VARIACE KONSTANT, EULEROVY ROVNICE

1) Variace konstant pro soustavy rovnic

Př $y' = 3y - 6z + \dfrac{e^{2t}}{2+e^t}$

$z' = y - 2z$

$$\boxed{Y' = AY + \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}}{2+e^t} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

1. postup

λ-matice $\left(\begin{array}{cc|c} \lambda-3 & 6 & \frac{e^{2t}}{2+e^t} \\ -1 & \lambda+2 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots$

2. postup

1. krok ... s nulovou pravou stranou (vynecháme $\frac{e^{2t}}{2+e^t}$)

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 6 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \overset{+(\lambda-3)II.}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 6+(\lambda-3)(\lambda+2) \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

$6 + \lambda^2 - \lambda - 6 = \lambda(\lambda-1)$ $\quad \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$

$z(t) = \underline{a \cdot 1} + \underline{b \cdot e^t}$

$-y + z' + 2z = 0$

$y = z' + 2z = be^t + 2a + 2be^t = \underline{2a} + \underline{3be^t}$

F.S. $y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ $\quad$ řešení $a \cdot y_1 + b \cdot y_2$

2. krok $\quad a(t)y_1(t) + b(t)y_2(t) =: \begin{pmatrix} y_P \\ z_P \end{pmatrix}$ $\quad$ dosadíme

$Y' = a'(t)y_1 + b'(t)y_2 + a(t)y_1' + b(t)y_2'$

$AY = a(t)Ay_1 + b(t)Ay_2$

$Y' = AY + \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \rightsquigarrow a'(t)y_1 + b'(t)y_2 = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} a' \cdot 2 &+ b' \, 3e^t = \frac{e^{2t}}{2+e^t} \\ a' \, 1 &+ b' \, e^t = 0 \end{aligned}}$$

I. $-2 \cdot$ II. $\quad b' e^t = \dfrac{e^{2t}}{2+e^t}$

$$b = \int \frac{e^t}{2+e^t} \, dt = \ln(2+e^t)$$

$$a' = -e^t b' = -\frac{e^{2t}}{2+e^t}$$

$$a = -\int \frac{e^{2t}}{2+e^t} = -\int \frac{z}{2+z} \, dz$$

$$z = e^t \qquad = -\int \frac{z+2-2}{2+z} \, dz$$
$$dz = e^t dt$$

$$a = \int -1 + \frac{2}{2+z} \, dz = -z + 2\ln(2+z)$$
$$= -e^t + 2\ln(2+e^t)$$

Partikulární řešení:

$$a(t) y_1 + b(t) \cdot y_2 = \left(-e^t + 2\ln(2+e^t)\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \ln(2+e^t) \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Všechna řešení:

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= a \cdot 2 + b \cdot 3e^t + \left(-e^t + 2\ln(2+e^t)\right) \cdot 2 + \ln(2+e^t) \cdot 3e^t \\ z(t) &= a + b e^t + \left(-e^t + 2\ln(2+e^t)\right) + \ln(2+e^t) \cdot e^t \end{aligned}}$$

$$\boxed{t \in \mathbb{R}}$$

2. Eulerovy rovnice

$$\boxed{a_n t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 t\, y' + a_0 y = b(t)}$$

lineární rovnice s nekonstantními koeficienty
(koeficienty závisí na t .... speciálním způsobem)

Př. $t^2 y'' - t y' + y = \dfrac{t}{1+\ln t}$

1. způsob: dosadíme $y(t) = t^{\lambda}$ ... $t>0$

$$y' = \lambda \cdot t^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)\, t^{\lambda-2}$$

1. krok

$$\cancel{t^2} \cdot \lambda(\lambda-1)\cancel{t^{\lambda-2}} - \cancel{t} \cdot \lambda \cancel{t^{\lambda-1}} + \cancel{t^{\lambda}} = 0 \qquad /: t^{\lambda}$$

$\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0$ .. charakteristický polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

vícenásobný kořen ⇝ vyšší mocniny logaritmu

F.S. $y_1(t) = t^1$, $y_2(t) = t^1 \cdot \ln t$

2. krok Variace konstant

obecně: $a' \cdot y_1 + b' y_2 = 0$

$$a' y_1' + b' y_2' = \frac{t}{\ln t + 1} \cdot \frac{1}{t^2}$$

V našem případě: $a' t + b' t \ln t = 0$

$$a' \cdot 1 + b'(\ln t + 1) = \frac{1}{t(\ln t + 1)}$$

I. − t·II.

$$b'(\cancel{t \ln t} - \cancel{t \ln t} - \cancel{t}) = -\frac{\cancel{t}}{t(\ln t + 1)}$$

$$b' = -\frac{1}{t(\ln t + 1)}$$

$$b = -\int \frac{1}{t(\ln t+1)}\,dt = \ln|\ln t + 1|$$

$$a' = -b' \cdot \frac{t}{t} \cdot \ln t = \frac{\ln t}{(\ln t+1)t}$$

$$a = \int \frac{\ln t}{(1+\ln t)\cdot t}\,dt = \int \frac{z}{1+z}\,dz = \int \frac{1+z-1}{1+z}\,dz$$

$$z = \ln t$$
$$dz = \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \int 1 - \frac{1}{1+z}\,dz$$

$$= z - \ln|1+z|$$

$$= \ln t - \ln|1+\ln t|$$

Partikulární řešení:

$$a(t)y_1 + b(t)y_2 = \left(\ln t - \ln|1+\ln t|\right)\cdot t + \ln|1+\ln t|\cdot t\cdot \ln t$$

Všechna řešení:

$$\boxed{y(t) = a\cdot t + b\cdot t\cdot \ln t + \left(\ln t - \ln|1+\ln t|\right)\cdot t + \ln|1+\ln t|\cdot t\cdot \ln t \qquad t\in\left(0,\frac{1}{e}\right) \;;\; t\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)}$$

2. způsob řešení: substituce $s = \ln t\,;\ t = e^s$

převede Eulerovu rovnici na rovnici s konstantními koeficienty. (viz stránka, kapitola Obecné lineární problémy)