

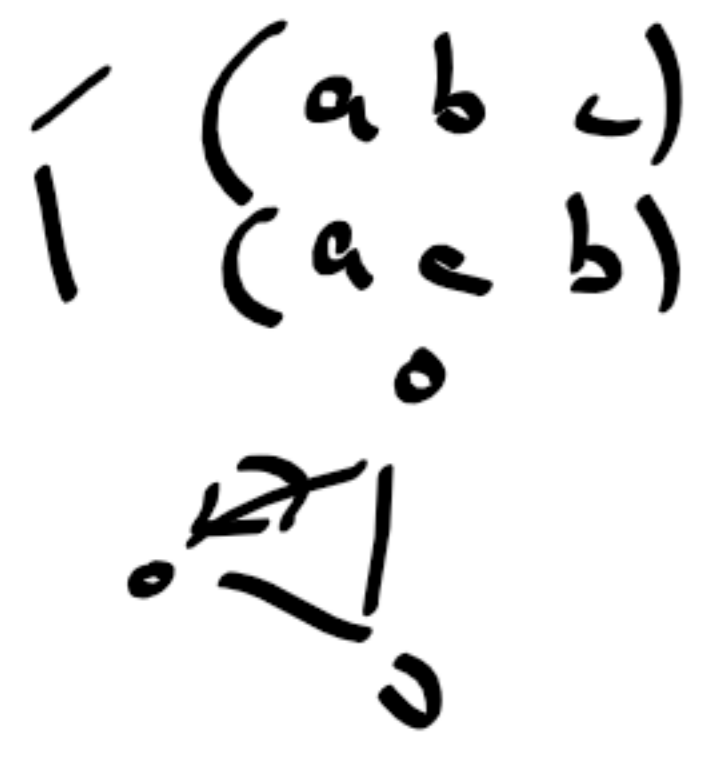
1. Určete počet prvků množiny všech permutací v S_5 , které jsou konjugované s permutací $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Tvoří tato množina podgrupu S_5 ? **NE**

2. Najděte nejmenší podgrupu S_5 , která obsahuje prvek $\pi = (12345)$, tj. $\langle \pi \rangle_{S_5}$. Kolik má prvků?

① $(123)(45)$ $(1)(2)(3)(4)(5)$
 $(abc)(de)$
 (ed)

$2 \cdot \binom{5}{3} = 20$



②

3. Ukažte, že platí:

(a) $\langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$

(b) $\langle (1,0), (0,1) \rangle_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(c) $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}} = \text{NSD}(a, b)\mathbb{Z}$

(d) $\langle \{(ab) \mid a, b \leq n\} \rangle_{S_n} = S_n \dots$ lin. alg.

(e) $\langle \{(a \ a+1) \mid a < n\} \rangle_{S_n} = S_n \dots$ použít konjugaci: $a, b \in G \rightarrow a^{-1} \in G$

(f) $\langle \{(12), (1 \dots n)\} \rangle_{S_n} = S_n \rightarrow a^{-1}ba \in G$

4. Rozhodněte, zda existuje v grupě S_{17} prvek řádu

(a) 71 (b) 72 (c) 80.

$\pi = (\underbrace{\quad}_{l_1}) (\underbrace{\quad}_{l_2}) (\underbrace{\quad}_{l_3})$

$\rightarrow \text{ord}(\pi) = \text{NSD}(l_1, l_2, l_3)$

a) 71 = NSD(...)

$S_{17} \rightarrow l_i \leq 17$
 $\Rightarrow \exists l_i = 71$ } \downarrow **NE**

$\text{NSD}(\dots) = 72$
 8, 9

b) 72 = $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}_{8} \cdot \underbrace{3}_{9}$

$(\underbrace{\quad}_{8}) (\underbrace{\quad}_{9})$ $8+9=17$
ANO

5. Buď G grupa řádu 60, $H \leq G$ řádu 5 a $K \leq G$ buď v G indexu 5. Je $H \cap K$ komutativní?

$|H| = 5$ $H \cap K \leq K, H$ $\downarrow |K| = 12$
 $|H \cap K| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ $|H \cap K| \in \{1, 5\}$
 \rightarrow grupa vel. 1 je komutativní

6. Najděte všechny homomorfismy a popište příslušná jádra a obrazy

- (a) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$
- (b) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$
- (c) ze $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$
- (d) ze $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0, 0))$ do $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$
- (e) ze $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0, 0))$
- (f) ze $(\mathbb{Z}_2, +, -, 0)$ do $(\mathbb{S}_n, \circ, ^{-1}, id)$

• triviální homomorf.
 $\varphi: (G, \cdot, ^{-1}, id) \rightarrow (H, +, -, 0)$
 $a \mapsto 0$
 $\rightarrow \text{Ker } \varphi = G$
 $\rightarrow \text{Im } \varphi = 0$

• homomorfismus je určen obrazy generátorů

• $\varphi, \text{ord}(\varphi(a)) \mid \text{ord}(a)$
 $\quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee$
 $\quad \quad \quad H \quad \quad \quad G$

• hom. staví určit pro binárních operací

a) $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}}$

$\varphi(1) = k \dots := f_k$

$f_k(x) = k \cdot x$
 $\underbrace{1 + \dots + 1}_x$

$f_k(x+y) = k(x+y) = k \cdot x + k \cdot y = f_k(x) + f_k(y)$ ✓

$\varphi(a * b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

$k \neq 0$:

$\text{Ker } f_k = \{0\}$

$\text{Im } f_k = k\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}, n \neq 0$

$\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}_n}$

$\Rightarrow 0 = n \cdot k$

$\varphi(1) = k$

$\Rightarrow k = 0$

$\varphi(2) = 2 \cdot k$

0

⋮

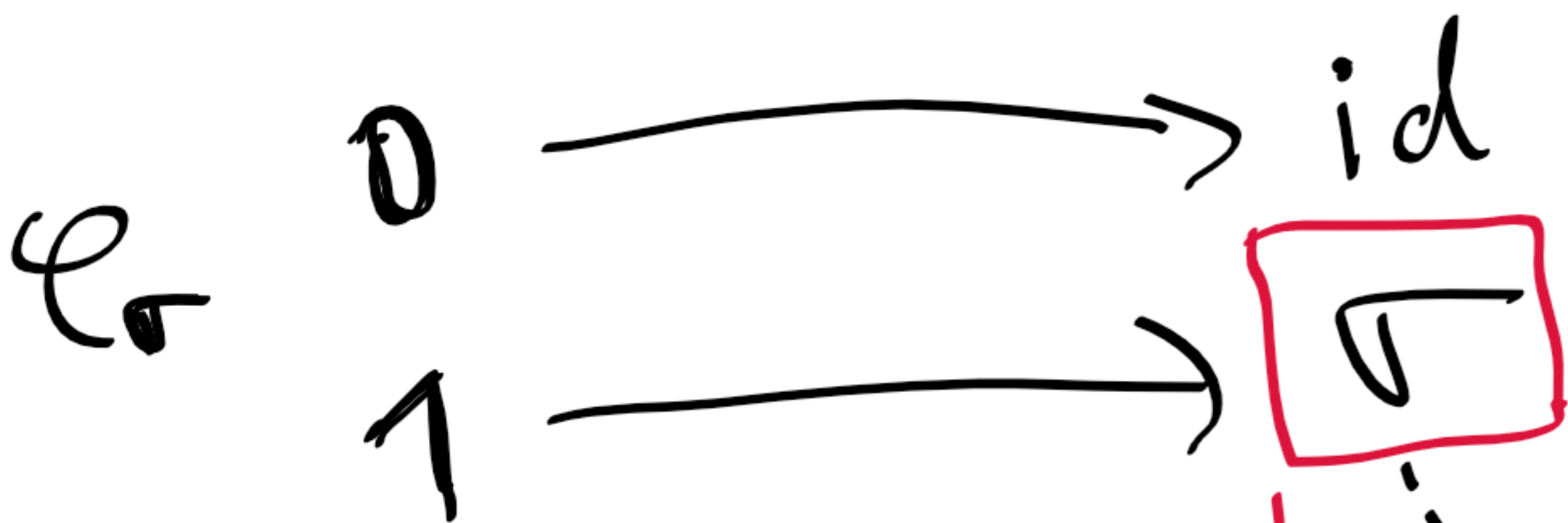
pouze triv. homomorfismus

"

$\varphi(0) = \varphi(n) = n \cdot k$

(f) ze $(\mathbb{Z}_2, +, -, 0)$ do $(S_n, \circ, ^{-1}, id)$

$$ord(\varphi(a)) \mid ord(a)$$



$$\Rightarrow ord(\varphi(a)) \mid ord(a)$$

sloužíme. Transpozice

$$(12)(34)(12)(34) = id$$

- $\varphi(0+0)$ ✓
- $\varphi(0+1)$ ✓
- $\varphi(1+0)$ ✓
- $\varphi(1+1)$ ✓

$$Ker \varphi_\sigma = \{0\}$$

$$Im \varphi_\sigma = \{id, \sigma\}$$

\cong
 \mathbb{Z}_2

$$ord(\sigma) = 2$$

$$(ab)$$

$$(ab)(cd)$$

$$NSN(2,2) = 2$$

11.* Dokažte, že grupy $S_3 \times \mathbb{Z}_2$, A_4 a \mathbb{Z}_{12} jsou po dvou neizomorfní.

$$ord(\varphi(a)) = ord(a)$$

