_1 dr_2 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N = dr^N dp^N$

Soubor systému představuje „oblak“ s hustotou  $\rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$



# Fázový prostor

- Přecházíme z exaktního popisu na popis pomocí pravděpodobností.
- Rozdělovací funkce

$N$  interagujících částic ---- každá se řídí zákony klasické dynamiky.

Element  $d\Gamma$  v  $\Gamma$  prostoru jako:  $d\Gamma = dr_1 dr_2 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N = dr^N dp^N$

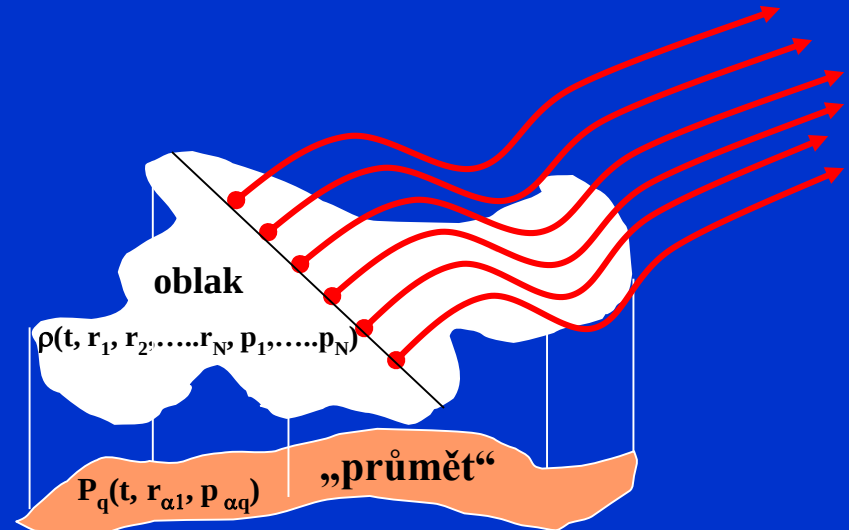
Soubor systému představuje „oblak“ s hustotou  $\rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$

Celkový počet fází v souboru je

$$\int \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^N dp^N = W$$

Hustota pravděpodobnosti

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$



Integraci  $P$  přes podmnožinu proměnných získáme „průmět“ nezávislý na souřadnicích  $r^{N-q} p^{N-q}$

$$P_q(t, r_{\alpha 1}, p_{\alpha q}) = \int P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^{N-q} dp^{N-q}$$

Pokud prointegroujeme přes impulsy získáme pravděpodobnost, že systém má určitou konfiguraci rozložení v prostoru

$$P_N(t, r_1, \dots, r_N) = \int P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dp^N$$

# Liouvillův teorém

- Hamiltonián N částic
- Zobecněné souřadnice

Sledujeme časový vývoj souboru N částic...

každá částice se pohybuje v souladu s Hamiltonovými rovnicemi:

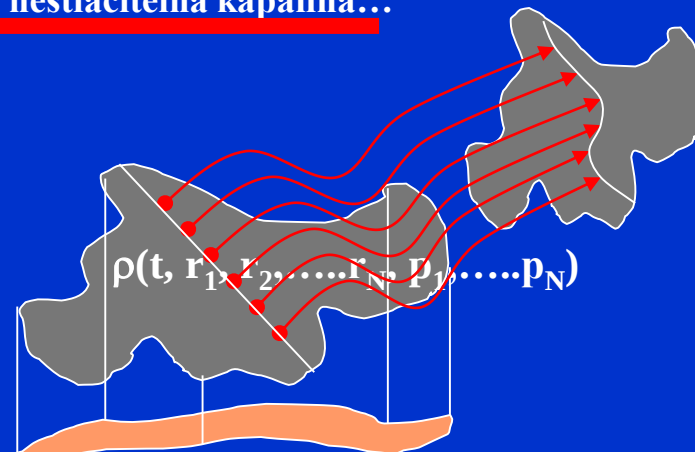
$$(1.9) \quad \begin{aligned} \dot{p}_{i_\alpha} &= - \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial r_{i_\alpha}} \\ \dot{r}_{i_\alpha} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial p_{i_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace **J=1** a proto je

$$\int d\Gamma = \int d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = \text{const}, \quad (1.10)$$

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina...

proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“



**J=1**

## 1.1 Základní definice

Rovnice mechaniky nejsou při velkém počtu  $N$  částic zvládnutelné. Lze však na jejich základě a při statistických představách dojít k zákonitostem, které chování velkého makroskopického systému částic vystihnou.

Nechť pro makroskopický systém, který má objem  $V$ , je známa mikroskopická struktura; systém je tvořen  $N$  interagujícími částicemi a nechť každá z těchto částic se řídí zákony klasické dynamiky. Pro jednoduchost předpokládejme, že částice nemají vnitřní stupně volnosti. Mikroskopický stav systému je určen bodem (fází) v  $6N$  rozměrném fázovém prostoru  $\Gamma$ , který má souřadnice  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ , kde  $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i$  jsou polohové vektory  $i$ -té částice v prostoru souřadnic, respektive v prostoru impulsů. Definujme dále objemový element  $d\Gamma$  v  $\Gamma$  prostoru jako

$$d\Gamma = d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N = d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N.$$

Protože každý systém je reprezentován fází v  $\Gamma$  prostoru, soubor velkého počtu  $W$  systémů bude reprezentován „oblakem“  $W$  fází v  $\Gamma$ . Označíme-li hustotu tohoto oblaku (fázovou hustotou) v  $\Gamma$  prostoru v čase  $t$  jako  $q(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ , je potom počet fází (fázových bodů), obsažených v  $d\Gamma$  kolem bodu  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  v čase  $t$ , roven

a

$$(1.1) \quad \int q(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = W.$$

Fázovou hustotu  $P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ , odpovídající jednomu systému, tj.

$$(1.2) \quad P_N = \frac{q(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{W}$$

nazveme hustotou pravděpodobnosti ve fázovém prostoru. Potom z předchozích úvah a z fyzikálního významu  $P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  je zřejmé, že

$$(1.3) \quad \int P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = 1.$$

## 1.2 Liouvillův teorém

Sledujme dále časový vývoj souboru  $N$  částic systému. Z mechaniky je známo, že pohyb každé částice se děje ve shodě s Hamiltonovými rovnicemi daného problému; fázový bod v  $\Gamma$  prostoru se bude pohybovat opět podle Hamiltonových rovnic, které – zapsány pro  $i$ -tou částici – jsou

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \dot{p}_{i\alpha} &= - \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial r_{i\alpha}} \\ \dot{r}_{i\alpha} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial p_{i\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

kde  $H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  je hamiltonián částice daného systému.

Z klasické mechaniky je známo\*), že na časovou změnu veličin  $p_{i\alpha}$  a  $r_{i\alpha}$  při pohybu částic systému je možno hledět jako na kanonické transformace. Dále je známo, že fázový objem, tj.  $\int d\Gamma = \int d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N$  je invariantní vzhledem ke kanonickým transformacím. Odtud dostáváme důležitý závěr: Každý bod fázového prostoru se pohybuje ve shodě s Hamiltonovými rovnicemi daného systému, stejným způsobem se pohybuje i oblak fázových bodů a navíc objem tohoto oblaku (fázový objem) se nemění, tj.

$$(1.10) \quad \int d\Gamma = \text{konst},$$

\*) Viz např. L. D. Landau, E. M. Lifšič: Mechanika. Moskva (1965), s. 183.

i když se může měnit tvar tohoto objemu a tedy plocha, kterou je tento objem uzavřen.

Rovnice (1.10) je vlastně matematický zápis Liouvillova teorému a říká, že fázový objem se pohybuje tak, jako kdyby byl nestlačitelná kapalina. Pro takovéto kapaliny však platí rovnice kontinuity (v  $\Gamma$  prostoru)

$$(1.11) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(qV) = 0$$

# Úvod

- Formy Liouvilovho teorému
- Vnější a vnitřní síly

$$(1.11) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho V) = 0$$

nebo, což je totéž

$$(1.12) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} V + V \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0,$$

kde  $V$  je „rychlost“ v  $\Gamma$  prostoru (o složkách  $\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N$ ), která splňuje rovnici

$$(1.13) \quad \operatorname{div} V = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial \dot{r}_{i\alpha}}{\partial r_{i\alpha}} + \frac{\partial \dot{p}_{i\alpha}}{\partial p_{i\alpha}} \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r_{i\alpha} \partial p_{i\alpha}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_{i\alpha} \partial r_{i\alpha}} \right) = 0,$$

jako důsledek platnosti Hamiltonových rovnic (1.9). Rovnice (1.12) má potom tvar

$$(1.14) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + V \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0,$$

nebo

$$(1.15) \quad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + [\varrho; H] = 0,$$

Pořadí  
deriivací

Collisions

$\rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$

což můžeme psát jako

$$(1.16) \quad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{r_i} \varrho + \sum_{i=1}^N (X_i + F_i) \cdot \nabla_{p_i} \varrho = 0,$$

kde  $[\varrho; H]$  jsou Poissonovy závorky,  $v_i$  je rychlost  $i$ -té částice,  $X_i$  je vektor vnější síly, působící na  $i$ -tou částici, a  $F_i$  je vektor vnitřní síly působící na  $i$ -tou částici, která pochází od  $(N - 1)$  zbývajících částic.

Po vydělení rovnic (1.14), (1.15) a (1.16) počtem  $W$  systémů dostáváme rovnice pro  $P_N$

$$(1.14') \quad \frac{\partial P_N}{\partial t} + V \cdot \operatorname{grad} P_N = 0,$$

$$(1.15') \quad \frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0,$$

$$(1.16') \quad \frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{r_i} P_N + \sum_{i=1}^N (X_i + F_i) \cdot \nabla_{p_i} P_N = 0.$$

Pokud prointegrujeme přes impulsy ...

$$P_N(t, r_1, \dots, r_N) = \int P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dp^N$$

Závislost na čase a poloze

Hustota pravděpodobnosti

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

# 1.3 Gibbsův H teorém

- entropia
- reversibilita a ireversibilita procesů

Všimněme si nyní alespoň částečně časového vývoje systému  $N$  částic, a to z hlediska vratnosti či nevratnosti procesů, které v tomto systému probíhají. Ze zkušenosti je známo, že většina procesů, které probíhají v přírodě, jsou procesy nevratné. To znamená, že entropie takového systému roste s časem; v rovnováze je potom entropie konstantní. Ve statistické fyzice je entropie úzce spjata s takzvanou  $H$ -funkcí a to vztahem

Hustota pravděpodobnosti  
 $P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$

Použijíc **Liouvilla teorému** dospějeme k výrazu

$$S = -kH = -k \int P_N \ln P_N d\Gamma, \quad \text{kde } H = \int P_N \ln P_N d\Gamma$$

Uvážíme-li nyní platnost Liouvillový rovnice (1.15'), můžeme psát, že

$$(1.22) \quad \int \frac{\partial P_N}{\partial t} \ln P_N d\Gamma = - \int [H; P_N] \ln P_N d\Gamma = \int P_N [H; \ln P_N] d\Gamma = \\ = \int [H; P_N] d\Gamma = - \int \frac{\partial P_N}{\partial t} d\Gamma.$$

$$dH/dt = 0 \quad \longrightarrow \quad dS/dt = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\partial P_N}{\partial t} (\ln P_N + 1) d\Gamma.$$

$$= 0$$

To znamená, že systém se časově nevyvíjí.....

t.j. nerovnovážný systém se nemůže nikdy dostat do stavu rovnovážného.

**Paradox- klasická mechanika vede k přísně reverzibilnímu popisu, zatím co příroda se chová ireversibilně ...**

Časový vývoj – entropia roste  
Entropia systému roste,  $dS/dt > 0$

# 1.3 Gibbsův H teorém

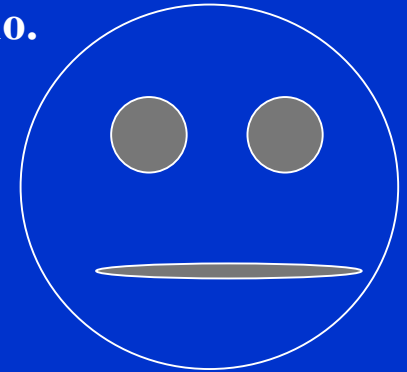
- entropia
- reversibilita a ireversibilita procesů

$$S = -kH = -k \int P_N \ln P_N, \quad \text{kde } H = \int P_N \ln P_N$$

Použijíc **Liouvilla teorému** dospějeme k výrazu

$$dH/dt=0 \quad \longrightarrow \quad dS/dt=0$$

To znamená, že systém se časově nevyvíjí.....  
t.j. nerovnovážný systém se nemůže nikdy dostat do stavu rovnovážného.



**Paradox-** klasická mechanika vede k přísně reverzibilnímu popisu, zatím co příroda se chová ireversibilně .. (?...) ...

Časový vývoj – entropia roste ..... Entropia systému roste,  $dS/dt > 0$

# 1.4 Rovnice BBGKY

## 1.4 Rovnice BBGKY

Funkce  $P_N(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  má určité vlastnosti plynoucí z jejího vztahu k částicím... Pomocí této funkce můžeme určit některé makroskopické veličiny charakterizující daný soubor částic v bodě  $\mathbf{r}, \dots$

Např. proudová hustota v bodě  $\mathbf{r}$  je daná vztahem

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) P_N(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N \quad (1.27)$$

kde  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  je operátor hustoty proudu

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.28)$$

Hustota pravděpodobnosti

$$P_N = \rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) / W$$

Koncentrace částic  $n(\mathbf{r}; t)$  v místě  $\mathbf{r}$  je

$$(1.29) \quad n(\mathbf{r}; t) = \int \hat{n}(\mathbf{r}) P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N,$$

kde  $\hat{n}(\mathbf{r})$  je operátor polohy

$$(1.30) \quad \hat{n}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

Hustota kinetické energie  $E(t; \mathbf{r})$  v místě  $\mathbf{r}$  je rovna

$$(1.31) \quad E(t; \mathbf{r}) = \int \hat{E}(\mathbf{r}) P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N,$$

kde  $\hat{E}(\mathbf{r})$  je operátor kinetické energie

$$(1.32) \quad \hat{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

a  $m_i$  je hmotnost  $i$ -té částice.

Pro nabité částice je dále možno zavést proudovou hustotu  $\mathbf{j}(t; \mathbf{r})$  v bodě  $\mathbf{r}$  (hustotu toku náboje) vztahem

$$(1.33) \quad \mathbf{j}(t; \mathbf{r}) = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N,$$

kde  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  je operátor hustoty proudu (toku náboje)

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum e/\mu * \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

operátor hustoty proudu (toku náboje)

# Introduction to BBGKY

(Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon)

Z výše uvedených úvah plyne, že je vhodné zavést takové funkce a rovnice pro tyto funkce, které budou určovat chování  $s$  částic souboru ( $s \ll N$ ). Definujme tedy pro  $s \ll N$  funkci  $F_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$  tímto způsobem:

$$(1.38) \quad F_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s) = V^s P_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_s) =$$

$$= V^s \int \dots \int P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_{s+1} \dots d\mathbf{p}_N$$

pro  $s = 1, 2, 3, \dots$

Z normovací podmínky

$$(1.39) \quad \frac{1}{V^s} \int \dots \int F_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_s d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_s = 1$$

$V^{-s}F_s(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$  is the probability that the group  $s$  of particles from the set of  $N$  particles will be at time  $t$  located in the element  $d\mathbf{r}_1, \dots, d\mathbf{r}_s, d\mathbf{p}_1, \dots, d\mathbf{p}_s$  regardless of the state of the remaining  $(N-s)$  particles.

# For interacting particles

Let's narrow down the generality of the Hamiltonian a bit

$$(1.42) \quad \frac{\partial P_N}{\partial t} - [H; P_N] = 0.$$

Hamiltonovu funkci  $H$  pro  $N$  vzájemně interagujících částic můžeme zapsat ve tvaru

$$(1.43) \quad H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2m_i} + U_i(\mathbf{r}_i) \right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \Phi_{ij} = \sum_{i=1}^N H_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \Phi_{ij},$$

kde  $H_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$  je hamiltonián samotné  $i$ -té částice a  $U_i(\mathbf{r}_i)$  je potenciál, který je způsobený efekty na stěnách a vnějšími silami.  $\Phi_{ij} = \Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$  je interakční potenciál mezi  $i$ -tou a  $j$ -tou částicí.

Použitím rovnice (1.43) můžeme Liouvillovu rovnici (1.42) přepsat do tvaru

$$(1.44) \quad \frac{\partial P_N}{\partial t} - \sum_{i=1}^N [H_i; P_N] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N [\Phi_{ij}; P_N] = 0.$$

Budeme-li dále násobit (1.44)  $V^s$  a integrovat s ohledem na  $d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_{s+1} \dots d\mathbf{p}_N$  (přes fázový prostor  $(N - s)$  částic), dostaneme

$$(1.45) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = \sum_{i=1}^N V^s \int \dots \int [H_i; P_N] d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_{s+1} \dots d\mathbf{p}_N + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N V^s \int \dots \int [\Phi_{ij}; P_N] d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_{s+1} \dots d\mathbf{p}_N,$$

$$V^s F_s(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$$

# BBGKY Equation

- After many modifications
- After many restrictions
- After many simplifications

Budeme-li dále předpokládat, že pro  $|\mathbf{r}_j| \rightarrow \infty$  je  $(\partial P_N / \partial \mathbf{r}_j) \rightarrow 0$  a pro  $|\mathbf{p}_j| \rightarrow \infty$  je  $(\partial P_N / \partial \mathbf{p}_j) \rightarrow 0$ , dostaneme integraci per partes relaci



Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro  $F_s$  ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1},$$

$\Phi_{ij}$  je interakční potenciál mezi i-tou j-tou částicí

kde

$$(1.53) \quad H_s = \sum_{i=1}^s H_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^s \Phi_{ij}$$

je Hamiltonova funkce uzavřeného systému s částic.

S+1

$F_s$  is a function of  $F_{s+1}$

set of equations

we are where we were!!



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

2003

CHEMICAL  
PHYSICS  
LETTERS

Chemical Physics Letters 372 (2003) 728–732

[www.elsevier.com/locate/cplett](http://www.elsevier.com/locate/cplett)

# The influence of electron–electron collisions on electron thermalization in He and Ar afterglow plasmas

D. Trunec <sup>a,\*</sup>, P. Španěl <sup>b</sup>, D. Smith <sup>c</sup>

<sup>a</sup> *Department of Physical Electronics, Faculty of Science, Masaryk University, Kotlářská 2, 611 37 Brno, Czech Republic*

<sup>b</sup> *J. Heyrovsky Institute of Physical Chemistry, Academy of Sciences of the Czech Republic, Dolejškova 3, 182 23 Prague 8, Czech Republic*

<sup>c</sup> *Centre for Science and Technology in Medicine, School of Postgraduate Medicine, Keele University, Thornburrow Drive, Hartshill, Stoke-on-Trent ST4 7QB, UK*

Received 6 January 2003; in final form 18 March 2003

## Abstract

The electron energy distribution functions for electron thermalization in helium and argon afterglow plasmas have been calculated taking into account electron–neutral and electron–electron collisions. This work shows that electron–electron collisions can lead to the Maxwellization of the electron energy distribution function and thus to different rates of electron thermalization.

© 2003 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

# „EEDF Cooling in He and in Ar“

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro  $F_s$  ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] dr_{s+1} dp_{s+1}$$

## 2. Boltzmann equation

The time rate of change of the electron distribution function,  $f(v, t)$ , is described by the Boltzmann equation [16]

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = C_{en} + C_{ee} \quad (1)$$

where  $C_{en}$  is the collision term for electron-neutral collisions

$$C_{en} = n_n \frac{m_e}{m_n} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( v^4 \sigma_T(v) \left( f + \frac{kT_n}{m_e} \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \quad (2)$$

and  $C_{ee}$  is the collision term for electron-electron collisions

$$C_{ee} = \Gamma_{ee} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( I_0^0 f + (I_2^0 + J_{-1}^0) \frac{v}{3} \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad (3)$$

$$I_p^0 = \frac{4\pi}{v^p} \int_0^v v'^{2+p} f dv'$$

$$J_p^0 = \frac{4\pi}{v^p} \int_v^\infty v'^{2+p} f dv'$$

$$\Gamma_{ee} = 4\pi \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda,$$

where  $n_n$  is the number density of neutral gas,  $T_n$  is the gas temperature,  $m_n$  is the mass of neutral gas atoms and  $\sigma_T$  is the momentum transfer cross-section for electron-neutral collisions.  $\Lambda = \lambda_D/b_0$  ( $\lambda_D$  is the Debye length,  $b_0$  is the impact parameter for a 90° scattering). For our conditions (see be-

Only collisional term

low)  $\ln \Lambda = 10$ . As can be seen from Eq. (2), only elastic collisions are taken into account. The distribution function has the normalization

$$n_e = 4\pi \int_0^\infty v^2 f(v) dv, \quad (4)$$

so that the function

$$F(v) = \frac{4\pi v^2}{n_e} f(v)$$

is a velocity distribution function.

The initial distribution for the calculation was chosen as

$$f(v, 0) = \frac{n_e}{4\pi kT_n \sqrt{\pi}} \frac{1}{v^2} \exp \left( - \left( \frac{v - v_0}{kT_n} \right)^2 \right) \quad (5)$$

with  $v_0 = 1.19 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$ . This  $v_0$  corresponds to electrons with energies in a narrow peak round 4 eV. The peak width is  $2kT_n$ .

# „EEDF Cooling in He and in Ar“

## 3.2. Electron-neutral collisions

Let us study first the energy relaxation due to electron-neutral collision only. For simplicity let us consider that the molecules of neutral gas are at rest ( $T_n = 0$  K) and that the momentum transfer cross-section does not depend on the velocity, which is good approximation for helium.

Thus we obtain the equation

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = n_n \frac{m_e}{m_n} \sigma_T \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^4 f). \quad (6)$$

This equation can be solved analytically; the solution is

$$f(v, t) = \frac{1}{v^4} g\left(at - \frac{1}{v}\right), \quad (7)$$

where  $a = n_n \frac{m_e}{m_n} \sigma_T$  and  $g$  is an arbitrary function, which must be determined from initial condition. For our initial condition (5) we obtain

$$f(v, t) = \frac{n_e}{4\pi k T_n \sqrt{\pi}} \frac{1}{v^2 (atv - 1)^2} \times \exp\left(-\left(\frac{\frac{v}{atv-1} + v_0}{k T_n}\right)^2\right). \quad (8)$$

The time development of this distribution function is shown in Fig. 1.

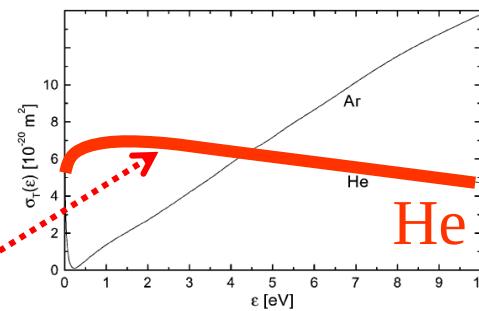


Fig. 2. The momentum transfer cross-sections for electron-argon [20] and electron-helium elastic collisions [21].

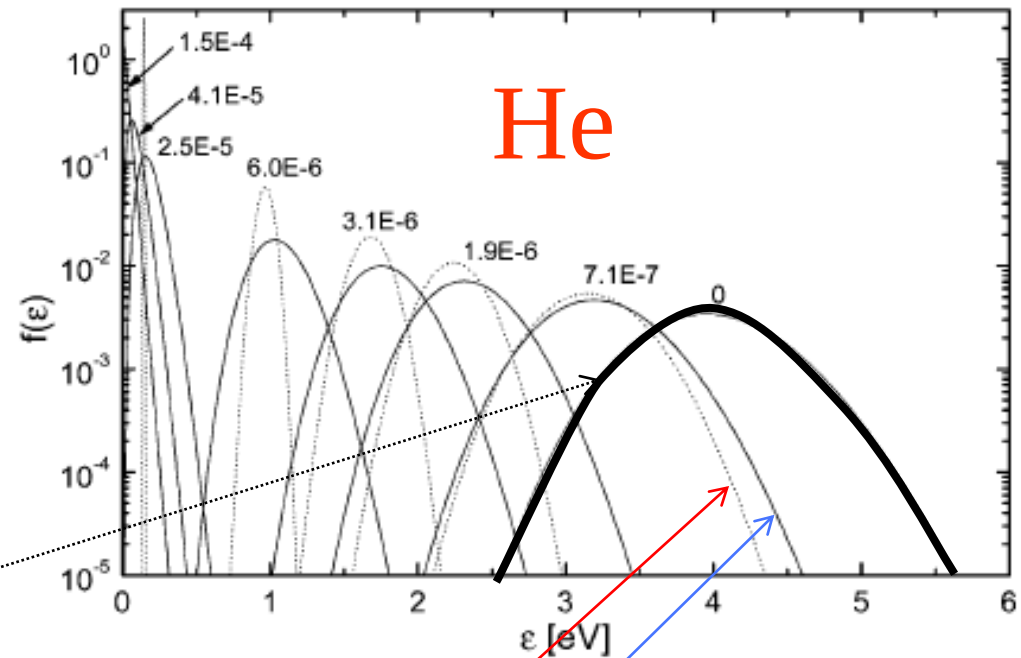


Fig. 1. The time dependence of the electron distribution function in helium afterglow plasma. The neutral gas number density is  $n_n = 1.65 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ , the neutral gas temperature: dotted line,  $T_n = 0$  K; full line,  $T_n = 293$  K. The time in seconds is given by the numbers near each curve. Electron-electron collisions are not taken in the account.

# „EEDF Cooling in He and in Ar“

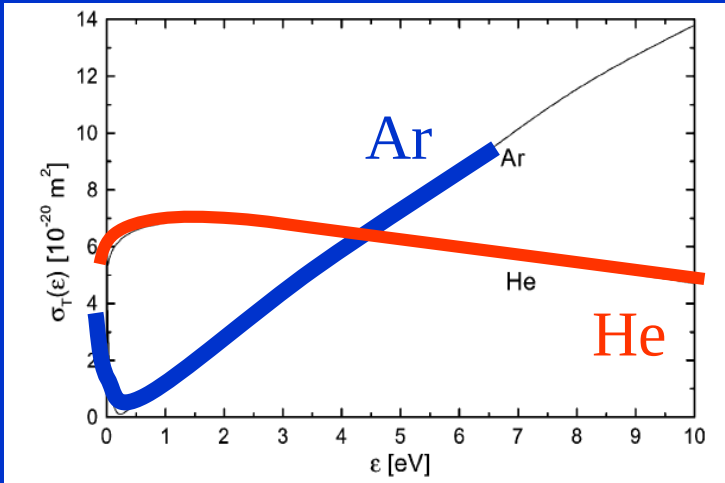


Fig. 2. The momentum transfer cross-sections for electron-argon [20] and electron-helium elastic collisions [21].

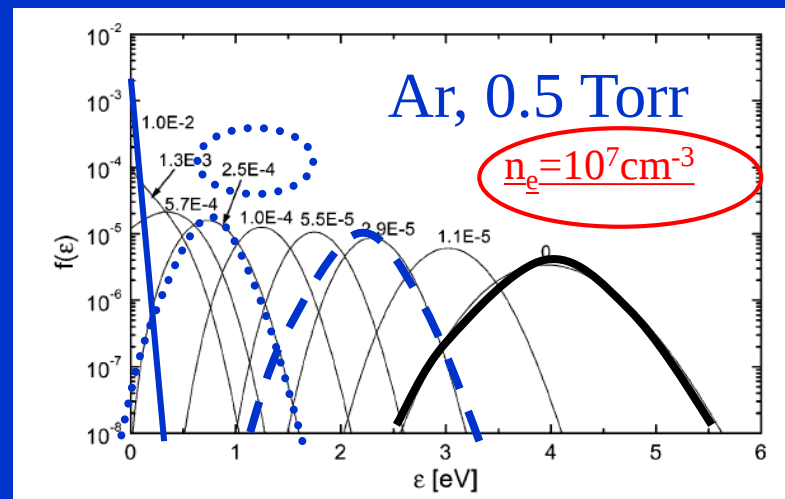


Fig. 3. The time dependence of the electron distribution function in argon afterglow plasma. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is  $T_n = 293 \text{ K}$ , the electron number density is  $n_e = 10^7 \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_e/n_n = 6 \times 10^{-10}$ . The time in seconds is given by the numbers near each curve.

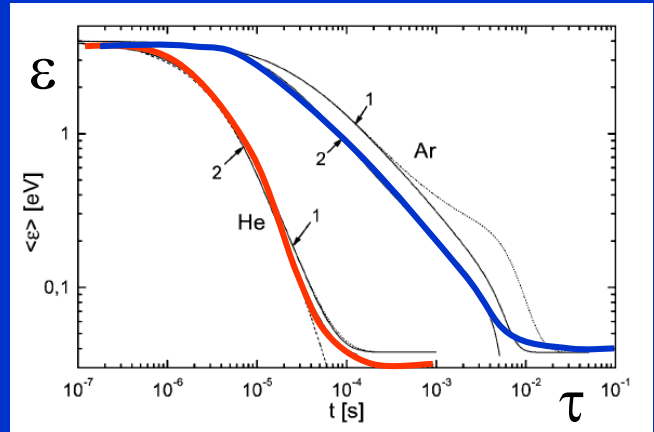


Fig. 5. The time dependence of the mean electron energy in helium and argon afterglow plasmas. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is  $T_n = 293 \text{ K}$ . Electron number densities: 1 -  $n_e = 10^7 \text{ cm}^{-3}$  ( $n_e/n_n = 6 \times 10^{-10}$ ), 2 -  $n_e = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  ( $n_e/n_n = 6 \times 10^{-7}$ ). Dotted lines, calculations without electron-electron collisions; dashed line, calculation without electron-electron collisions and  $T_n = 0 \text{ K}$ .

# „EEDF Cooling in He and in Ar“

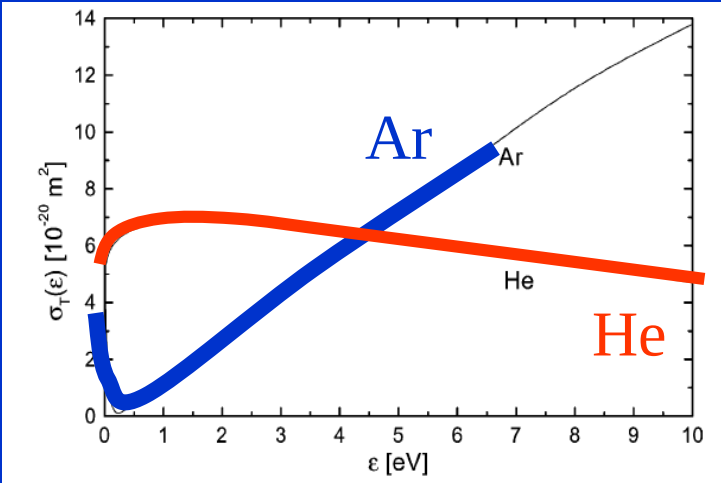


Fig. 2. The momentum transfer cross-sections for electron-argon [20] and electron-helium elastic collisions [21].

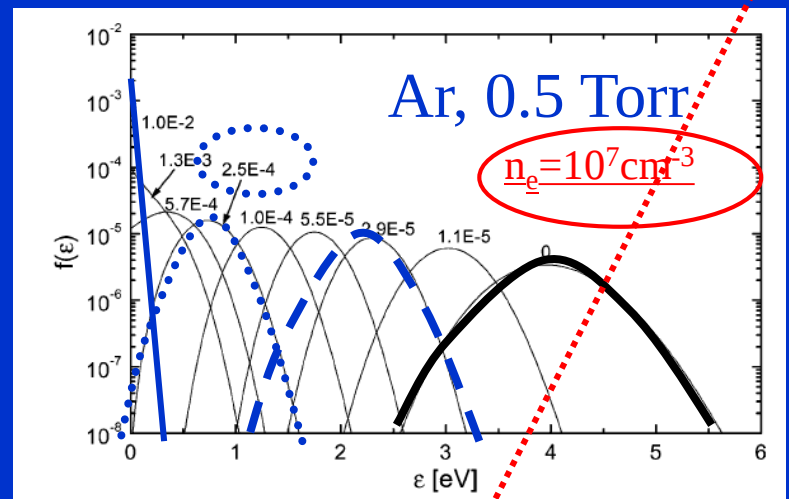


Fig. 3. The time dependence of the electron distribution function in argon afterglow plasma. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is  $T_n = 293 \text{ K}$ , the electron number density is  $n_e = 10^7 \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_e/n_n = 6 \times 10^{-10}$ . The time in seconds is given by the numbers near each curve.

$n_e = 10^7 \text{ cm}^{-3}$

$n_e = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$

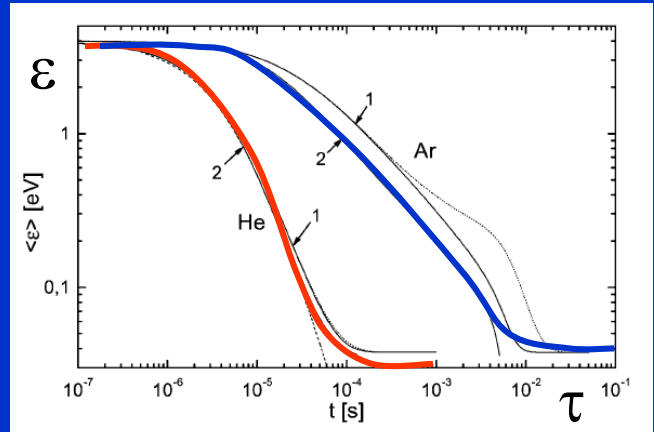


Fig. 5. The time dependence of the mean electron energy in helium and argon afterglow plasmas. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is  $T_n = 293 \text{ K}$ . Electron number densities: 1 –  $n_e = 10^7 \text{ cm}^{-3}$  ( $n_e/n_n = 6 \times 10^{-10}$ ), 2 –  $n_e = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  ( $n_e/n_n = 6 \times 10^{-7}$ ). Dotted lines, calculations without electron-electron collisions; dashed line, calculation without electron-electron collisions and  $T_n = 0 \text{ K}$ .

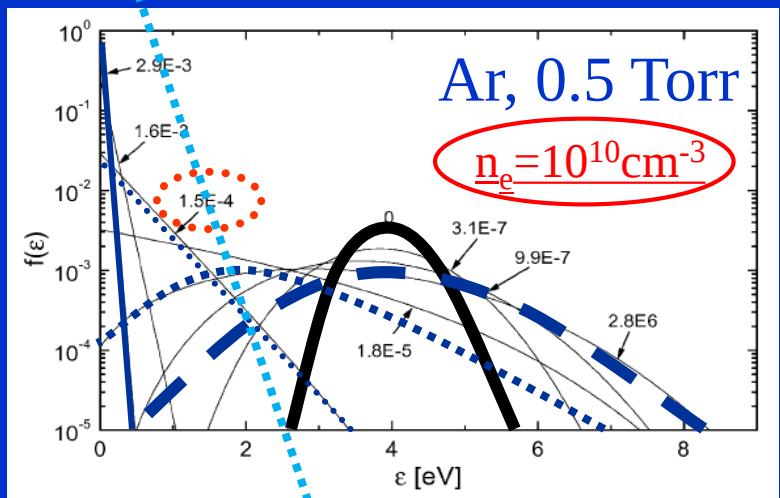


Fig. 4. The time dependence of the electron distribution function in argon afterglow plasma. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is  $T_n = 293 \text{ K}$ , the electron number density is  $n_e = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ,  $n_e/n_n = 6 \times 10^{-7}$ . The time in seconds is given by the numbers near each curve.