1. Určete počet prvků množiny všech permutací v $\mathbb{S}_5$, které jsou konjugované s permutací $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Tvoří tato množina podgrupu $\mathbb{S}_5$? NE

2. Najděte nejmenší podgrupu $\mathbb{S}_5$, která obsahuje prvek $\pi = (1\,2\,3\,4\,5)$, tj. $\langle \pi \rangle_{\mathbb{S}_5}$. Kolik má prvků?

① $(1\,2\,3)(4\,5)$ $\qquad$ $(1)(2)(3)(4)(5)$

$(a\,b\,c)(d\,e)$

$(d\,e) = (e\,d)$

$\boxed{2 \cdot \binom{5}{3} = 20}$

$(a\,b\,c)$

$(a\,c\,b)$

②

3. Ukažte, že platí:

(a) $\langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$
(b) $\langle (1,0),(0,1) \rangle_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
(c) $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathrm{NSD}(a,b)\mathbb{Z}$
(d) $\langle \{(a\,b) \mid a, b \leq n\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$ ...... lin. alg.
(e) $\langle \{(a \quad a+1) \mid a < n\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$ ...... použít konjugaci: $a, b \in G \rightarrow a^{-1} \in G \rightarrow a^{-1}ba \in G$
(f) $\langle \{(1\,2), (1 \ldots n)\} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \mathbb{S}_n$

4. Rozhodněte, zda existuje v grupě $\mathbb{S}_{17}$ prvek řádu
(a) 71 (b) 72 (c) 80.

$\pi = \underbrace{(\quad)}_{l_1}\underbrace{(\quad)}_{l_2}\underbrace{(\quad)}_{l_3}$

$\rightarrow \mathrm{ord}(\pi) = \mathrm{NSN}(l_1, l_2, l_3)$

a) $71 = \mathrm{NSN}(\ldots\ldots)$

$S_{17} \rightarrow l_i \leq 17$

$\overset{\exists i}{\Rightarrow} l_i = 71$ } ↯ NE

b) $72 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{8} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{9}$

$\mathrm{NSN}(\underbrace{\ldots}_{8,9}) = 72$

$\underbrace{(\quad\quad)}_{8}\underbrace{(\quad\quad)}_{9}$ $\qquad 8 + 9 = 17$

ANO

5. Buď G grupa řádu 60, $H \leq G$ řádu 5 a $K \leq G$ buď v G indexu 5. Je $H \cap K$ komutativní?

$|H| = 5$ $\qquad$ $H \cap K \leq K, H$ $\qquad$ ↓ $|K| = 12$

$|H \cap K| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ $\qquad$ $|H \cap K| \in \{1, 5\}$

$1 =$

→ grupa řád. 1 je komutativní

6. Najděte všechny homomorfismy a popište příslušná jádra a obrazy

(a) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$
(b) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$
(c) ze $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$
(d) ze $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$ do $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$
(e) ze $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0,0))$
(f) ze $(\mathbb{Z}_2, +, -, 0)$ do $(\mathbb{S}_n, \circ, ^{-1}, id)$

• triviální homomorf. z $(G, \cdot, ^{-1}, id)$ do $(H, +, -, 0)$:

$$\varphi : G \longrightarrow H$$
$$a \longmapsto 0$$

$\to \operatorname{Ker} \varphi = G$

$\to \operatorname{Im} \varphi = 0$

• homomorfismus je určen obrazy generátorů

• φ, $\operatorname{ord}(\varphi(a)) \mid \operatorname{ord}(a)$
$\quad\quad\quad\ \ \, v\ H \quad\quad\quad\ \ v\ G$

• hom. stačí ověřit pro binární operaci

$\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

a) $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}}$

$\varphi(1) = k \ \ldots\ldots := f_k$

$\boxed{f_k(x) = k \cdot x}$

$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{x}$

$f_k(x+y) = k(x+y) = k \cdot x + k \cdot y =$

$= f_k(x) + f_k(y)$ ✓

$k \neq 0$:

$\operatorname{Ker} f_k = \{0\}$

$\operatorname{Im} f_k = k\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

$\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}_n}$

$\varphi(1) = k$

$\varphi(2) = 2 \cdot k$

$\vdots$

$\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\varphi(0)}} = \varphi(n) = n \cdot k$

$\Rightarrow 0 = n \cdot k$

$\Rightarrow k = 0$

pouze triv. homomorfismus

(f) ze $(\mathbb{Z}_2, +, -, 0)$ do $(\mathbb{S}_n, \circ, ^{-1}, id)$

$\operatorname{ord}(\varphi(a)) \mid \underbrace{\operatorname{ord}(a)}_{=2}$

$\Rightarrow \operatorname{ord}(\varphi(a)) \in \{1, 2\}$

$$\varphi_\sigma: \quad 0 \longrightarrow id, \qquad 1 \longrightarrow \boxed{\sigma}$$

σ … složení nez. transpozic

$(12)(34)(12)(34) = id$

$\varphi(0+0)$ ✓
$\varphi(0+1)$ ✓
$\varphi(1+0)$ ✓
$\varphi(1+1)$ ✓

$\operatorname{Ker} \varphi_\sigma = \{0\}$

$\operatorname{Im} \varphi_\sigma = \{id, \sigma\} \subseteq S_n$

$\operatorname{ord}(\sigma) = 2$

$(a\,b)$

$(a\,b)(c\,d)$

$NSN(2,2) = 2$

11.* Dokažte, že grupy $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{A}_4$ a $\mathbb{Z}_{12}$ jsou po dvou neizomorfní.

$\operatorname{ord}(\varphi(a)) = \operatorname{ord}(a)$

$a \qquad \varphi(a)$