

I am sorry for English, Czech and Slovak language ... , 😊, 😊, 😊,

Pokročila fyzika plazmatu Advanced Plasma Physics

Lecture number PFP/FP II 1AB 2025
Student version – standard lecture 24. 02. 2025

Recommended literature (in Czech):

Literatura:

Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu

„Velký Kracík“

J.Kracík, B. Šesták a L. Aubrecht

Academia Praha 1974

Fyzika plazmatu

J.Kracík, J. Tobiáš

Academia, Praha 1966

„Malý Kracík“



pdf copy of “Velky Kracik” is available on request from lecturer

Phase space

- We move from an exact description to a description using probabilities.
- Distribution functions

N interacting particles, ---- each obeys the laws of classical dynamics.

Vectors $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{p}_i$

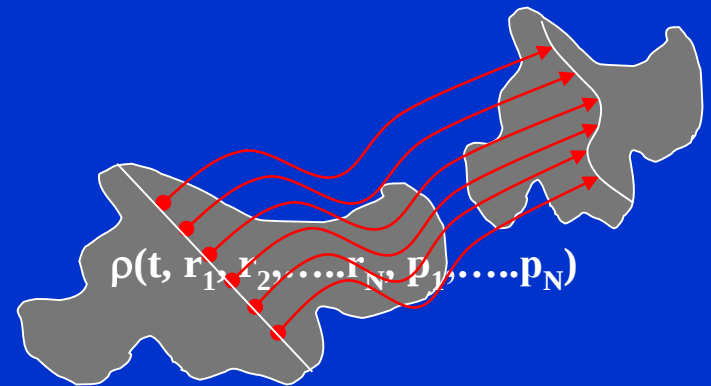
Coordinate, impulse

The element $d\Gamma$ in Γ space as: $d\Gamma = d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N = d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N$

The system file represents a "cloud" with a density of $\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$

A "cloud" with density

ρ



Phase space 6N dimensional space

We introduce several new functions

N interacting particles, ---- each obeys the laws of classical dynamics.

Element $d\Gamma$ in Γ space as: $d\Gamma = dr_1 dr_2 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N = dr^N dp^N$

The system file represents a "cloud" with a density of $\rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$
the ensemble of files

The total number of phases in the file is

$$\int \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^N dp^N = W$$

Probability density .

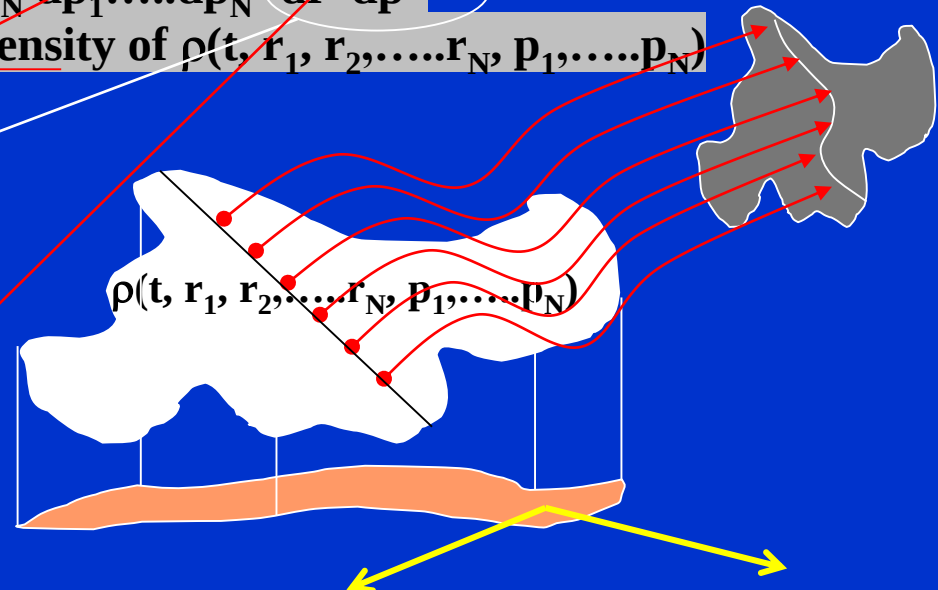
..density of probability

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

By integrating P over a subset of variables, we obtain a "projection" independent of $r^{N-q} p^{N-q}$

$$P_q(t, r_{\alpha 1}, p_{\alpha q}) = \int P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^{N-q} dp^{N-q}$$

coordinate impulse



soubor → ensemble file

We introduce several new functions

N interacting particles ----

point (phase) in 6N dimensional space Γ

point in Γ has coordinates $r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N$

Element $d\Gamma$ in Γ space as: $d\Gamma = dr_1 dr_2 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N = dr^N dp^N$

Phase space

Probability density

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

1.1 Základní definice

Rovnice mechaniky nejsou při velkém počtu N částic zvládnutelné. Lze však na jejich základě a při statistických představách dojít k zákonitostem, které chování velkého makroskopického systému částic vystihnou.

Nechť pro makroskopický systém, který má objem V , je známa mikroskopická struktura; systém je tvořen N interagujícími částicemi a nechť každá z těchto částic se řídí zákony klasické dynamiky. Pro jednoduchost předpokládejme, že částice nemají vnitřní stupně volnosti. Mikroskopický stav systému je určen bodem (fází) v $6N$ rozměrném fázovém prostoru Γ , který má souřadnice $r_1, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N$, kde r_i, p_i jsou polohové vektory i -té částice v prostoru souřadnic, respektive v prostoru impulsů. Definujme dále objemový element $d\Gamma$ v Γ prostoru jako

$$d\Gamma = dr_1 dr_2 \dots dr_N dp_1 dp_2 \dots dp_N = dr^N dp^N.$$

Protože každý systém je reprezentován fází v Γ prostoru, soubor velkého počtu W systémů bude reprezentován „oblakem“ W fází v Γ . Označíme-li hustotu tohoto oblaku (fázovou hustotu) v Γ prostoru v čase t jako $\varrho(t; r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N)$, je potom počet fází (fázových bodů), obsažených v $d\Gamma$ kolem bodu $(r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N)$ v čase t , roven

$$\varrho(t; r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N) dr^N dp^N$$

The system file represents a "cloud" with a density of $\rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$

a

$$(1.1) \quad \int \varrho(t; r_1, \dots, r_N; p_N) dr^N dp^N = W.$$

Fázovou hustotu $P_N(t; r_1, \dots, p_N)$, odpovídající jednomu systému, tj.

$$(1.2) \quad P_N = \frac{\varrho(t; r_1, \dots, p_N)}{W}$$

nazveme hustotou pravděpodobnosti ve fázovém prostoru. Potom z předchozích úvah a z fyzikálního významu $P_N(t; r_1, \dots, p_N)$ je zřejmé, že

$$(1.3) \quad \int P_N(t; r_1, \dots, p_N) dr^N dp^N = 1.$$

Phase space

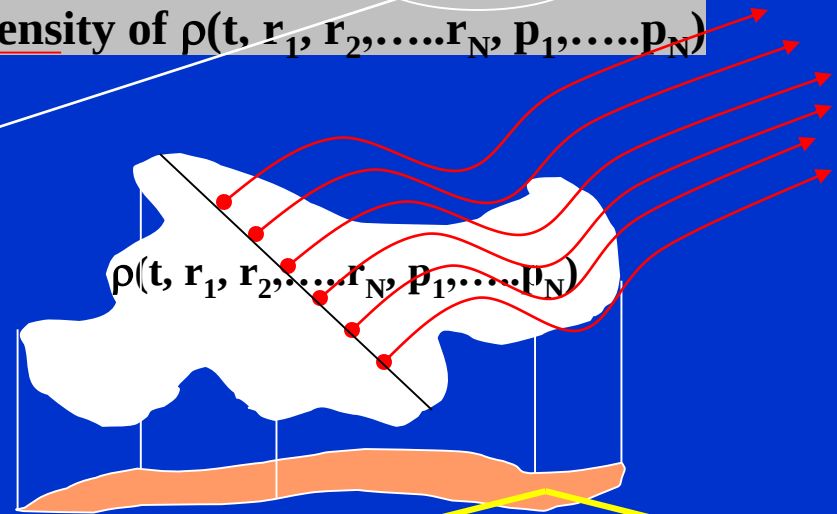
N interacting particles, ---- each obeys the laws of classical dynamics.

Element $d\Gamma$ in Γ space as: $d\Gamma = dr_1 dr_2 \dots dr_N dp_1 \dots dp_N = dr^N dp^N$
 The system file represents a "cloud" with a density of $\rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$
 has coordinates

The total number of phases in the file is
 $\int \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^N dp^N = W$

Probability density

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

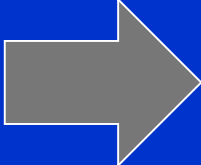


By integrating P over a subset of variables, we obtain a "projection" independent of coordinates $r^{N-q} p^{N-q}$

$$P_q(t, r_{\alpha 1}, p_{\alpha q}) = \int P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^{N-q} dp^{N-q}$$

If we integrate through impulses, we get the probability that the system has a certain configuration of distribution in space

$$P_N(t, r_1, \dots, r_N) = \int P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dp^N$$



If we integrate through impulses, we get the probability that the system has a certain configuration of distribution in space

$$P_N(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \int P_N(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{p}^N$$

Dále můžeme definovat hustotu pravděpodobnosti (pravděpodobnost) $P_q(t; \mathbf{r}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{r}_{\alpha_q}; \mathbf{p}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{p}_{\alpha_q})$, což je pravděpodobnost nalézt v souboru celkem náhodně určenou skupinu q částic $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ s polohovými vektory $\mathbf{r}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{r}_{\alpha_q}$ a impulsy $\mathbf{p}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{p}_{\alpha_q}$, bez ohledu na to, v jakém stavu je zbývajících $(N - q)$ částic;

$$(1.4) \quad P_q(t; \mathbf{r}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{p}_{\alpha_q}) = \int P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^{N-q} d\mathbf{p}^{N-q}$$

a podobně je možné nalézt pravděpodobnost, že systém částic má danou konfiguraci $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ jako

$$(1.5) \quad P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \int P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{p}^N.$$

Liouvillův teorém

- Hamiltonian N Particles
- Generalized coordinates

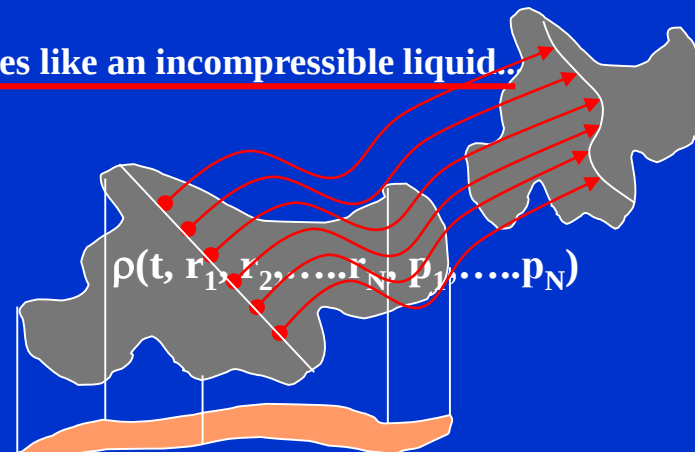
We follow the time evolution of the set of N particles...
each particle moves in accordance with Hamilton's equations:

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \dot{p}_{i_\alpha} &= - \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial \mathbf{r}_{i_\alpha}} \\ \dot{\mathbf{r}}_{i_\alpha} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial \mathbf{p}_{i_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

The motion of the particles of the system can be viewed as canonical transformations of the Jacobian transformation $J=1$ and therefore the

$$\int d\Gamma = \int d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = \text{const}, \quad (1.10)$$

The phase volume does not change. The phase volume moves like an incompressible liquid...
Therefore, we can write a "continuity equation"



J=1

1.1 Základní definice

Rovnice mechaniky nejsou při velkém počtu N částic zvládnutelné. Lze však na jejich základě a při statistických představách dojít k zákonitostem, které chování velkého makroskopického systému částic vystihnou.

Nechť pro makroskopický systém, který má objem V , je známa mikroskopická struktura; systém je tvořen N interagujícími částicemi a nechť každá z těchto částic se řídí zákony klasické dynamiky. Pro jednoduchost předpokládejme, že částice nemají vnitřní stupně volnosti. Mikroskopický stav systému je určen bodem (fází) v $6N$ rozměrném fázovém prostoru Γ , který má souřadnice $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$, kde $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i$ jsou polohové vektory i -té částice v prostoru souřadnic, respektive v prostoru impulsů. Definujme dále objemový element $d\Gamma$ v Γ prostoru jako

$$d\Gamma = d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N = d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N.$$

Protože každý systém je reprezentován fází v Γ prostoru, soubor velkého počtu W systémů bude reprezentován „oblakem“ W fází v Γ . Označíme-li hustotu tohoto oblaku (fázovou hustotu) v Γ prostoru v čase t jako $\varrho(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$, je potom počet fází (fázových bodů), obsažených v $d\Gamma$ kolem bodu $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ v čase t , roven

$$\varrho(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N$$

a

$$(1.1) \quad \int \varrho(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = W.$$

Fázovou hustotu $P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$, odpovídající jednomu systému, tj.

$$(1.2) \quad P_N = \frac{\varrho(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{W}$$

nazveme hustotou pravděpodobnosti ve fázovém prostoru. Potom z předchozích úvah a z fyzikálního významu $P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ je zřejmé, že

$$(1.3) \quad \int P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = 1.$$

1.2 Liouvillův teorém

Sledujme dále časový vývoj souboru N částic systému. Z mechaniky je známo, že pohyb každé částice se děje ve shodě s Hamiltonovými rovnicemi daného problému; fázový bod v Γ prostoru se bude pohybovat opět podle Hamiltonových rovnic, které – zapsány pro i -tou částici – jsou

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \dot{p}_{i\alpha} &= - \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial r_{i\alpha}} \\ \dot{r}_{i\alpha} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\partial p_{i\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

kde $H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ je hamiltonián částice daného systému.

Z klasické mechaniky je známo*), že na časovou změnu veličin $p_{i\alpha}$ a $r_{i\alpha}$ při pohybu částic systému je možno hledět jako na kanonické transformace. Dále je známo, že fázový objem, tj. $\int d\Gamma = \int d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N$ je invariantní vzhledem ke kanonickým transformacím. Odtud dostáváme důležitý závěr: Každý bod fázového prostoru se pohybuje ve shodě s Hamiltonovými rovnicemi daného systému, stejným způsobem se pohybuje i oblak fázových bodů a navíc objem tohoto oblaku (fázový objem) se nemění, tj.

$$(1.10) \quad \int d\Gamma = \text{konst},$$

*) Viz např. L. D. Landau, E. M. Lifšič: Mechanika. Moskva (1965), s. 183.

i když se může měnit tvar tohoto objemu a tedy plocha, kterou je tento objem uzavřen.

Rovnice (1.10) je vlastně matematický zápis Liouvillova teorému a říká, že fázový objem se pohybuje tak, jako kdyby byl nestlačitelná kapalina. Pro takovéto kapaliny však platí rovnice kontinuity (v Γ prostoru)

$$(1.11) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(\varrho \mathbf{V}) = 0$$

Therefore, we can write a "continuity equation"

Introduction

$$(1.11) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(\varrho V) = 0$$

nebo, což je totéž

$$(1.12) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \text{div} V + V \cdot \text{grad} \varrho = 0,$$

kde V je „rychlost“ v Γ prostoru (o složkách $\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N$), která splňuje rovnici

$$(1.13) \quad \text{div} V = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial \dot{r}_{i\alpha}}{\partial r_{i\alpha}} + \frac{\partial \dot{p}_{i\alpha}}{\partial p_{i\alpha}} \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r_{i\alpha} \partial p_{i\alpha}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_{i\alpha} \partial r_{i\alpha}} \right) = 0,$$

jako důsledek platnosti Hamiltonových rovnic (1.9). Rovnice (1.12) má potom tvar

$$(1.14) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + V \cdot \text{grad} \varrho = 0,$$

nebo

$$(1.15) \quad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + [\varrho; H] = 0,$$

Pořadí
deriivací

což můžeme psát jako

$$(1.16) \quad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{r_i} \varrho + \sum_{i=1}^N (X_i + F_i) \cdot \nabla_{p_i} \varrho = 0,$$

kde $[\varrho; H]$ jsou Poissonovy závorky, v_i je rychlost i -té částice, X_i je vektor vnější síly, působící na i -tou částici, a F_i je vektor vnitřní síly působící na i -tou částici, která pochází od $(N - 1)$ zbývajících částic.

Po vydělení rovnic (1.14), (1.15) a (1.16) počtem W systémů dostáváme rovnice pro P_N

$$(1.14') \quad \frac{\partial P_N}{\partial t} + V \cdot \text{grad} P_N = 0,$$

$$(1.15') \quad \frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0,$$

$$(1.16') \quad \frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{r_i} P_N + \sum_{i=1}^N (X_i + F_i) \cdot \nabla_{p_i} P_N = 0.$$

- Forms of Liouvil's theorem
- External and internal forces

$$\dot{p}_{i\alpha} = - \frac{\partial H(r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N)}{\partial r_{i\alpha}}$$

$$\dot{r}_{i\alpha} = \frac{\partial H(r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N)}{\partial p_{i\alpha}},$$

$$\rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$$

Collisions

If we integrate through impulses ...

$$P_N(t, r_1, \dots, r_N) = \int P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dp^N$$

Dependence on time and position

Probability density

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

1.3 Gibbs' H theorem

- entropy
- Reversibility and Irreversibility of the processes

Všimněme si nyní alespoň částečně časového vývoje systému N částic, a to z hlediska vratnosti či nevratnosti procesů, které v tomto systému probíhají. Ze zkušenosti je známo, že většina procesů, které probíhají v přírodě, jsou procesy nevratné. To znamená, že entropie takového systému roste s časem; v rovnováze je potom entropie konstantní. Ve statistické fyzice je entropie úzce spjata s takzvanou H -funkcí a to vztahem

density of the probability

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

$$= 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\partial P_N}{\partial t} (\ln P_N + 1) d\Gamma.$$

Using Liouville's theorem, we obtain the expression

$$S = -kH = -k \int P_N \ln P_N d\Gamma, \quad \text{kde } H = \int P_N \ln P_N d\Gamma$$

Uvážíme-li nyní platnost Liouvillovovy rovnice (1.15'), můžeme psát, že

$$(1.22) \quad \int \frac{\partial P_N}{\partial t} \ln P_N d\Gamma = - \int [H; P_N] \ln P_N d\Gamma = \int P_N [H; \ln P_N] d\Gamma = \\ = \int [H; P_N] d\Gamma = - \int \frac{\partial P_N}{\partial t} d\Gamma.$$

$$dH/dt = 0 \quad \longrightarrow \quad dS/dt = 0$$

$$(1.15') \quad \frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0,$$

$$(1.10) \quad \int d\Gamma = \text{konst},$$

Rovnice (1.10) je vlastně matematický zápis Liouvillova teorému a říká, že fázový objem se pohybuje tak, jako kdyby byl nestlačitelná kapalina. Pro takovéto kapaliny však platí rovnice kontinuity (v Γ prostoru)

This means that the system does not evolve over time....

...that is, an unequilibrium system can never reach a state of equilibrium.

Paradox - classical mechanics leads to a strictly reversible description, while nature behaves irreversibly ...

- Time development – entropy increases
- System entropy increases, $dS/dt > 0$

Or our approximations are inaccurate....

1.3 Gibbs' H theorem

- entropy
- Reversibility and Irreversibility of processes

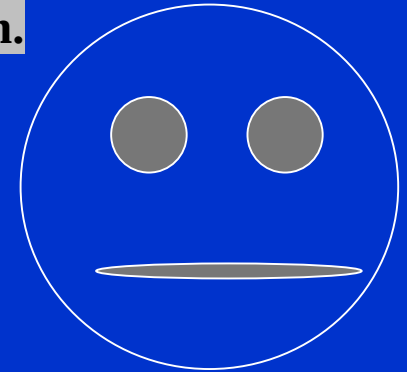
$$S = -kH = -k \int P_N \ln P_N, \quad \text{where } H = \int P_N \ln P_N$$

Using Liouville's theorem, we arrive at the expression

$$dH/dt = 0 \quad \longrightarrow \quad dS/dt = 0$$

This means that the system does not evolve over time....

That is, an unequilibrium system can never reach a state of equilibrium.



Paradox - classical mechanics leads to a strictly reversible description, while nature behaves irreversibly. (?...) ...

Time evolution – entropy increases System entropy increases, $dS/dt > 0$

Or our approximations are inaccurate....

1.4 BBGKY equation

(Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon)

1.4 BBGKY equation

The function $P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N)$ has certain properties resulting from its relationship to particles...

Using this feature we can determine some macroscopic quantities characterizing a given set of particles at point r

$$J(t, r) = \int J(r) P_N(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) dr^N dp^N \quad (1.27)$$

where $J(r)$ is the current density operator

$$J(r) = \sum p_i \delta(r - r_i) \quad (1.28)$$

Hustota pravděpodobnosti

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

$$\hat{j}(r) = \sum e/\mu * p_i \delta(r - r_i)$$

Current Density (Charge Flow) Operator

Koncentrace částic $n(r; t)$ v místě r je

$$(1.29) \quad n(r; t) = \int \hat{n}(r) P_N(t; r_1, \dots, p_N) dr^N dp^N,$$

kde $\hat{n}(r)$ je operátor polohy

$$(1.30) \quad \hat{n}(r) = \sum_{i=1}^N \delta(r - r_i).$$

Hustota kinetické energie $E(t; r)$ v místě r je rovna

$$(1.31) \quad E(t; r) = \int \hat{E}(r) P_N(t; r_1, \dots, p_N) dr^N dp^N,$$

kde $\hat{E}(r)$ je operátor kinetické energie

$$(1.32) \quad \hat{E}(r) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} \delta(r - r_i)$$

a m_i je hmotnost i -té částice.

Pro nabité částice je dále možno zavést proudovou hustotu $j(t; r)$ v bodě r (hustotu toku náboje) vztahem

$$(1.33) \quad j(t; r) = \int \hat{j}(r) P_N(t; r_1, \dots, p_N) dr^N dp^N,$$

kde $\hat{j}(r)$ je operátor hustoty proudu (toku náboje)

Introduction to BBGKY

(Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon)

Z výše uvedených úvah plyne, že je vhodné zavést takové funkce a rovnice pro tyto funkce, které budou určovat chování s částic souboru ($s \ll N$). Definujme tedy pro $s \ll N$ funkci $F_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$ tímto způsobem:

$$(1.38) \quad F_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s) = V^s P_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_s) = \\ = V^s \int \dots \int P_N(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{r}_N, d\mathbf{p}_{s+1} \dots d\mathbf{p}_N$$

pro $s = 1, 2, 3, \dots$

Z normovací podmínky

$$(1.39) \quad \frac{1}{V^s} \int \dots \int F_s(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_s d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_s = 1$$

$V^{-s}F_s(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$ is the probability that the group of S particles from the set of N particles will be in time t in the element **$d\mathbf{r}_1, \dots, d\mathbf{r}_s, d\mathbf{p}_1, \dots, d\mathbf{p}_s$** regardless of the state of the remaining (N-s) particles.

For interacting particles ■ Let's narrow down the generality of the Hamiltonian a bit

(1.42)

$$\frac{\partial P_N}{\partial t} - [H; P_N] = 0.$$

Probability density

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N) / W$$

Hamiltonovu funkci H pro N vzájemně interagujících částic můžeme zapsat ve tvaru

$$(1.43) \quad H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m_i} + U_i(r_i) \right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \Phi_{ij} = \sum_{i=1}^N H_i(r_i, p_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \Phi_{ij},$$

kde $H_i(r_i, p_i)$ je hamiltonián samotné i -té částice a $U_i(r_i)$ je potenciál, který je způsobený efekty na stěnách a vnějšími silami. $\Phi_{ij} = \Phi(|r_i - r_j|)$ je interakční potenciál mezi i -tou a j -tou částicí.

Použitím rovnice (1.43) můžeme Liouvillovu rovnici (1.42) přepsat do tvaru

$$(1.44) \quad \frac{\partial P_N}{\partial t} - \sum_{i=1}^N [H_i; P_N] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N [\Phi_{ij}; P_N] = 0.$$

Budeme-li dále násobit (1.44) V^s a integrovat s ohledem na $dr_{s+1} \dots dr_N dp_{s+1} \dots dp_N$ (přes fázový prostor $(N - s)$ částic), dostaneme

$$(1.45) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = \sum_{i=1}^N V^s \int \dots \int [H_i; P_N] dr_{s+1} \dots dr_N dp_{s+1} \dots dp_N + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N V^s \int \dots \int [\Phi_{ij}; P_N] dr_{s+1} \dots dr_N dp_{s+1} \dots dp_N,$$

For N-s particles we obtaine

$V^s F_s(t, r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s)$ is the probability that the group of S particles from the set of N particles will be located at time t in the element $dr_1, \dots, dr_s, dp_1, \dots, dp_s$ regardless of the state of the remaining $(N-s)$ particles.

BBGKY Equation

- After many modifications
- After many restrictions
- After many simplifications

In the limit...

Budeme-li dále předpokládat, že pro $|r_i| \rightarrow \infty$ je $(\partial P_s / \partial r_j) \rightarrow 0$ a pro $|p_j| \rightarrow \infty$ je $(\partial P_s / \partial p_j) \rightarrow 0$, dostaneme integraci per partes relace

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] dr_{s+1} dp_{s+1},$$

kde

$$(1.53) \quad H_s = \sum_{i=1}^s H_i(r_i, p_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^s \Phi_{ij}$$

je Hamiltonova funkce uzavřeného systému s částic.

S+1

Φ_{ij} is interaction potential between particles i and j

F_s is a function of F_{s+1} → system of equations

We are where we were!!

BBGKY equation of application at $s=1, s=2$

- After many modifications ...
- After many restrictions
- After many simplifications

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1}.$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s = 1$ a $s = 2$. Pro $s = 1$ dostaneme

$$(1.54) \quad \boxed{S=1} \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{r}_1} H_1 \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} F_1 - \nabla_{\mathbf{p}_1} H_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} F_1 + \\ + \frac{N-1}{V} \int (\nabla_{\mathbf{r}_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} F_2 - \nabla_{\mathbf{p}_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} F_2) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2$$

a pro $s = 2$ dostaneme

$$(1.55) \quad \boxed{S=2} \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V} \int \sum_{i=1}^2 [\Phi_{i3}; F_3] d\mathbf{r}_3 d\mathbf{p}_3.$$

Derivation of the Boltzmann equation

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] dr_{s+1} dp_{s+1}.$$

for

$$\lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{V}{N} = v, \quad 0 < v < \infty;$$

v je potom převrácená hodnota koncentrace n , $v = 1/n$. Rovnice (1.52) má potom tvar*)

$$(1.56) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] dr_{s+1} dp_{s+1}.$$

Finding solutions to B. equation

■ In the shape of a row

v je potom převrácená hodnota koncentrace n , $v = 1/n$. Rovnice (1.52) má potom tvar*)

$$(1.56) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1}.$$

Sledujme tedy model klasického zředěného plynu, kdy $r_0^3/v \ll 1$, tj. interakční potenciál je krátkého dosahu a koncentrace částic je nízká. Naším dalším úkolem je výpočet funkce F_s . K tomuto účelu rozložíme F_s do řady podle malého parametru r_0^3/v . Z rovnic (1.56) a (1.57) je zřejmé, že z formálního hlediska můžeme místo parametru r_0^3/v přijmout parametr $1/v$, aniž se změní obecnost daného postupu. Položme proto

$$(1.58) \quad F_s = F_s^{(0)} + \frac{1}{v} F_s^{(1)} + \frac{1}{v^2} F_s^{(2)} + \dots$$

Dosadíme-li nyní daný rozklad do rovnice (1.56) a porovnáme-li členy obsahující stejné mocniny $1/v$, dostaneme

$$(1.59) \quad \frac{\partial F_s^{(0)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(0)}], \quad \dots \rightarrow F_s^{(0)}$$

$$(1.60) \quad \frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(1)}] + \int \left[\sum_{i=1}^s \Phi_{i,s+1}; F_{s+1}^{(0)} \right] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1} \dots \rightarrow F_s^{(1)}$$

atd. $\dots \rightarrow F_s^{(2)}$

Máme tedy rovnice typu

$$(1.61) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_s) = [H_s; \Phi(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_s)] + f(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_s).$$

2. Mutual Interaction of particles

- We will analyze elastic collisions
- Collisions e- neutral, e- ion, e-e.....

We already have the equations

(1.59)

$$\frac{\partial F_s^{(0)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(0)}],$$

$$F_s^{(0)}$$

(1.60)

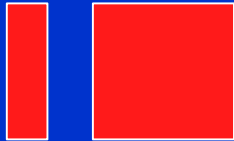
$$\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(1)}] + \int [\sum_{l=1}^s \Phi_{l,s+1}; F_{s+1}^{(0)}] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1}$$

$$F_s^{(1)}$$

atd.

.... What we need is the knowledge of particle interaction
Elementary Processes in a Different Concept

Φ_{ij} is the interaction potential between the particle i and particle j
 F_s is a function of F_{s+1} system of equations



$V^s F_s(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s)$ is the probability that the group s of particles from the set of N particles will be at time t located in the element $d\mathbf{r}_1, \dots, d\mathbf{r}_s, d\mathbf{p}_1, \dots, d\mathbf{p}_s$ regardless of the state of the remaining (N-s) particles.

Interaction of particles

- We will analyze elastic collisions
- Collisions e- neutral, e- ion, e-e.....

Conservation Laws

The force exerted by particle 2 on particle 1 is F_{12}

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad 2.1$$

We will assume that the forces decrease fast enough with r

Laboratory and centrum of gravity of system

Pohyb každé z těchto částic je ve shodě s Newtonovými rovnicemi, tj.

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}.$$

Těžiště systému dvou částic $\mathbf{r}_c$ je nyní určeno rovnicí

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2,$$

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1.$$

~~$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu,$$~~

????.....

Attention μ_1 and μ_2 are dimensionless

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \mu_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \mu_2 \dot{\mathbf{r}}_2.$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$$

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \text{konst} = \mathbf{v}_c.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1(t) &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c, \\ \mathbf{q}_2(t) &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c. \end{aligned}$$

The center of gravity of a two-particle system moves at a constant speed throughout the collision process

Relative velocity during a collision

Relative velocity $\mathbf{g}_{12} = \dot{\mathbf{r}}_{12}$

- Maintaining Relative Velocity
- Movement around the power center

The laws of conservation of energy imply

$$g_{21}^2 = g_{21}'^2$$

Označíme-li $|\mathbf{g}_{21}| = g$ a $|\mathbf{g}_{21}'| = g'$ máme pak, že

$$g = g'$$

The absolute value of the relative velocities is conserved during a collision, only their direction can change

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \mathbf{F}_{21} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{21}$$

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}_{21}}{dt} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{21}$$

????..is ok...

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu$$

To však ale znamená, že naše úloha se redukuje na pohyb fiktivní redukované hmotnosti μ , která se pohybuje kolem silového centra ve vzdálenosti $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Silové centrum je nyní totožné s polohou částice 1.

Motion of a fictitious particle

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}_{21}}{dt} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{21}.$$

- Motion in a plane

To však ale znamená, že naše úloha se redukuje na pohyb fiktivní redukované hmotnosti μ , která se pohybuje kolem silového centra ve vzdálenosti $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Silové centrum je nyní totožné s polohou částice 1. S polohou těžiště ???

Ukážeme si dále, že daný pohyb je pohybem rovinným. K tomuto účelu násobíme (2.25) vektorově vektorem $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Dostáváme

$$(2.26) \quad (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \frac{d^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{dt^2} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{21} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad \text{Parallel Vectors}$$

Protože ale vzájemné působící síly jsou centrální, je pravá strana (2.26) rovna nule. Po kratších úpravách je potom možno (2.26) přepsat do tvaru

$$(2.27) \quad \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 0,$$

odkud dostáváme, že

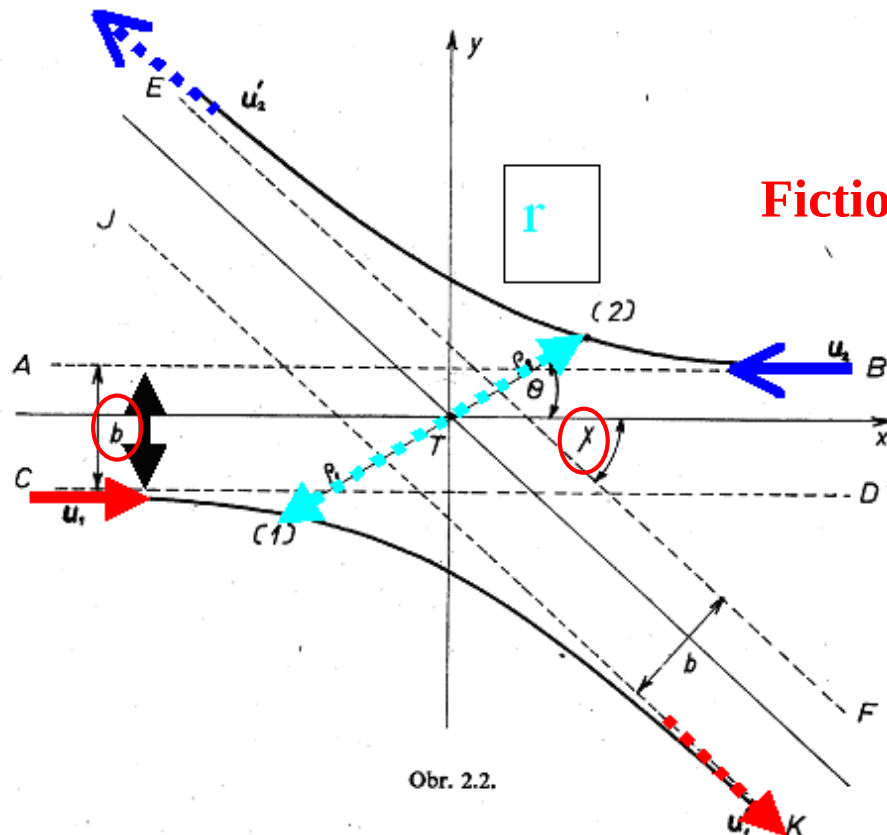
$$(2.28) \quad \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{k},$$

kde $\mathbf{k}$ je konstantní vektor (je určen z počátečních podmínek našeho problému). To ale znamená, že vektor $\mathbf{r}$ i vzájemná rychlost částic leží stále v jedné rovině a tedy námi vyšetřovaný vzájemný pohyb částic je skutečně rovinný.

Center of mass system

(2.30)

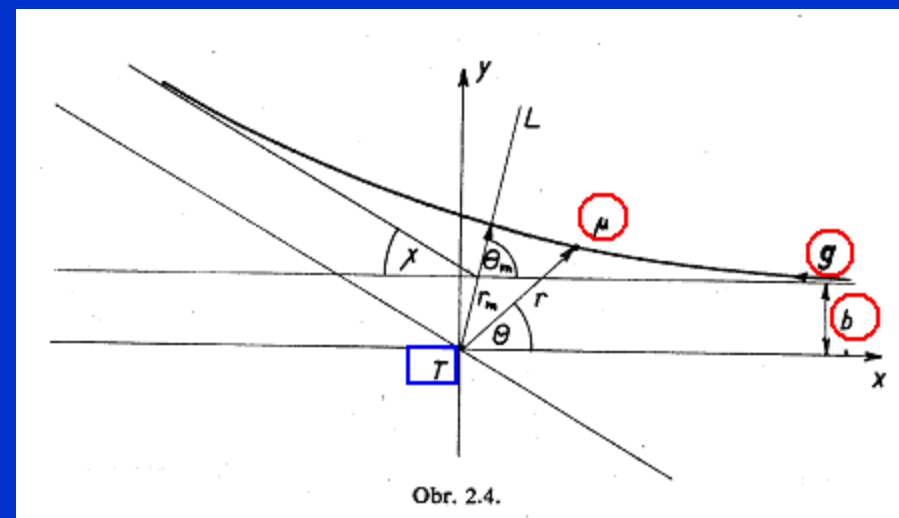
$$\begin{aligned} x_1 &= -\mu_2 r \cos \theta, & x_2 &= \mu_1 r \cos \theta, \\ y_1 &= -\mu_2 r \sin \theta, & y_2 &= \mu_1 r \sin \theta. \end{aligned}$$



Obr. 2.2.

- Motion in the center of mass system
- It is advantageous to work in the center of mass system

Fiction of the motion of a particle in a force field



Obr. 2.4.

K popisu takového pohybu plně postačí výše uvedené integrály pohybu (2.33) a (2.34). Tyto rovnice nám společně s rovnicemi (2.36) a (2.38) tvoří soustavu dvou diferenciálních rovnic

(2.39)

$$\mu b g = \mu r^2 \dot{\theta}$$

(2.40)

$$\frac{1}{2} \mu g^2 = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r)$$

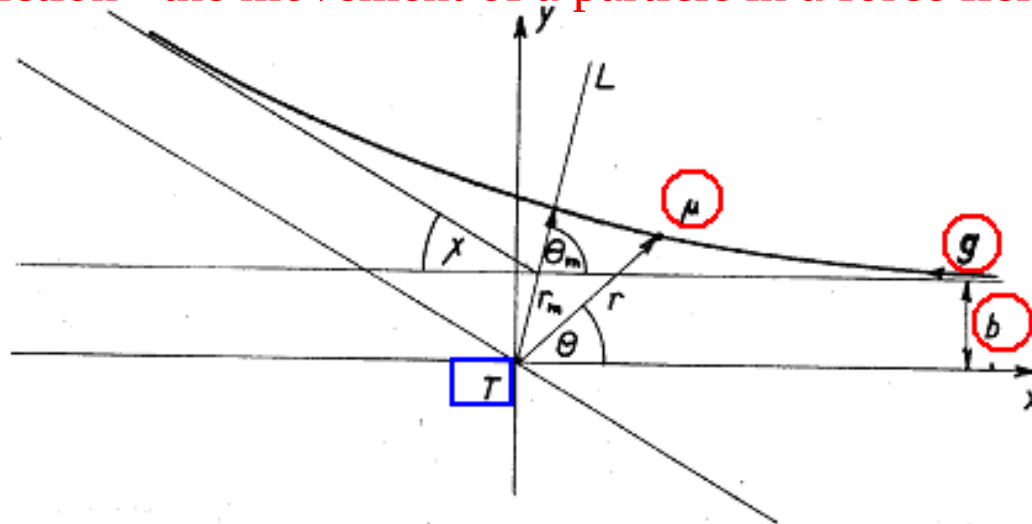
pro dvě neznámé r a θ .

Motion in the Field of Central Forces

- Collision parameter
- Dispersion angle

To však ale znamená, že naše úloha se redukuje na pohyb fiktivní redukované hmotnosti μ , která se pohybuje kolem silového centra ve vzdálenosti $r = r_2 - r_1$. Silové centrum je nyní totožné s polohou částice 1.

Fiction - the movement of a particle in a force field



Obr. 2.4.

Derivation

K popisu takového pohybu plně postačí výše uvedené integrály pohybu (2.33) a (2.34). Tyto rovnice nám společně s rovnicemi (2.36) a (2.38) tvoří soustavu dvou diferenciálních rovnic.

(2.39)

$$\mu b g = \mu r^2 \dot{\theta}$$

(2.40)

$$\frac{1}{2} \mu g^2 = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r)$$

pro dvě neznámé r a θ .

$$\frac{1}{2} \mu g^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + \frac{b^2 g^2}{r^2} \right) + U(r),$$

$$\dot{r}^2 = g^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{U(r)}{\frac{1}{2} \mu g^2} \right)$$

Úhel odklonu χ je nyní podle (2.42)

$$(2.49) \quad \chi = \pi - 2\theta_m = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \left[\frac{r^4}{b^2} - r^2 - \frac{2r^4 U(r)}{\mu g^2 b^2} \right]^{-1/2} dr.$$

Elementary consequences

The laws of conservation of energy imply

$$v_1^2 \text{ before} - v_1^2 \text{ after} = \frac{m_1}{m_2} v_1^2.$$

- Energy transfer in a collision
- A large difference in masses
- Equal masses

What Leads to a Relationship

$$\eta = m_2/m_1$$

$$v_1^2 \text{ before} - v_1^2 \text{ after} = \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 (1 - \cos \chi),$$

Jestliže $m_2 = m_1$, pak $\eta = 1$

$$(2.72) \quad \theta_2 \sim \frac{\chi}{2}, \quad \theta_1 \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}$$

a funkce $\bar{A}$ je maximální

$$(2.73) \quad \bar{A} \cong \frac{1}{2}.$$

Jestliže $m_2 \gg m_1$, pak $\eta \gg 1$

$$(2.74) \quad \theta_2 \sim \frac{m_1}{m_2} \sin \chi, \quad \theta_1 \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}$$

a

$$(2.75) \quad \bar{A} \sim \frac{2m_1}{m_2}.$$

Ar⁺ with Ar

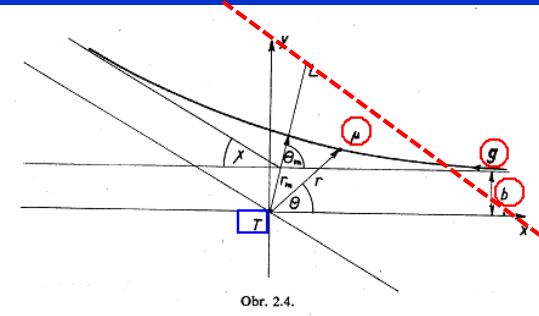
$$\Delta \sim 1/2$$

e⁻ with Ar

$$\Delta \sim 2(1/2000)/40 = 1/40\,000$$

Differential cross-section.

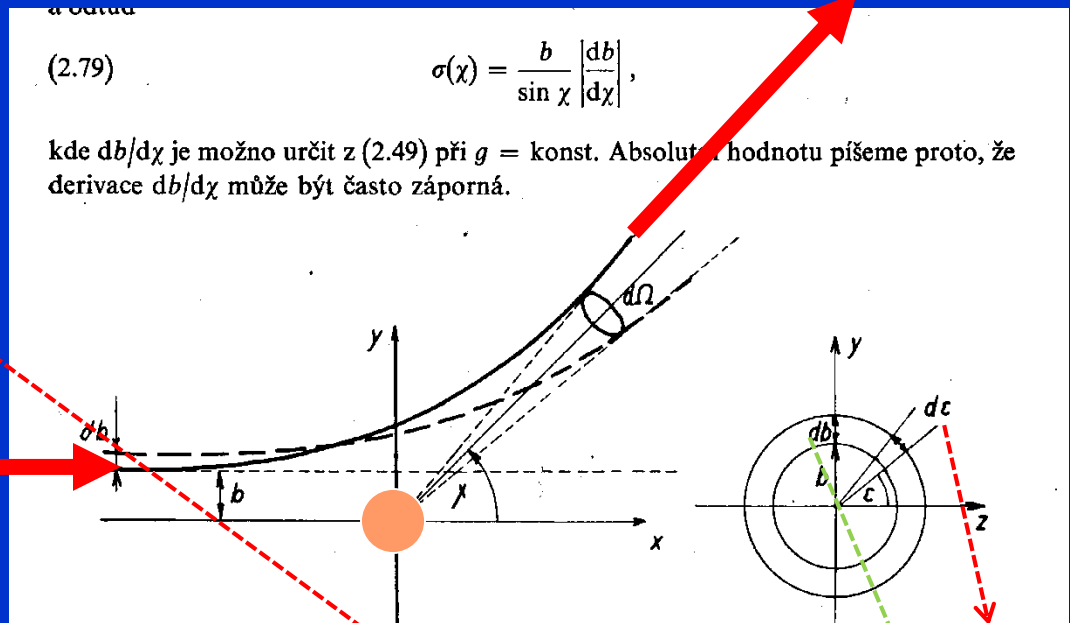
- Elastic collisions.
- Differential cross-section.



Obr. 2.4.

N

N particles per second



$$dn = Nb \, db \, d(\epsilon)$$

$$dn = \sigma(\chi) N \, d\Omega$$

Differential cross-section of elastic collision

$$dn = Nb \, db \, d(\epsilon) = \sigma(\chi) N \, d\Omega = N \, \sigma(\chi) \sin \chi \, d\chi \, d(\epsilon)$$

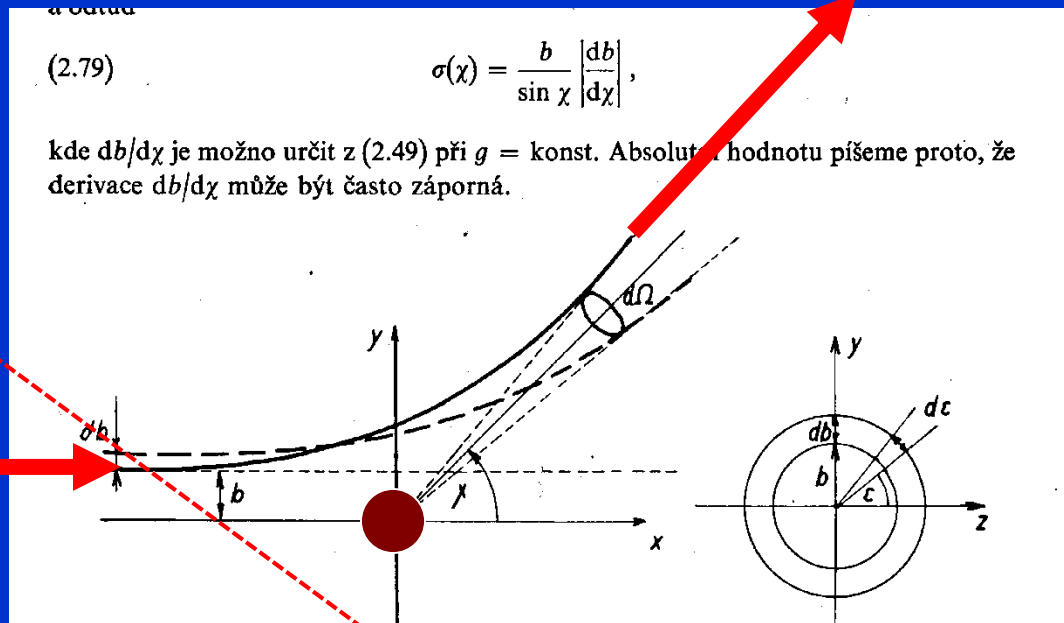
$$\sigma(\chi) = (b/\sin \chi) \cdot db / d\chi$$

Differential cross-section of elastic collision

Total effective cross-section

- Total effective cross-section
- The Problem with the Experiment

$N(\mathbf{v})$



$$dn = N b \, db \, d(\epsilon)$$

$$dn = \sigma(\chi) N \, d\Omega$$

Total cross-section of elastic collision

$$\sigma(\chi) = b \, db / d\chi \sin \chi$$

$$\sigma_c(\mathbf{v}) = \int \sigma(\chi) \, d\Omega = 2\pi \int \sigma(\chi) \sin \chi \, d\chi = \boxed{2\pi \int b \, db}$$

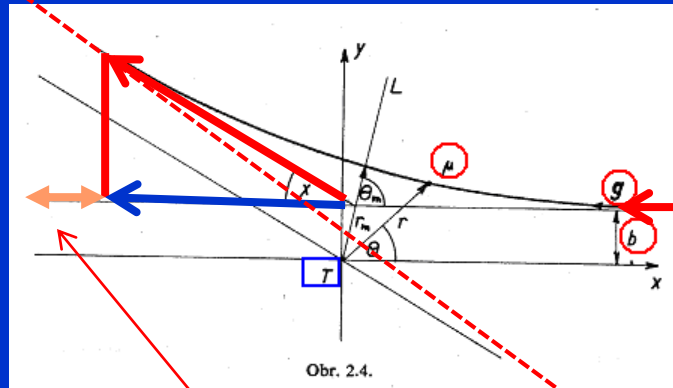
$\chi \dots 0-\pi$

$b \dots 0-\text{infinity}$

Divergent integral ????

$\sigma_c(\mathbf{v}) = \pi D^2$ for the collision of two perfectly flexible spheres

Transport cross-section



$(1 - \cos \chi)$

Transport cross-section

Deflection cross-section

- Transport cross-section.
- cross-section of deflection

Jak jsme si ukázali, celkový účinný průřez σ_e z hlediska klasické mechaniky diverguje, a proto je pro naše další úvahy nepoužitelný. V kinetické teorii proto zavádíme veličiny typu

$$(2.90) \quad Q^{(l)} = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\chi) (1 - \cos^l \chi) \sin \chi \, d\chi = \\ = 2\pi \int_0^\infty (1 - \cos^l \chi) b \, db, \quad l = 1, 2, \dots,$$

které již mohou být v některých případech konečné a mají tedy jistý fyzikální smysl. Nejčastěji se vyskytují veličiny $Q^{(1)}$ a $Q^{(2)}$. Veličinu

$$(2.91) \quad Q^{(1)} = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\chi) (1 - \cos \chi) \sin \chi \, d\chi$$

nazveme transportním průřezem, protože faktor $(1 - \cos \chi) \mu g$ určuje snížení impulsu částice v daném směru (viz obr. 2.4).

Veličinu

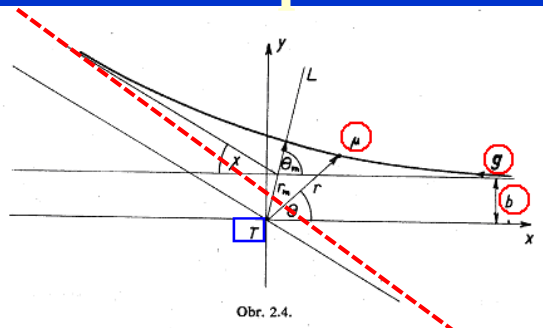
$$(2.92) \quad Q^{(2)} = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\chi) (1 - \cos^2 \chi) \sin \chi \, d\chi$$

nazveme průřezem odklonu, protože faktor

$$(2.93) \quad \frac{\mu g^2}{2} (1 - \cos^2 \chi) = \frac{\mu g^2}{2} \sin^2 \chi$$

charakterizuje přírůstek kinetické energie ve směru kolmém na směr původní;
charakterizuje nám tedy jistým způsobem odklon částice od původního směru.

Coulomb particle scattering



- Coulomb particle scattering
- Rutherford's formula

Úhel odklonu χ je nyní podle (2.42)

$$(2.49) \quad \chi = \pi - 2\theta_m = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \left[\frac{r^4}{b^2} - r^2 - \frac{2r^4 U(r)}{\mu g^2 b^2} \right]^{-1/2} dr.$$

$U(r) = Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 r$.. Interaction potential

Úhel θ_m je nyní podle (2.48) dán vztahem

$$(2.95) \quad \theta_m = \int_{r_m}^{\infty} \frac{1}{r} \left[\frac{r^2}{b^2} - 1 - \frac{Z_1 Z_2 e^2 r}{(4\pi\epsilon_0) \frac{1}{2} \mu g^2 b^2} \right]^{-1/2} dr,$$

kde r_m je nezáporný kořen rovnice

$$(2.96) \quad 1 - \frac{b^2}{r_m^2} - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{(4\pi\epsilon_0) \frac{1}{2} \mu g^2 r_m} = 0.$$

Zavedeme-li nyní parametr

$$(2.97) \quad U(r) = \mu g^2 b_0 / r \quad b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu g^2}$$

a novou proměnnou $u = b/r$, je možno (2.95) upravit na

$$(2.98) \quad \theta_m = \int_0^{u_m} \frac{du}{\left(1 - 2 \frac{b_0}{b} u - u^2 \right)^{1/2}},$$

kde u_m je nyní kladný kořen rovnice

$$(2.99) \quad 1 - 2 \frac{b_0}{b} u_m - u_m^2 = 0;$$

$$(2.100) \quad u_m = -\frac{b_0}{b} + \sqrt{\left(\frac{b_0}{b} \right)^2 + 1}.$$

We gett $g(\chi/2) = b_0/b$, which is the relation χ , b_0 a b

Věnujme se nyní výpočtu diferenciálního srážkového průřezu $\sigma(\chi)$ pro případ coulombovských sil. Ukázali jsme si, že obecný výraz pro $\sigma(\chi)$ je dán vztahem (2.79), tj.

$$(2.113) \quad \sigma(\chi) = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|.$$

Z rovnice (2.106) je ale zřejmé, že

$$(2.114) \quad \left| \frac{db}{d\chi} \right| = \frac{1}{2} \frac{b^2}{b_0} \frac{1}{\cos^2 \frac{\chi}{2}}$$

a

$$(2.115) \quad b = b_0 \cotg \frac{\chi}{2}.$$

Dosadíme-li nyní (2.114) a (2.115) do (2.113), dostáváme téměř okamžitě požadovaný výraz pro $\sigma(\chi)$ ve tvaru

$$(2.116) \quad \sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu^2 g^4} \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\chi}{2}}.$$

Toto je ale takzvaná Rutherfordova formule, kterou je možno získat ve stejném tvaru i na základě úvah kvantové mechaniky.*)

Z (2.116) je zřejmé, že $\sigma(\chi)$ nezávisí na znaménku náboje částic; platí tedy jak pro případ sil odpuzivých, tak i pro případ sil přitažlivých. Z úvah, které se týkaly

*) Podrobněji o tom viz L. D. Landau, E. M. Lifšic: Kvantovaja mechanika. op. cit.

Coulomb particle scattering

Dropped b

Rutherford's formula

- Rutherford's formula
- Experiment.

Věnujme se nyní výpočtu diferenciálního srážkového průřezu $\sigma(\chi)$ pro případ coulombovských sil. Ukázali jsme si, že obecný výraz pro $\sigma(\chi)$ je dán vztahem (2.79), tj.

$$(2.113) \quad \sigma(\chi) = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|.$$

Z rovnice (2.106) je ale zřejmé, že

$$(2.114) \quad \left| \frac{db}{d\chi} \right| = \frac{1}{2} \frac{b^2}{b_0} \frac{1}{\cos^2 \frac{\chi}{2}}$$

a

$$(2.115) \quad b = b_0 \cotg \frac{\chi}{2}.$$

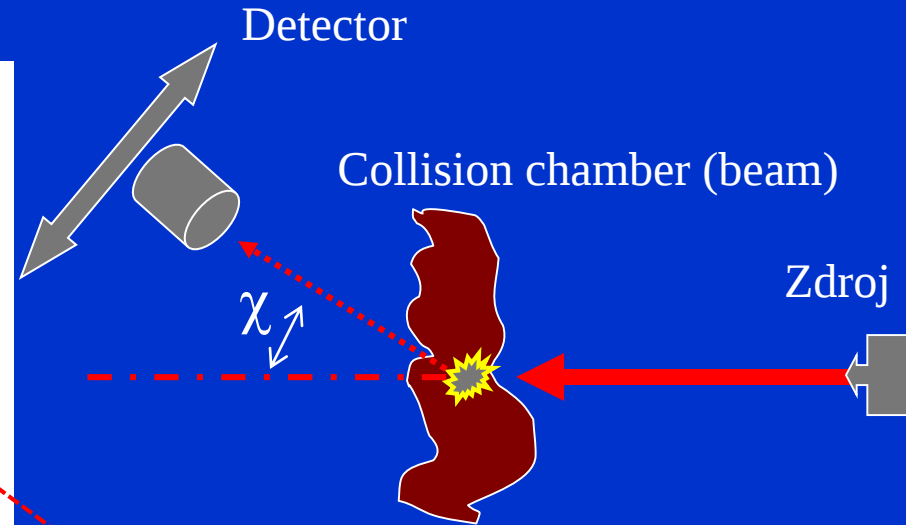
Dosadíme-li nyní (2.114) a (2.115) do (2.113), dostáváme téměř okamžitě požadovaný výraz pro $\sigma(\chi)$ ve tvaru

$$(2.116) \quad \sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu^2 g^4} \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\chi}{2}}.$$

Toto je ale takzvaná Rutherfordova formule, kterou je možno získat ve stejném tvaru i na základě úvah kvantové mechaniky.*)

Z (2.116) je zřejmé, že $\sigma(\chi)$ nezávisí na znaménku náboje částic; platí tedy jak pro případ sil odpuzivých, tak i pro případ sil přitažlivých. Z úvah, které se týkaly

*) Podrobněji o tom viz L. D. Landau, E. M. Lifšic: Kvantová mechanika. op. cit.



The problem is with the determination of σ_c
The problem of long-range collisions

$$\sigma_c(v) = \int \sigma(\chi) d\Omega = 2\pi \int \sigma(\chi) \sin \chi d\chi = 2\pi \int b db$$

Distribution functions

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

The number of particles with a coordinates $\mathbf{r}, \mathbf{v}, t$ in $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}$$

$$f d\vec{r} d\vec{v}$$

Particle concentration

$$n(\vec{r}, t)$$

Mean particle velocity

$$v_0(\vec{r}, t)$$

Flow of quantity ψ through unit area moving with velocity v_0

$$\Psi = \bar{\psi} = \int \psi(\vec{V}) \vec{V} f d\vec{V}$$

kde integraci se miní integrace přes celý rychlostní prostor a přes objem, ve kterém je daný systém uzavřen. Potom střední hodnota funkce $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ je dána výrazem

$$(3.2) \quad \bar{g} = \frac{1}{N} \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}.$$

Podobně pro lokální střední hodnotu (střední hodnotu, která se může obecně měnit v prostoru od bodu k bodu) funkce $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ dostáváme

$$(3.3) \quad \bar{g}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n} \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},$$

kde

$$(3.4) \quad n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

je koncentrace částic v místě $\mathbf{r}$; $n(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$ je potom počet částic v objemu $d\mathbf{r}$ kolem bodu $\mathbf{r}$.*)

Pomocí definice (3.3) můžeme nyní zavést některé důležité veličiny, které budou pro nás v dalším textu nepostradatelné.

Tak například střední rychlost částic v bodě $(\mathbf{r}, t)$ $v_0(\mathbf{r}, t)$ bude podle (3.3) dána vztahem

$$(3.5) \quad \bar{v}_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}.$$

Velmi často bývá výhodné vztahovat rychlost částic ke střední rychlosti $v_0(\mathbf{r}, t)$; zavedeme tedy pojem relativní rychlosti $\mathbf{V}$ vzhledem ke střední rychlosti $v_0(\mathbf{r}, t)$ vztahem

$$(3.6) \quad \mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t).$$

Potom s ohledem na definici $v_0(\mathbf{r}, t)$ (3.5) je zřejmé, že

$$(3.7) \quad \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = 0.$$

V systému, který není v rovnovážném stavu, existuje jistý počet gradientů, jako například koncentrace, relativní rychlosti, teploty atd., které způsobují přenos hmotnosti, impulsu, teploty a dalších veličin, jež charakterizují vlastnosti částic daného systému. Označíme-li tyto veličiny jako $\psi(\mathbf{v})$, pak tok veličiny ψ jednotkovou plochou, která se pohybuje rychlostí v_0 **) za jednotku času bude zřejmě roven

$$(3.8) \quad \Psi = \bar{\Psi} = \int \psi(\mathbf{V}) \mathbf{V} f d\mathbf{V}.$$

*) Pro jednoduchost zápisu budeme místo „v $d\mathbf{r}$ kolem bodu $\mathbf{r}$ “ říkat „v bodě $\mathbf{r}$ “.

**) V dalším textu budeme vždy uvažovat tok plochou, která je v klidu vzhledem ke střední rychlosti částic systému.



Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

2003

CHEMICAL
PHYSICS
LETTERS

Chemical Physics Letters 372 (2003) 728–732

www.elsevier.com/locate/cplett

The influence of electron–electron collisions on electron thermalization in He and Ar afterglow plasmas

D. Trunec ^{a,*}, P. Španěl ^b, D. Smith ^c

^a *Department of Physical Electronics, Faculty of Science, Masaryk University, Kotlářská 2, 611 37 Brno, Czech Republic*

^b *J. Heyrovsky Institute of Physical Chemistry, Academy of Sciences of the Czech Republic, Dolejškova 3, 182 23 Prague 8, Czech Republic*

^c *Centre for Science and Technology in Medicine, School of Postgraduate Medicine, Keele University, Thornburrow Drive, Hartshill, Stoke-on-Trent ST4 7QB, UK*

Received 6 January 2003; in final form 18 March 2003

Abstract

The electron energy distribution functions for electron thermalization in helium and argon afterglow plasmas have been calculated taking into account electron–neutral and electron–electron collisions. This work shows that electron–electron collisions can lead to the Maxwellization of the electron energy distribution function and thus to different rates of electron thermalization.

© 2003 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

„EEDF Cooling in He and in Ar“

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] dr_{s+1} dp_{s+1}$$

2. Boltzmann equation

The time rate of change of the electron distribution function, $f(v, t)$, is described by the Boltzmann equation [16]

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = C_{en} + C_{ee} \quad (1)$$

where C_{en} is the collision term for electron-neutral collisions

$$C_{en} = n_n \frac{m_e}{m_n} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^4 \sigma_T(v) \left(f + \frac{kT_n}{m_e} \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \quad (2)$$

and C_{ee} is the collision term for electron-electron collisions

$$C_{ee} = \Gamma_{ee} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(I_0^0 f + (I_2^0 + J_{-1}^0) \frac{v}{3} \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad (3)$$

$$I_p^0 = \frac{4\pi}{v^p} \int_0^v v'^{2+p} f dv'$$

$$J_p^0 = \frac{4\pi}{v^p} \int_v^\infty v'^{2+p} f dv'$$

$$\Gamma_{ee} = 4\pi \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda,$$

where n_n is the number density of neutral gas, T_n is the gas temperature, m_n is the mass of neutral gas atoms and σ_T is the momentum transfer cross-section for electron-neutral collisions. $\Lambda = \lambda_D/b_0$ (λ_D is the Debye length, b_0 is the impact parameter for a 90° scattering). For our conditions (see be-

Only collisional term

low) $\ln \Lambda = 10$. As can be seen from Eq. (2), only elastic collisions are taken into account. The distribution function has the normalization

$$n_e = 4\pi \int_0^\infty v^2 f(v) dv, \quad (4)$$

so that the function

$$F(v) = \frac{4\pi v^2}{n_e} f(v)$$

is a velocity distribution function.

The initial distribution for the calculation was chosen as

$$f(v, 0) = \frac{n_e}{4\pi k T_n \sqrt{\pi}} \frac{1}{v^2} \exp \left(- \left(\frac{v - v_0}{k T_n} \right)^2 \right) \quad (5)$$

with $v_0 = 1.19 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$. This v_0 corresponds to electrons with energies in a narrow peak round 4 eV. The peak width is $2kT_n$.

„EEDF Cooling in He and in Ar“

3.2. Electron-neutral collisions

Let us study first the energy relaxation due to electron-neutral collision only. For simplicity let us consider that the molecules of neutral gas are at rest ($T_n = 0$ K) and that the momentum transfer cross-section does not depend on the velocity, which is good approximation for helium.

Thus we obtain the equation

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = n_n \frac{m_e}{m_n} \sigma_T \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^4 f). \quad (6)$$

This equation can be solved analytically; the solution is

$$f(v, t) = \frac{1}{v^4} g\left(at - \frac{1}{v}\right), \quad (7)$$

where $a = n_n \frac{m_e}{m_n} \sigma_T$ and g is an arbitrary function, which must be determined from initial condition. For our initial condition (5) we obtain

$$f(v, t) = \frac{n_e}{4\pi k T_n \sqrt{\pi}} \frac{1}{v^2 (atv - 1)^2} \times \exp\left(-\left(\frac{\frac{v}{atv-1} + v_0}{k T_n}\right)^2\right). \quad (8)$$

The time development of this distribution function is shown in Fig. 1.

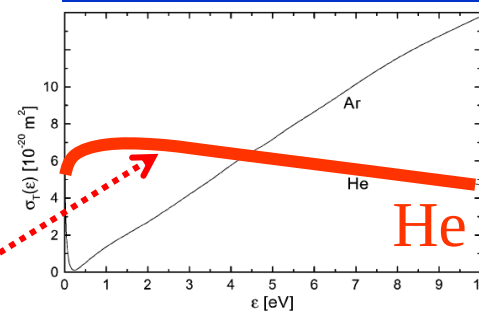


Fig. 2. The momentum transfer cross-sections for electron-argon [20] and electron-helium elastic collisions [21].

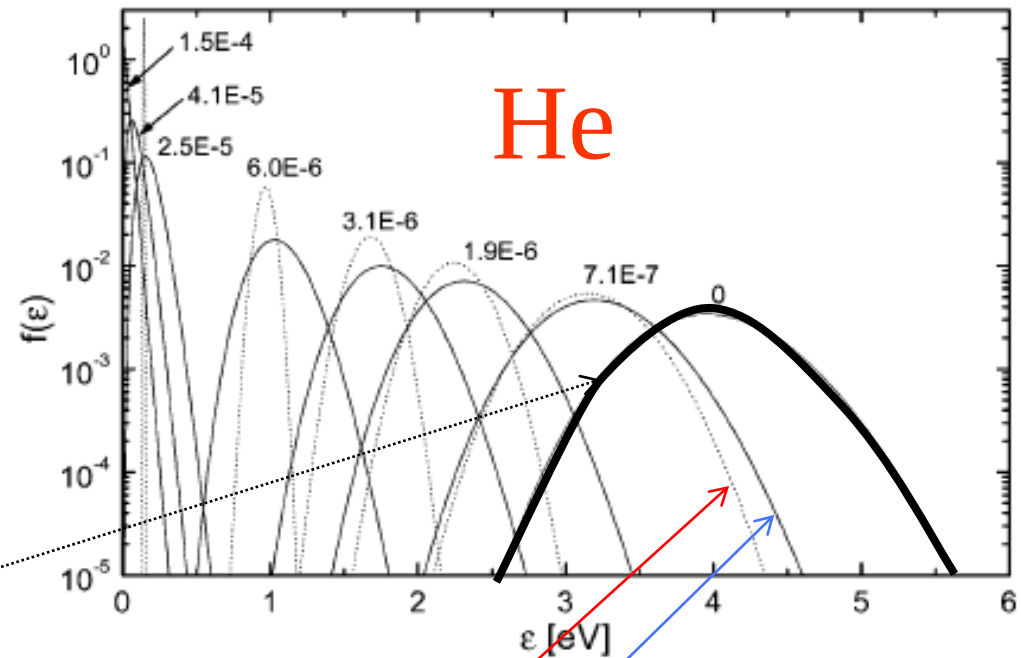


Fig. 1. The time dependence of the electron distribution function in helium afterglow plasma. The neutral gas number density is $n_n = 1.65 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, the neutral gas temperature: dotted line, $T_n = 0$ K; full line, $T_n = 293$ K. The time in seconds is given by the numbers near each curve. Electron-electron collisions are not taken in the account.

„EEDF Cooling in He and in Ar“

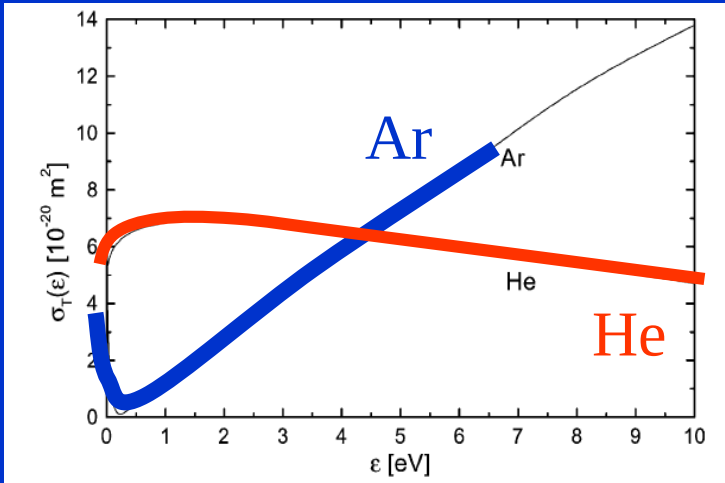


Fig. 2. The momentum transfer cross-sections for electron-argon [20] and electron-helium elastic collisions [21].

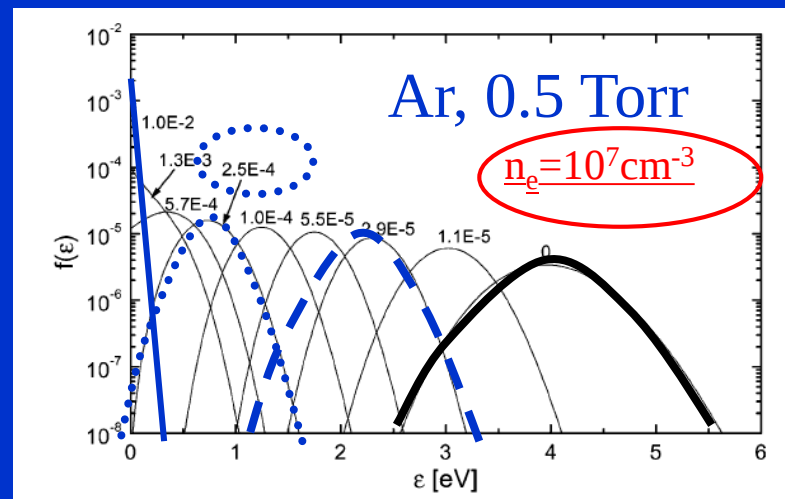


Fig. 3. The time dependence of the electron distribution function in argon afterglow plasma. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is $T_n = 293 \text{ K}$, the electron number density is $n_e = 10^7 \text{ cm}^{-3}$, $n_e/n_n = 6 \times 10^{-10}$. The time in seconds is given by the numbers near each curve.

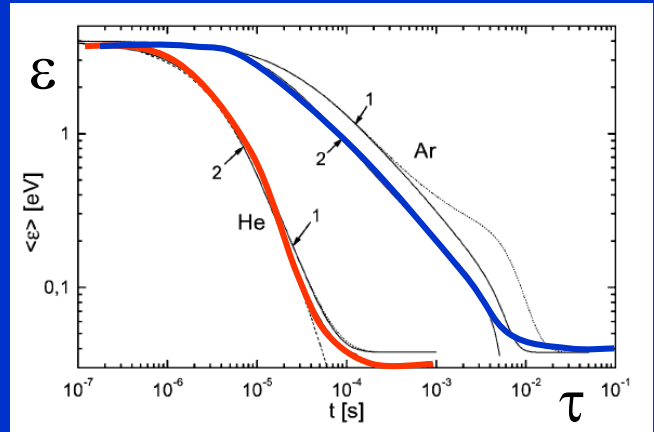


Fig. 5. The time dependence of the mean electron energy in helium and argon afterglow plasmas. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is $T_n = 293 \text{ K}$. Electron number densities: 1 - $n_e = 10^7 \text{ cm}^{-3}$ ($n_e/n_n = 6 \times 10^{-10}$), 2 - $n_e = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ($n_e/n_n = 6 \times 10^{-7}$). Dotted lines, calculations without electron-electron collisions; dashed line, calculation without electron-electron collisions and $T_n = 0 \text{ K}$.

„EEDF Cooling in He and in Ar“

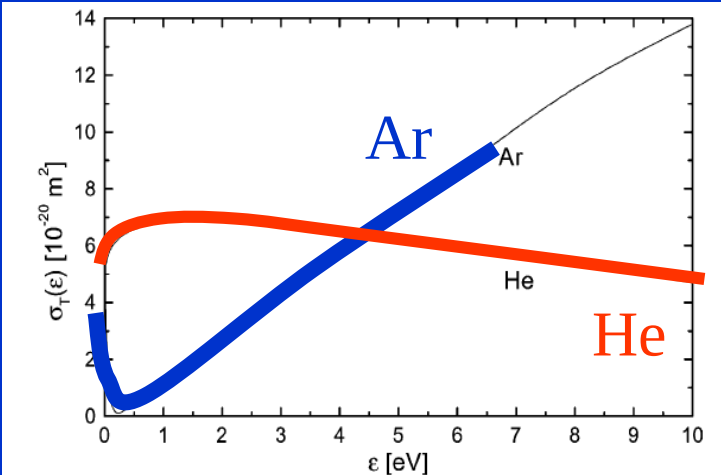


Fig. 2. The momentum transfer cross-sections for electron-argon [20] and electron-helium elastic collisions [21].

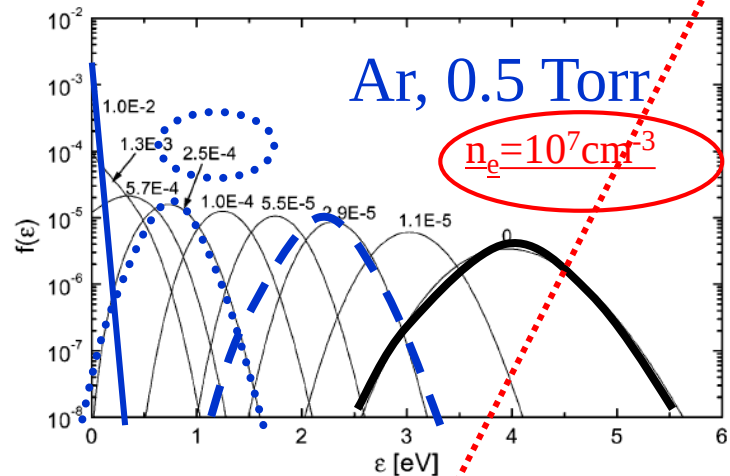


Fig. 3. The time dependence of the electron distribution function in argon afterglow plasma. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is $T_n = 293$ K, the electron number density is $n_e = 10^7$ cm⁻³, $n_e/n_n = 6 \times 10^{-10}$. The time in seconds is given by the numbers near each curve.

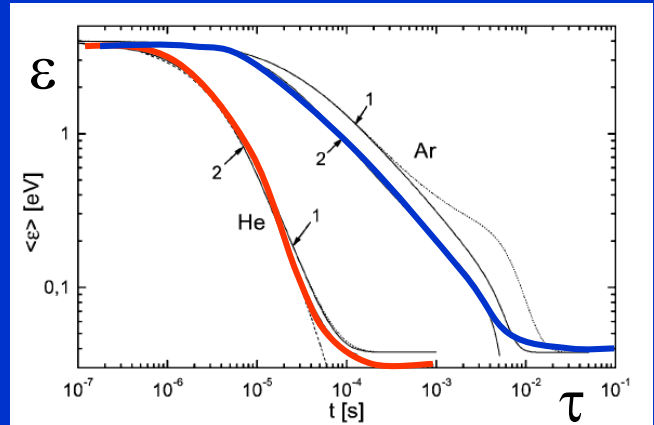


Fig. 5. The time dependence of the mean electron energy in helium and argon afterglow plasmas. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is $T_n = 293$ K. Electron number densities: 1 – $n_e = 10^7$ cm⁻³ ($n_e/n_n = 6 \times 10^{-10}$), 2 – $n_e = 10^{10}$ cm⁻³ ($n_e/n_n = 6 \times 10^{-7}$). Dotted lines, calculations without electron-electron collisions; dashed line, calculation without electron-electron collisions and $T_n = 0$ K.

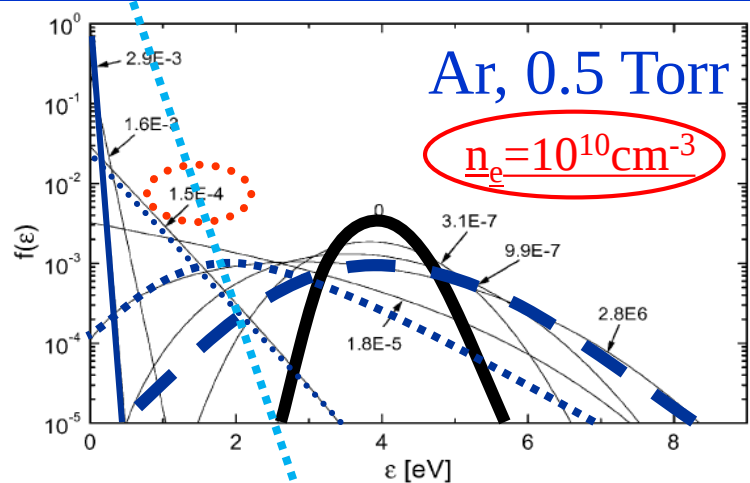


Fig. 4. The time dependence of the electron distribution function in argon afterglow plasma. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is $T_n = 293$ K, the electron number density is $n_e = 10^{10}$ cm⁻³, $n_e/n_n = 6 \times 10^{-7}$. The time in seconds is given by the numbers near each curve.

3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému N částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce f_i jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování f_i , za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvillov teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$ a částice 2 v bodě $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)$ jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla $\mathbf{F}_i$, působící na i -tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element μ prostoru se středem v bodě $\mathbf{r}, \mathbf{v}$, o velikosti $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$; v čase t obsahuje tento $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ částic i -tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase $t + dt$ vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemovém elementu $d\mathbf{r}$ kolem bodu $\mathbf{r} + \mathbf{v} dt$ a v rychlostním elementu $d\mathbf{v}$ kolem bodu $\mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m_i) dt$ (předpokládáme, že síla $\mathbf{F}_i$ se téměř nezmění uvnitř $d\mathbf{r}$ za dt). Podle Liouvillova teorému tedy platí

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m) dt, t + dt) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i = f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i.$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

(3.32)

$$\frac{\delta_e f_i}{\delta t} d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt$$

jako změnu počtu částic i -tého druhu v $d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i$ způsobenou srážkami za čas dt , musí zřejmě platit

(3.33)

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m_i) dt, t + dt) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i - f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t} d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt.$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

(3.34)

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}.$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen $(\delta_e f_i/\delta t)$, kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic i -tého druhu, které se dostanou do objemového elementu $d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i$ vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas dt (označi-

(1.15')

$$\frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0,$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace je 1 a proto je

$$\int d\Gamma = \int d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = \text{const},$$

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina... proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“

BBGKY equation applied for $s=1, s=2$

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

$$(1.52) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] d\mathbf{r}_{s+1} d\mathbf{p}_{s+1},$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s=1$ a $s=2$. Pro $s=1$ dostaneme

(1.54)

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{r}_1} H_1 \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} F_1 - \nabla_{\mathbf{p}_1} H_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} F_1 + \frac{N-1}{V} \int (\nabla_{\mathbf{r}_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{\mathbf{p}_1} F_2 - \nabla_{\mathbf{p}_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} F_2) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2$$

a pro $s=2$ dostaneme

$$(1.55) \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V} \sum_{i=1}^2 \int [\Phi_{i3}; F_3] d\mathbf{r}_3 d\mathbf{p}_3.$$

Taylor function for G

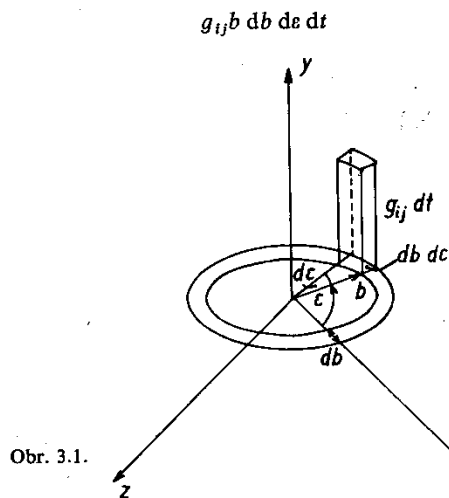
$$G(\vec{A} + \vec{X}) = G(\vec{A}) + \vec{X} \cdot \nabla_A G$$

me $\sum_j A_{ij}^+ d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt$), minus počet částic i -tého druhu, které tento objemový element opustí vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval dt (označíme $\sum_j A_{ij}^- d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt$). Symbolicky tedy můžeme psát

$$(3.35) \quad \frac{\delta_e f_i}{\delta t} d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt = \sum_j (A_{ij}^+ - A_{ij}^-) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt,$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu $A_{ij}^- d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt$. Nechť částice i -tého druhu je umístěna v bodě $\mathbf{r}$ a nechť se pohybuje rychlostí $\mathbf{v}_i$. Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu dt sráží s částicí j -tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic $g_{ij} = |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|$, srážkovým parametrem b a úhlem ϵ mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice i -tého druhu za čas dt s částicemi j -tého druhu, jejichž relativní rychlost je g_{ij} , srážkový parametr je v mezích $b, b + db$ a úhel v mezích $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$ potom bude roven počtu částic j -tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu



Obr. 3.1.

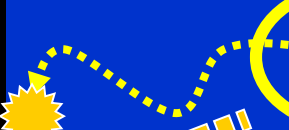
(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici $f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t)$ je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j.$$

Celkový počet srážek částice i -tého druhu se všemi částicemi druhu j -tého za čas dt potom zřejmě bude

$$(3.36) \quad dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j,$$

After the collision
leaves the element



All such j -th particles
hits the i -th particle at the origin

$$dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j$$

The i particles in the element is:

$$f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i.$$

$$d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i, \text{ je } A_{ij}^- d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt$$

Number of collisions

= the number of particles that leave the $d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i$ element is:

$$A_{ij}^- d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt = d\mathbf{r} d\mathbf{v}_i dt \iiint f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) g_{ij} b db d\epsilon dv_j.$$

“volume” element

$$g_{ij} b db d\epsilon dt$$

Number of particles
in an element

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j, t) g_{ij} b db d\epsilon dt$$

Next steps

- Summarize what is expected of the participants.
- Summarize what is expected of you.