ApDR - 13. PŘEDNÁŠKA

MINULE: Modely nervového impulsu

FitzHugh-Nagumo model s difúzí

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_t u &= u(1-u)(u-a) - w + \partial_{xx} u\\ \partial_t w &= bu - \gamma w\end{aligned}}$$

Řešení ve tvaru cestující vlny ... profil vlny ϕ

$$\boxed{u(t,x) = \phi(x+ct), \quad w(t,x) = \psi(x+ct)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}c\phi' &= \phi(1-\phi)(\phi-a) - \psi + \phi''\\ c\psi' &= b\phi - \gamma\psi\end{aligned}}$$

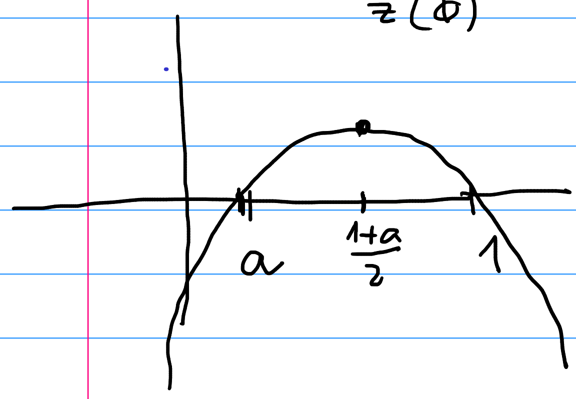
$\longleftarrow$ splňuje

c ... rychlost vlny

$\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 < \frac{b}{\gamma}$ ... splňuje $c^2 > \frac{4b}{(1-a)^2}$

https://www.youtube.com/watch?v=9UOZi6uvNMc

$$\int \phi'^2(\xi)\left[\underbrace{(1-\phi(\xi))(\phi(\xi)-a)}_{z(\phi)} - \frac{b}{c^2}\right] d\xi = \frac{\gamma}{b}\left(1-\frac{\gamma}{c^2}\right)\int \psi^2 \geq 0$$



a má vlastnost „prahové hodnoty"

[ ] je někde kladná

$\Rightarrow (1-\phi)(\phi-a)$ je někde kladné $\Rightarrow \phi$ je někde větší než a.

ZÁVĚR: $\exists$ speciální řešení PDR ve tvaru cestující vlny. Příslušný profil ϕ je někde větší než $\underline{a}$

(Je-li $\phi < a$ všude, pak nedojde k jevu cestující vlny). Rychlost c dokážeme odhadnout zdola. Odhad shora?

IV.3 Globální chování F-N modelu s difúzí

$$\boxed{\begin{array}{ll} \partial_t u = u(1-u)(u-a) - w + \partial_{xx} u & t \geq 0 \\ \partial_t w = bu - \gamma w & x \in [0,+\infty) \\ u(0,t) = P(t) \quad \ldots \text{okrajová podmínka} & \\ w(0,t) = b\int_0^t P(s) e^{-\gamma(s)} & \\ & P \text{ daná funkce (počáteční impuls)} \\ u(x,0) = 0 & P(t) = 0 \quad \forall t \geq T, \ T>0 \text{ dané} \\ w(x,0) = 0 & \end{array}}$$

„otestujeme 1. rovnici funkcí bu a 2. rovnici funkcí w"

PŘEDP., že $u(t,x) \to 0$, $\partial_x u \to 0$, $w(t,x) \to 0$ pro $x \to +\infty$ dost rychle, aby $\int$ existovaly

$\text{I.} \cdot bu$, $\int_0^{+\infty} dx$

$$\int_0^\infty \partial_t u \cdot bu \, dx = \int_0^\infty bu^2(1-u)(u-a) - buw + b\partial_{xx}u \cdot u \, dx$$

$$\partial_t u \cdot u = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} u^2 \qquad LS: \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\infty u^2(t,x)\,dx$$

$$\text{na PS}: \int_0^\infty \partial_{xx}u \cdot u \, dx \overset{\text{per-partes}}{=} \underbrace{\left[\partial_x u \cdot u\right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \partial_x u \, \partial_x u \, dx$$

$\partial_{xx} u \rightsquigarrow \partial_x u$

$u \rightsquigarrow \partial_x u$

$\lim_{x\to\infty} = 0$

$u(0,t) = 0 \quad \underline{\underline{\forall t \geq T}}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\infty bu^2 = -b\int_0^\infty (\partial_x u)^2 dx + \int_0^\infty bu^2(1-u)(u-a) - buw \, dx \tag{1}$$

2. rci vynásobíme w, $\int_0^\infty dx$

$$\int_0^\infty w\,\partial_t w = \int_0^\infty b u w - \gamma w^2 \, dx$$

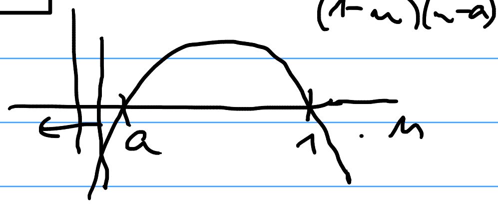
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\infty w^2 \, dx = \int_0^\infty b u w - \gamma w^2 \, dx \qquad (2)$$

(1) + (2)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\infty b u^2 + w^2 \, dx = -\int_0^\infty b(\partial_x u)^2 - \gamma w^2 + b u^2 (1-u)(u-a) \, dx$$

$$\boxed{\text{Předpokládejme dále, že } u(t,x) \le a - \varepsilon}$$

Pak $(1-u)(u-a) \le -\delta$.



P.S. $$-\int_0^\infty b(\partial_x u)^2 + \gamma w^2 + b\delta u^2 \, dx$$

$$\le -\int_0^\infty \gamma w^2 + b\delta u^2 \, dx \le -C \int_0^\infty b u^2 + w^2 \, dx$$

pokud $-\gamma \le -C$ .. $C \le \gamma$ $\quad C = \min\{\gamma, \delta\}$

a $-b\delta \le -bC$ $\quad C \le \delta$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\int_0^\infty b u^2 + w^2 dx}_{z(t)} \le -2C \underbrace{\int_0^\infty b u^2 + w^2 \, dx}_{z(t)}$$

$$z'(t) \le -2C \cdot z(t) \qquad /: z(t) \neq 0$$

$$\frac{z'(t)}{z(t)} \le -2C \qquad / \int_T^s dt, \quad s > T$$

$$\left[\ln z(t)\right]_T^s \le -2C(s-T)$$

$$\ln z(s) - \ln z(T) = \ln \frac{z(s)}{z(T)} \qquad z(s) \le \underbrace{z(T)}_{K} \cdot e^{-2C(s-T)}$$

$$\underbrace{\int_0^\infty b u^2(s,x) + w^2(s,x) \, dx}_{\text{Tato veličina klesá exponenciálně k 0.}} \le K \cdot e^{-2C(s-T)}$$

ZÁVĚR: Je-li u pod prahovou hodnotou a, nedojde k šíření impulsu (impuls exponenciálně klesá k 0).

Chtěli bychom výsledek typu

„Pokud je počáteční impuls P nějaký, tak potom se impuls bude/nebude šířit"

Podmínka $u(t,x) \leq a - \varepsilon \quad \forall x, t$ nelze ověřit.

Lze ukázat: Pokud $a > \frac{b}{\gamma}$ a P omezené, spojité a splňuje
- $P(t) = P(0) = 0 \quad \forall t \geq T, \ T > 0$
- $\sup_{t \in [0,T]} |P(t)| \leq M$

Pak platí $\sup |u(t,x)| \leq k \int_0^T |P(t)| dt$ (k pevná konst.)

a dále platí, že $\exists$ konstanty C, k, λ, že

$$\int_0^T |P(t)| dt < \lambda \implies \sup_x |u(t,x)| \leq k \cdot e^{-Ct} \quad \forall t \geq 0.$$

Ukážeme, že pro axon konečné délky nedochází k šíření impulsu, je-li délka moc malá (bez podmínky $u \leq a - \varepsilon \ \forall t, x$)

Uvažujme axon konečné délky ℓ ... $x \in [0, \ell]$

- přidáme okrajovou podmínku pro $x = \ell$

  buď $u(\ell, t) = 0$

  nebo $\partial_x u(\ell, t) + \alpha \cdot u(\ell, t) = 0$ $\quad \forall t \geq 0$

  $\hookrightarrow \alpha \geq 0$ konstanta

není jasné, která je ta správná.

$$\partial_t u = u(1-u)(u-a) - w + \partial_{xx} u$$
$$\partial_t w = bu - \gamma w$$

$$1.\cdot bu + 2.\cdot w \Big/ \int_0^\ell dx$$

$$\int_0^\ell bu\,\partial_t u + w\,\partial_t w \; dx = \int_0^\ell bu^2(1-u)(u-a) + \partial_{xx}u \cdot u \cdot b - \gamma w^2 dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell bu^2 + w^2 \, dx = \quad ??$$

$$\int_0^\ell u\,\partial_{xx} u \, dx = \left[u\,\partial_x u\right]_0^\ell - \int_0^\ell (\partial_x u)^2 \, dx \leq -\int_0^\ell (\partial_x u)^2 dx$$

$t \geq T \qquad u(0,t) = 0$

$u(\ell,t)$ $= 0 \quad \dots [\;]_0^\ell = 0$

$= -d \cdot \partial_x u(\ell,t) \quad [\dots] = -d(\partial_x u(\ell,t))^2 \leq 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell bu^2 + w^2 \, dx \leq \int_0^\ell bu^2(1-u)(u-a) - b(\partial_x u)^2 - \gamma w^2 \, dx$$

$(1-u)(u-a)$ nabývá maxima pro $u = \frac{1+a}{2}$,

hodnota maxima je $\left(1 - \frac{1+a}{2}\right)\left(\frac{1+a}{2} - a\right) = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2$

$$(1-u)(u-a) \leq \frac{(1-a)^2}{4}$$

Poincarého nerovnost: $\displaystyle\int_0^\ell (\partial_x u)^2 \geq \frac{\pi^2}{\ell^2}\int_0^\ell u^2$

platí $\forall u$ na $[0,\ell]$ $\wedge$ $u(0) = u(\ell) = 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell bu^2 + w^2 \, dx \leq \int_0^\ell u^2\left(b \cdot \frac{(1-a)^2}{4} - b\frac{\pi^2}{\ell^2}\right) - \gamma w^2 \, dx$$

Pokud $\frac{(1-a)^2}{4} < \frac{\pi^2}{\ell^2}$, tj. $\ell < \frac{2\pi}{1-a}$ platí

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell b u^2 + w^2\,dx \le -C\int_0^\ell b u^2 + w^2\,dx$$

$$-\gamma \le -C \qquad C \le \gamma$$

$$\frac{(1-a)^2}{4} - \frac{\pi^2}{\ell^2} \le -C \qquad C \le \frac{\pi^2}{\ell^2} - \frac{(1-a)^2}{4}$$

$$C = \min\{\gamma_1, \dots\} > 0$$

Odhad jako předtím

$$\int_0^\ell b u^2_{(s)} + w^2_{(s)}\,dx \le K e^{-2C(s-T)}$$

tj. řešení klesá exponenciálně.

<u>důležité</u>: $K = \int_0^\ell b u^2(T,x) + w^2(T,x)\,dx$!

exponenciální pokles začne hned v čase T.
$\Rightarrow$ nedochází k šíření impulsu
(za předpokladu $\ell < \frac{2\pi}{1-a}$).

<u>NA ZÁVĚR</u>: Myšlenka důkazu Poincarého nerovnosti:

$$u : [0,\ell] \to \mathbb{R} \qquad u = \sum_{n=1}^\infty a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$\partial_x u = \sum_{n=1}^\infty a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}\cdot\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)$$

$$\int_0^\ell u^2 = \int_0^\ell\left(\sum_{n=1}^\infty a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)^2 = \sum a_n^2$$

$$\underline{\int_0^\ell(\partial_x u)^2} = \sum a_n^2\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \ge \sum a_n^2\frac{\pi^2}{\ell^2} = \frac{\pi^2}{\ell^2}\sum a_n^2 = \underline{\frac{\pi^2}{\ell^2}\int u^2}$$

rovnost pro $u(x) = \sin\frac{\pi x}{\ell}$.